Przykładowy test – Matematyka, Studia pierwszego stopnia

Każde zadanie jest wielokrotnego wyboru tzn. możliwa jest każda kombinacja odpowiedzi **tak** i **nie**. Za każdą trafną odpowiedź w trzypytaniowym zadaniu otrzymuje się **1** punkt. Za bezbłędne rozwiązanie całego trzypytaniowego zadania otrzymuje się dodatkowo **3** punkty.

Czas trwania: 90 minut
Życzymy powodzenia

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej, której wyrazami są liczby niewymierne
   (a) może być liczbą całkowitą
   (b) może nie być niewymierny
   (c) nie może być równy zero
2. Zbiór rozwiązań jednorodnego układu równań liniowych
   (a) może być pusty
   (b) może być dwupunktowy
   (c) jest zawsze nieskończony
3. Jeżeli z i w są liczbami zespolonymi to
   (a) $|z+w| \leqslant |z| + |w|$
   (b) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
   (c) $|zw| = |z||w|$
4. Rozważmy funkcję $f : X \to Y$. Niech $A, B \subset X$. Obraz funkcji spełnia następujący warunek
   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   (c) $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$
5. W niepustym zbiorze X zadana jest relacja równoważności $\sim$. Niech $a, b \in X$. Klasy równoważności relacji $\sim$ spełniają warunek
   (a) jeśli $a \sim b$, to $[a] = [b]$
   (b) jeśli $a \neq b$, to $[a] \cap [b] = \emptyset$
   (c) jeśli $[a] = [b]$, to $a = b$
6. Szereg zbieżny liczb dodatnich
   (a) jest bezwzględnie zbieżny
   (b) jest bezwarunkowo zbieżny
   (c) nie jest zbieżny do zera
7. Dany jest ciąg liczbowy (a_n). Wówczas
   (a) $\liminf_{n\to\infty} a_n \leqslant \limsup_{n\to\infty} a_n$
   (b) $\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{m\geqslant n} a_m$
   (c) $\sup_{n\geqslant 1} a_n \geqslant \limsup_{n\to\infty} a_n$
8. Funkcja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna oraz $f' > 0$, $f'' < 0$. Wówczas f jest
   (a) rosnąca i wklęsła,
   (b) rosnąca i wypukła,
   (c) malejąca i wklęsła.
9. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$

(a) jest ciągła w punkcie $x = 0$,

(b) jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$,

(c) nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$.

10. Granica $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{3n^3-1}$

   (a) jest równa -1,

   (b) jest równa 3,

   (c) nie istnieje.

11. Na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ jest

   (a) zbieżny,

   (b) rozbieżny,

   (c) bezwzględnie zbieżny.

12. Granica $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{5x}$

   (a) jest równa $\frac{1}{5}$,

   (b) nie istnieje,

   (c) jest równa 3.

13. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Wówczas

   (a) jest rosnąca,

   (b) istnieje punkt $x \in (0, 1)$, w którym $f'(x) = 1$,

   (c) funkcja f jest ciągłą.

14. Całka $\int_0^{\pi} (x^3 + \sin x)\, dx$

   (a) jest równa π^2,

   (b) jest równa $\pi^2 + 2$,

   (c) po podstawieniu $t = 2x$ jest postaci $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(t + \sin(\frac{1}{2}t))\, dt$.

15. Rozważmy funkcję $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$. Wówczas

   (a) funkcja f jest malejąca,

   (b) funkcję f można dookreślić w punkcie $x = 0$ tak, aby była ciągła.

   (c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

16. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y) = x^2y + x$ spełnia warunki:

   (a) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 1$,

   (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x$,

   (c) jest funkcją ciągłą.

17. Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x, y) = x^2 - 2y^2$

   (a) posiada w punkcie $(2, -1)$ pochodną kierunkową w kierunku wektora $v = [-1, 1]$ równą -8,

   (b) posiada w punkcie $(0, 0)$ maksimum lokalne,

   (c) posiada w każdym punkcie $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pochodne cząstkowe wszystkich rzędów.

18. Niepusty zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony z góry przez $M \in \mathbb{R}$. Wtedy M jest kresem górnym zbioru A, gdy

   (a) jest najmniejszym ograniczeniem górnym A.

   (b) dla każdego $a \in A$ istnieje $M' < M$, że $M' < a$.

   (c) dla każdego $M' < M$ istnieje $a \in A$, że $M' < a$.

19. Załóżmy, że funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wtedy

    (a) f jest jednostajnie ciągła,
    (b) spełnia warunek Lipschitza,
    (c) istnieje $x_0 \in [a, b]$, takie że $f(x_0) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$.

20. Niech $f(x) = x^4 - 4x$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy

    (a) $f(x) \geqslant -3$ dla $x \in \mathbb{R}$,
    (b) f posiada punkt przegięcia,
    (c) f jest różnowartościowa na przedziale $(0, +\infty)$.

21. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy

    (a) jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.
    (b) jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
    (c) jeśli $a_n \geqslant 0$ dla $n \geqslant 0$ i $\lim_{n\to\infty} a_n/n = 1$, to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

22. Niech $f_n(x) = x^n$, $x \in \langle 0, 1\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$. Wtedy

    (a) ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny.
    (b) ciąg funkcyjny (f_n) jest zbieżny jednostajnie.
    (c) szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny.

23. Szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$

    (a) jest zbieżny jednostajnie w przedziale $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$,
    (b) jest zbieżny w punktach $x = -1$ i $x = 1$,
    (c) w przedziale $(-1, 1)$ ma sumę równą $\ln(1 + x)$.

24. Zdarzenia $A, B, C \subset \Omega$ są takie, że $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{4}$ oraz $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$. Wówczas

    (a) $P(A \setminus B) = \frac{1}{6}$
    (b) $P(B|A \cup C) = \frac{1}{3}$
    (c) zdarzenia A i $\Omega \setminus C$ są niezależne.

25. Rzucamy trzema kostkami.

    (a) Prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie dwóch dwójek wynosi $\frac{5}{75}$.
    (b) Zdarzenia „łączna liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 3” i „łączna liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez 4” są niezależne.
    (c) Prawdopodobieństwo warunkowe wyrzucania trzech szóstek pod warunkiem wyrzucenia co najmniej dwóch szóstek wynosi $\frac{1}{16}$.