Przykładowy test – Matematyka, Studia drugiego stopnia

Każde zadanie jest wielokrotnego wyboru tzn. możliwa jest każda kombinacja odpowiedzi **tak** i **nie**. Za każdą trafną odpowiedź w trzypytaniowym zadaniu otrzymuje się **1** punkt. Za bezbłędne rozwiązanie całego trzypytaniowego zadania otrzymuje się dodatkowo **3** punkty.

Czas trwania: 90 minut
Życzymy powodzenia

---

1. Zbiór X można przedstawić jako sumę dwóch podzbiorów $X = A \cup B$. Zbiór A składa $6N$ elementów, zbiór B składa się z $3K$ elementów gdzie $K, N \geqslant 1$ są liczbami naturalnymi. Wiadomo, że co szósty element zbioru A jest elementem zbioru B oraz co trzeci element zbioru B jest elementem zbioru A. Wówczas
   (a) elementów zbioru B co najmniej tyle, co elementów zbioru A.
   (b) liczba elementów zbioru X jest podzielna przez 8.
   (c) zbiory A i B są równoliczne.

2. Na płaszczyźnie bez zera określono relację następująco
$$z \sim w, \quad \text{gdy } z \text{ i } w \text{ są w tej samej odległości od punktu } (0,0)$$
   Wówczas
   (a) relacja $\sim$ jest zwrotna.
   (b) relacja $\sim$ jest symetryczna.
   (c) relacja $\sim$ jest przechodnia.

3. Równanie $2x - 3y = 5$ posiada
   (a) dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach całkowitych.
   (b) nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych.
   (c) dokładnie jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych.

4. Dane jest odwzorowanie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dane wzorem
$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \\ n & \text{dla } n \text{ parzystych} \end{cases}$$
   Wówczas
   (a) f jest bijekcją.
   (b) obrazem odwzorowania f jest zbiór liczb naturalnych parzystych.
   (c) istnieje liczba nieparzysta leżąca w obrazie funkcji f.

5. Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ jest zbieżny do elementu x_0 względem metryki d wtedy i tylko wtedy gdy
   (a) w dowolnej kuli $K(x_0, r)$ znajduje się nieskończenie wiele wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) dopełnienie dowolnej kuli $K(x_0, r)$ zawiera skończoną ilość wyrazów ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) w dowolnej kuli $K(x_0, r)$ znajdują się wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Granica $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7^n + 5^n - 3^{n+2}}$
   (a) jest równa 7.
   (b) jest równa 3.
   (c) nie istnieje.

7. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$
   (a) jest zbieżny.
   (b) jest bezwzględnie zbieżny.

(c) nie jest bezwzględnie zbieżny.

8. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

   (a) jest ciągła w punkcie $x = 0$.

   (b) jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

   (c) nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

9. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Wówczas

   (a) f jest rosnąca.

   (b) istnieje punkt $x \in (0, 1)$, w którym $f'(x) = 1$.

   (c) funkcja f jest ciągłą.

10. Niech $f(x) = x^4 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy

    (a) $f(x) \geqslant -3$ dla $x \in \mathbb{R}$.

    (b) f posiada punkt przegięcia.

    (c) f jest różnowartościowa na przedziale $(0, +\infty)$.

11. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y) = x^2 y + x$ spełnia warunki:

    (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 1$.

    (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x$.

    (c) f jest funkcją ciągłą.

12. Niech $f_n(x) = x^n$, $x \in \langle 0, 1 \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy

    (a) ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny punktowo.

    (b) ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie.

    (c) szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo.

13. Szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

    (a) jest zbieżny jednostajnie w przedziale $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$.

    (b) jest zbieżny w punktach $x = -1$ i $x = 1$.

    (c) w przedziale $(-1, 1)$ ma sumę równą $\ln(1 + x)$.

14. Funkcją pierwotną funkcji $f(x) = x^5 - \cos(2x)$ jest funkcja

    (a) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}\sin(2x)$.

    (b) $F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}\sin(2x) + 2019$.

    (c) $F(x) = 6x^5 + 2\sin(2x) + 2019$.

15. Całka $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$

    (a) całkując przez części przyjmuje postać $\frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx$.

    (b) jest równa $\frac{\pi}{2}$.

    (c) jest równa π.

16. Niech z oraz w oznaczają dwie różne od zera liczby zespolone. Wówczas

    (a) jeśli $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$ oraz $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} w$ to $z = \bar{w}$.

    (b) jeśli $|z| = |w|$ to $z = \pm w$.

    (c) jeśli $z^3 = w^3$ to $z = w$.

17. Dany jest wielomian $f(x) = x^4 + 1$.

    (a) Liczby zespolone i oraz $-i$ są pierwiastkami wielomianu f.

    (b) Wielomian f ma cztery pierwiastki zespolone.

(c) Wielomian f ma dokładnie dwa pierwiastki rzeczywiste.

18. W zbiorze $A = (0, +\infty)$ określono działanie $\circ$ następująco

$$a \circ b = ab + 2, \quad \text{dla } a, b \in A.$$

Wówczas

(a) działanie $\circ$ jest łącznie.

(b) w zbiorze A istnieje element neutralny działania $\circ$.

(c) struktura algebraiczna $(A, \circ)$ jest grupą.

19. Załóżmy, że A i B są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia takimi że $\det A = \det B$. Wówczas

(a) macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy odwracalna jest macierz B.

(b) $\det(AB) \geqslant 0$.

(c) wyznacznik $\det(A - B)$ może być dodatni.

20. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dane są wektory

$$u = [-7, 14, 0], \quad v = [2, 1, 3], \quad w = [4, 2, -1].$$

Wówczas

(a) $u = v \times w$.

(b) wektory u, v, w są liniowo niezależne.

(c) macierz kwadratowa utworzona z wektorów u, v, w jako wiersze tej macierzy ma niezerowy wyznacznik.

21. Dane są odwzorowania liniowe $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ oraz $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ określone wzorami

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3), \quad B(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

Wówczas

(a) wektor $[1, 2, 3]$ leży w jądrze odwzorowania A.

(b) wektor $[3, 8, -2]$ leży w obrazie odwzorowania B.

(c) odwzorowanie liniowe $BA : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

22. Rozważmy funkcję f, napisaną w języku programowania $C++$, postaci

```
int f(int a)
{
    if (a<=1) return 3;
        else return a+f(a-1);
}
```

Wówczas

(a) $f(5) = 17$.

(b) $f(-10) = 3$.

(c) funkcja f jest przykładem funkcji zdefiniowanej rekurencyjnie.

23. Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Niech X będzie liczbą reszek, które do tego czasu wypadną.

(a) Zmienna losowa X ma rozkład Poissona.

(b) Zmienna losowa X ma dodatnią wartość oczekiwaną.

(c) Zmienna losowa X nie ma skończonej wariancji.

24. Rozważmy zmienne losowe X i Y. Wówczas

(a) $D^2(X+Y) = D^2X + D^2Y$.

(b) jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to $D^2(X-Y) = D^2X - D^2Y$.

(c) $E(X-Y) = EX - EY$.

25. Rozważmy równanie różniczkowe zwyczajne postaci

$$\frac{dy}{dx} + 2xe^y = 0, \quad x > 0.$$

Wówczas

(a) jest to równanie o rozdzielonych zmiennych.

(b) po podstawieniu $y = \ln z$ przyjmuje ono postać $\frac{dz}{dx} + 2xz^2 = 0$.

(c) funkcja $y(x) = \ln(x)$, $x > 0$, jest rozwiązaniem tego równania.