Autoreferat

kandydata do tytułu profesora

dr hab. Jacek Hejduk prof. nadzwyczajny UŁ

Spis treści

1 Życiorys naukowy

Urodziłem się 24 sierpnia 1955 roku w Wolborzu w województwie łódzkim.

W latach 1974–1978 odbyłem studia na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego, ukończone z wyróżnieniem na specjalności teoretycznej. Od III roku studiów realizowałem indywidualny program studiów pod opieką Prof. Władysława Wilczyńskiego.

1 października 1978 roku rozpocząłem pracę na stanowisku asystenta w Zakładzie Informatyki Instytutu Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego.

W 1979 roku ukończyłem Studium Pedagogiczne przy Uniwersytecie Łódzkim dla nauczycieli akademickich.

Od 1981 roku kontynuowałem zatrudnienie na stanowisku asystenta, a następnie starszego asystenta w Katedrze Funkcji Rzeczywistych.

Stopień doktora nauk matematycznych uzyskałem 25 września 1985 roku na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego na podstawie rozprawy

Topologizacja ilorazowych algebr Boole'a

przygotowanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Władysława Wilczyńskiego z Uniwersytetu Łódzkiego. Recenzentami byli:
doc. dr hab. Zbigniew Grande z Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Bydgoszczy,
doc. dr hab. Mirosław Filipczak z Uniwersytetu Łódzkiego.

W 1979 roku ukończyłem dwuletnie Studia Podyplomowe Języka Angielskiego przy Studium Języków Obcych Uniwersytetu Łódzkiego.

W 1991 roku odbyłem dwutygodniowy staż na Uniwersytecie w Tbilisi w Gruzji pod kierunkiem Prof. A. B. Kharazishvili.

W 1992 roku podczas dwumiesięcznego pobytu w East Lansing uczestniczyłem w seminarium Prof. C. Weila w Michigan State University.

Stopień doktora habilitowanego uzyskałem 7 października 1998 roku na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego na podstawie rozprawy

Density topologies with respect to invariant σ-ideals.

Recenzentami byli:
prof. dr hab. Julian Musielak z Uniwersytetu im. A. Mickiewicza w Poznaniu,
dr hab. Tomasz Natkaniec z Uniwersytetu Gdańskiego,
prof. dr hab. Władysław Wilczyński z Uniwersytetu Łódzkiego.

Realizowałem program Erasmus i Erasmus+ w następujących Uniwersytetach:

- 2010, Uniwersytet w Joaninnie (Grecja);
- 2013, Uniwersytet w Mersin i Uniwersytet Çukurova w Adanie (Turcja);
- 2014, Uniwersytet w Santiago de Compostela (Hiszpania);
- 2015, Uniwersytet w Grenadzie (Hiszpania);
- 2016, Uniwersytet - Istanbul Commerce University (Turcja);
- 2017, Uniwersytet w Ankarze (Turcja);
- 2017, Uniwersytet w Palermo (Włochy);
- 2018, Uniwersytet - Lucian Blaga University of Sibiu (Rumunia);

W 1997 roku na seminarium w oddziale Słowackiej Akademii Nauk w Koszycach przedstawilem referat na temat "On the cardinality of the sets of density points".

W 2011 roku zostałem zaproszony do przedstawienia plenarnego wykładu na temat "On contribution of Wilczyński's School on the density on the real line" na konferencji The 25-th International Summer Conference on Real Functions (Złoty Potok, Polska).

W 2016 roku zostałem zaproszony do przedstawienia wykładu na temat "A visit to topological spaces generated by lower and almost lower operators" na konferencji The 30-th International Summer Conference on Real Functions (Stará Lesná, Słowacja).

Ponadto uczestniczyłem w ponad 30 konferencjach, w większości międzynarodowych, przedstawiając wyniki swoich badań naukowych.

1) School on Real Functions, Trnava, Czechosłowacja, 1980, referat: *"On the additivity of the sets having the Baire Property"*;

2) School on Real Functions, Dubnik, Czechosłowacja, 1988, referat: *" On the topologizations of the some family of measurable functions"*;

3) The Winter School on Analysis, Srni, Czechosłowacja, 1990, referat: *"On the Lusin theorem in the aspect of small system"*;

4) Semestr z Funkcji Rzeczywistych w Centrum Banacha, Warszawa, 1989, referat: *"On some certain σ - ideals"*;

5) Seminar in the Department of Mathematics of Michigan State University, East Lansing, USA, 1992, *"On topologizations of the some spaces of the real functions"*;

6) The Polish-American Workshop, Łódź, Polska, 1994, referat: *"On non Baire sets in the category bases"*;

7) XX Summer Symposium in Real Analysis, Windsor, Canada,1996, referat: *"On abstract density on the real line"*;

8) XXII Summer Symposium in Real Analysis, Łódź, 1999, współorganizator konferencji;

9) Summer School on Real Functions, Liptovský Ján, Słowacja, 2000, referat: *"On Hashimoto topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*;

10) X Convergeno di Analisi Reale e Teoria della Misura CARTEMI, Ischia, Włochy, 2002, referat: *"On topology generated by a fix sequence"*;

11) Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, Słowacja, 2002, referat: *"On the topology on the real line associated with the Lebesgue measure"*;

12) Real Analysis Conference, Rowy, Polska, 2003, referat: *"On $\mathcal{I}$-density topologies with respect to a fixed sequence"*;

13) XXVII Summer Symposium in Real Analysis, Opava, Czechy, 2003, referat: *"On the density type topologies on the real line"*;

14) XI Convergeno di Analisi Reale e Teoria della Misura CARTEMI, Ischia, Włochy, 2004, referat: *"On homeomorphisms of the density type topologies"*;

15) XVIII Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, Słowacja, 2004, referat: *“On the homeomorphisms of the density type topologies”*;

16) XIX Summer Conference on Real Functions Theory, Rowy, Polska, 2005, referat: *“On the cardinality of the set of density points”*;

17) XX Summer Conference on Real Functions Theory, Liptovský Ján, Słowacja, 2006, referat: *“On density topologies generated by functions”*;

18) XXXI Summer Symposium in Real Analysis, Trinity College, Oxford, Wielka Brytania, 2007, referat: *“On the density topologies with respect to functions”*;

19) XXXII Summer Symposium in Real Analysis, Chicago, USA, 2008, referat: *“On the density topologies generated by sequences of intervals”*;

20) XXIII International Summer Conference on Real Functions Theory, Niedzica, Polska, 2009, referat: *“On the abstract density topologies”*;

21) International Conference on Topology and its applications, Naftpaktos, Grecja, 2010, referat: *“On the abstract density topologies”*;

22) XXIV Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, Słowacja, 2010, referat: *“On topologies with respect to σ-ideals”*;

23) The Meeting of the Israel Mathemaical Union and the Polish Mathematiacal Society, Łód, Polska, referat:*”On some kind of the generalization of the density topologies”*;

24) XXVI Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, Słowacja, 2012, referat: *“On the topologies in the family of sets having the Baire property”*;

25) XXVIII Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, Słowacja, 2014, referat: *“On the semiregularization of some abstract density topologies”*;

26) XXXVIII Summer Symposium in Real Analysis, Praga, Czechy, 2014, referat: *“On topologies generated by sequences of intervals tending to zero”*;

27) XXIX International Summer Conference on Real Functions Theory, Niedzica, Polska, 2015, referat: *“On the pointwise desnity on the real line”*;

28) 1 Warsztaty z Analizy Rzeczywistej, Konopnica, Polska, 2015; referat: *“Uwagi o topologiach generowanych przez rozszerzenia miary Lebesgue’a”*;

29) XXX International Summer Conference on Real Functions Theory, Stará Lesná, Słowacja, 2016, referat: *“On generalization of the density topology”*;

30) XL Summer Symposium in Real Analysis, Sarajewo, Bośnia i Hercegowina, 2016, referat: *"On some properties of J-density topologies and J-approximately continuous functions"*;

31) 2 Warsztaty z Analizy Rzeczywistej, Konopnica, Polska, 2016; referat: *"O braku regularności pewnych topologii typu gęstości"*;

32) XXXI International Summer Conference on Real Functions Theory, Ustka, Polska, 2017, referat: *"On some properties of lower and almost lower density operators"*;

33) XLII Summer Symposium in Real Analysis, Saint Petersburg, Rosja, 2018, referat: *"On strong generalized topology with respect to the outer measure"*.

W latach 1991-1994 byłem wykonawcą w grancie KBN, którym kierował Prof. W.Wilczyński.

W latach 2010-2013 byłem wykonawcą w grancie NCN (N N201547238) "Lokalne własności zbiorów mierzalnych i o własności Baire'a w przestrzeniach euklidesowych", którego kierownikiem był Prof. W. Wilczyński z UŁ.

Byłem recenzentem w czasopismach: Demonstratio Mathematica, Folia Mathematica, Georgian Mathematical Journal, Journal of Applied Analysis, Mathematica Slovaca, Positivity, Real Analysis Exchange, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics.

Otrzymałem następujące Nagrody Rektora UŁ:

1980 – za osiągnięcia naukowe, dydaktyczne i organizacyjne;

1989 – nagroda II stopnia za osiągnięcia dydaktyczne, wychowawcze i organizacyjne;

1990 – nagroda III stopnia za cykl publikacji;

1992 – nagroda II stopnia za cykl publikacji;

2005 – nagroda I stopnia za osiągnięcia dydaktyczne i organizacyjne;

2008 – nagroda I stopnia za osiągnięcia organizacyjne;

2015 – nagroda zespołowa I stopnia z dr R.Wiertelak za cykl publikacji z pogranicza topologii i teorii miary;

Otrzymałem następujące odznaczenia:

2005 – Medal Komisji Edukacji Narodowej;

2008 – Srebrny Medal za Długoletnią Służbę;

2011 – Złota Odznaka UŁ;

Na Uniwersytecie Łódzkim pracuję nieprzerwanie od 1 października 1978 roku.

Od 2008 roku jestem profesorem nadzwyczajnym UŁ w Katedrze Funkcji Rzeczywistych na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

2 Osiągnięcia naukowe

2.1 Wstęp

Niech $\mathbb{R}$ oznacza zbiór liczb rzeczywistych, $\mathbb{R}_+$ – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, $\mathbb{N}$ – zbiór liczb naturalnych, $\mathbb{Q}$ – zbiór liczb wymiernych, $\mathcal{L}$ – rodzinę zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, zaś $\mathbb{L}$ – σ-ideał zbiorów miary Lebesgue'a zero. Jeśli $\langle X, \tau \rangle$ jest przestrzenią topologiczną, to $\mathcal{B}(\tau)$, $\mathcal{B}a(\tau)$ oznacza odpowiednio rodzinę zbiorów borelowskich i rodzinę zbiorów o własności Baire'a względem topologii τ. Przez $\mathcal{N}(\tau)$ i $\mathbb{K}(\tau)$ oznaczane będą rodziny zbiorów nigdzie gęstych i odpowiednio zbiorów I kategorii względem topologii τ. W przypadku, gdy τ jest topologią naturalną na $\mathbb{R}$, oznaczaną τ_{nat}, stosowane będą odpowiednio oznaczenia $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}a$, $\mathcal{N}$ i $\mathbb{K}$ dla opisanych powyżej rodzin. Symbol 2^X będzie stosowany do oznaczenia rodziny wszystkich podzbiorów zbioru X. Funkcja charakterystyczna zbioru $A \subset X$ będzie oznaczana przez χ_A. Jeśli $b \in \mathbb{R}$, to $bA = \{b \cdot x : x \in A\}$ oraz $b + A = \{b + x : x \in A\}$. Miara Lebesgue'a na prostej będzie oznaczana przez λ, natomiast jej dowolne zupełne rozszerzenie przez μ. W dalszej części autoreferatu pisząc o rozszerzeniu miary Lebesgue'a zawsze zakładamy, że będzie to miara zupełna.

Jeśli $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X, zaś $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$ jest właściwym σ-ideałem to trójka $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ będzie nazywana przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Od tej pory pisząc, że $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ jest przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$, zawsze będę miał na myśli, że $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem podzbiorów przestrzeni X, zaś $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$ jest właściwym σ-ideałem. Warunek dla zbiorów A, B takich, $A \triangle B \in \mathcal{J}$ oznaczymy przez $A \sim B$. Jeśli $\mathcal{S}$ jest σ-ciałem w przestrzeni X, zaś $\mathcal{J}$ jest właściwym σ-ideałem w przestrzeni X, to najmniejsze σ-ciało zawierające rodzinę $\mathcal{S} \cup \mathcal{J}$ oznaczane będzie symbolem $\mathcal{S} \triangle \mathcal{J}$, przy czym każdy zbiór $A \in \mathcal{S} \triangle \mathcal{J}$ ma postać $A = B \triangle C$, gdzie $B \in \mathcal{S}$ zaś $C \in \mathcal{J}$.

Jeśli $\mathcal{W}$ jest pewną rodziną podzbiorów przestrzeni X i $\Phi : \mathcal{W} \to 2^X$ jest takim operatorem, że rodzina

$$\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{W} : A \subset \Phi(A)\}$$

stanowi topologię na X, to będziemy mówić, że topologia $\mathcal{T}_\Phi$ jest generowana przez operator Φ. W przypadku, gdy $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ jest przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ oraz $\Phi : \mathcal{S} \to 2^X$ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$, to będziemy mówić, że $\mathcal{T}_\Phi$ jest generowana przez operator Φ na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

Niech $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ będzie przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Operator $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ jest nazywany operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$, jeśli

1° $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(X) = X$;

2° $\underset{A \in \mathcal{S}}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{S}}{\forall} \ \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$;

3° $\underset{A \in \mathcal{S}}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{S}}{\forall} \ A \sim B \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$;

4° $\underset{A \in \mathcal{S}}{\forall} \ A \sim \Phi(A)$.

Znane jest twierdzenie (J. Lukeš, J. Malý, L. Zajíček *Fine topology methods*, Real Analysis and Potential Theory, Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, Berlin, 1986) mówiące, że jeśli Φ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ oraz para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki, to operator Φ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$ na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

Jeśli warunek 4° zastąpimy warunkiem

$(\star)$ $\underset{A \in \mathcal{S}}{\forall} \ \Phi(A) \setminus A \in \mathcal{J}$, to wówczas operator Φ nazywać będziemy operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

Z kolei, jeśli zastąpimy warunek 4° jeszcze słabszym warunkiem

$$(\star\star) \quad \underset{A \in \mathcal{S}}{\forall} \; A \subset \Phi(A) \Rightarrow \Phi(A) \setminus A \in \mathcal{J},$$

to otrzymany operator Φ nazywać będziemy operatorem słabej prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

Natomiast, jeśli zrezygnujemy z warunku 4° w definicji operatora dolnej gęstości, to otrzymany operator Φ nazywamy operatorem semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

Na początku XX wieku H. Lebesgue wprowadził pojęcie punktu gęstości zbioru mierzalnego w zbiorze liczb rzeczywistych. A mianowicie, jeśli $A \in \mathcal{L}$ oraz $x_0 \in \mathbb{R}$, to mówimy, że x_0 jest punktem gęstości zbioru A, jeśli

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1.$$

W przypadku, gdy ta granica jest równa zero, to mówimy, że x_0 jest punktem rozrzedzenia zbioru A.

Punkt gęstości można również definiować dla zbiorów mierzalnych w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$, biorąc pod uwagę za otoczenia kule, bądź n-wymiarowe prostokąty.

Analizując powyższą definicję można zauważyć, że istotą punktu gęstości jest zbadanie, jak dużo zbioru A w sensie miary znajduje się w otoczeniu punktu x_0 w stosunku do miary tego otoczenia. Z perspektywy wielu lat można stwierdzić, jak delikatne i głębokie jest to pojęcie w teorii miary.

Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ można zdefiniować operator $\Phi_d : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ następująco:

$$\Phi_d(A) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x - h, x + h])}{2h} = 1 \right\}.$$

Tak zdefiniowany operator Φ_d jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, przy czym własność, że $\lambda(A \triangle \Phi_d(A)) = 0$ jest treścią klasycznego twierdzenia Lebesgue'a o punktach gęstości mówiącego, że prawie każdy punkt zbioru $A \in \mathcal{L}$ jest jego punktem gęstości i prawie każdy punkt jego dopełnienia jest jego punktem rozrzedzenia.

Punkt gęstości był pomysłowo zaadaptowany przez A. Denjoy w 1916 (A. Denjoy, *Sur les fonctions dérvees sommables*, Bull. Soc. Math. France 43, 161–248, 1916) w celu określenia aproksymatywnej ciągłości funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej. Mianowicie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest aproksymatywnie ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli istnieje zbiór $A \in \mathcal{L}$ taki, że $x_0 \in \Phi_d(A)$ i funkcja $f_{|A \cup \{x_0\}}$ jest ciągła w x_0 w zwykłym sensie, tzn. względem topologii τ_{nat}.

O. Haupt i C. Pauc w 1952 (O. Haupt, C. Pauc, *La topologic approximative de Denjoy envisagée comme vraie toplogie*, C. R. Acad. Sci. Paris 234, 390–392, 1952) zauważyli, że rodzina zbiorów

$$\mathcal{T}_d = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_d(A)\}$$

stanowi topologię istotnie bogatszą od topologii τ_{nat}. Jednakże dopiero w latach sześćdziesiątych XX wieku amerykańscy matematycy C. Goffman, C. J. Neugebauer, T. Nishiura (C. Goffman, C. J. Neugebauer, T. Nishiura, *The density topology and approximate continuity*, Duke Math. J. 28, 497–506, 1961), D. Waterman (C. Goffman, D. Waterman, *Approximately continuous transformation*, Proc. Amer. Math. Soc. 12, 116–121, 1961) a następnie T. D. Tall (T. D. Tall, *The density topology*, Pacific J. Math. 62, No.1, 275–284, 1976) dokładniej przyjrzeli się topologii $\mathcal{T}_d$, zwanej topologią gęstości, oraz funkcjom ciągłym względem tej topologii. Podczas Sympozjum Analizy Rzeczywistej w Pradze w 2015 roku T. Nishiura opowiadał mi o entuzjastycznym okresie badań nad topologią gęstości pod kierunkiem C. Goffmana w latach sześćdziesiątych ubiegłego wieku.

Udowodniono, między innymi, że ciągłość względem topologii gęstości jest identyczna z aproksymatywną ciągłością. Ponadto pokazano, że w obszarze aksjomatów oddzielania jest topologią całkowicie regularną, a funkcje ciągłe względem tej topologii są funkcjami 1 klasy Baire'a i posiadają własność Darboux. Istotną cechą tej topologii jest fakt pokrywania się zbiorów spójnych w tej topologii ze zbiorami spójnymi w topologii naturalnej. Warto dodać, że systematyczne zebranie własności topologii gęstości zawiera rozdział *Density topology* w Handbook of Measure Theory (Elsevier, 2002) opracowany przez W. Wilczyńskiego.

Topologia gęstości $\mathcal{T}_d$ jest szczególnym przypadkiem topologii von-Neumanna odpowiadającej mierze Lebesgue'a. Wiadomo bowiem, że z dowolną przestrzenią $\langle X, \mathcal{S}_\nu, \nu\rangle$ z wyróżnioną niezerową, σ-skończoną i zupełną miarą ν oraz σ-ciałem $\mathcal{S}_\nu$ zbiorów ν-mierzalnych, dzięki twierdzeniu von Neumann-Maharam (D. Maharam, *On a theorem of von Neumann*, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 987–994, 1958), można związać topologię $\mathcal{T}_\nu$ zgodną z miarą ν, czyli taką że

- $\langle X, \mathcal{T}_\nu\rangle$ jest przestrzenią Baire'a,
- $\langle X, \mathcal{T}_\nu\rangle$ spełnia warunek c.c.c (warunek przeliczalnego łańcucha),
- $\mathcal{J}_\nu = \mathbb{K}(\mathcal{T}_\nu)$, gdzie $\mathcal{J}_\nu = \{A \in \mathcal{S}_\nu : \nu(A) = 0\}$,
- $\mathcal{B}a(\mathcal{T}_\nu) = \mathcal{S}_\nu$.

Wracając do koncepcji punktu gęstości na prostej, można zaobserwować, że warunek

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1$$

jest równoważny atrakcyjnemu warunkowi, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}])}{\frac{2}{n}} = 1,$$

co z kolei jest równoważne własności, że ciąg funkcji charakterystycznych $\{\chi_{n(A-x_0)\cap[-1,1]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny według miary Lebesgue'a do funkcji charakterystycznej $\chi_{[-1,1]}$, a zbieżność tę, na podstawie twierdzenia Riesza, można opisać przez zbieżność prawie wszędzie. Dokładnie oznacza to, że z dowolnego rosnącego ciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych można wybrać podciąg $\{n_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\chi_{n_{k_j}(A-x_0)\cap[-1,1]} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]} \text{ prawie wszędzie,}$$

czyli poza zbiorem miary Lebesgue'a zero.

Ta obserwacja pozwoliła Autorom pracy W. Poreda, E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *A category analogue of the density topology* (Fund. Math. 125, 167–173, 1985) na wprowadzenie kategoryjnej koncepcji punktu gęstości w rodzinie zbiorów o wałasności Baire'a.

Mówimy, że punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{I}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{B}a$, jeśli ciąg funkcji $\{\chi_{n(A-x_0)\cap[-1,1]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do funkcji $\chi_{[-1,1]}$ według σ-ideału $\mathbb{K}$, co oznacza że z dowolnego rosnącego ciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych można wybrać podciąg $\{n_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\chi_{n_{k_j}(A-x_0)\cap[-1,1]} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \chi_{[-1,1]} \text{ poza zbiorem I kategorii.}$$

Taka koncepcja zbieżności według dowolnego σ-ideału, do zdefiniowania której posłużono się odwróceniem twierdzenia Riesza, została przedstawiona przez E. Wagner w pracy *Sequences of measurable functions* (Fund. Math. 112 , 89–102, 1981).

Jeśli dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}a$ określimy

$$\Phi_{\mathcal{I}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{I}\text{-gęstości zbioru } A\},$$

to otrzymamy operator dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K}\rangle$. Z uwagi na fakt własności mierzalnej otoczki dla pary $\langle \mathcal{B}a, \mathbb{K}\rangle$ wnioskujemy, że rodzina

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}} = \{A \in \mathcal{B}a : A \subset \Phi_{\mathcal{I}}(A)\}$$

stanowi topologię na prostej. Co więcej, topologia ta jest bogatsza od topologii naturalnej. Przyjęto dla niej stwierdzenie, że jest to kategoryjny odpowiednik topologii gęstości i nazwano topologią $\mathcal{I}$-gęstości. Badania nad topologią $\mathcal{I}$-gęstości oraz funkcjami ciągłymi względem tej topologii były źródłem bardzo wielu prac w zespole kierowanym przez Prof. W. Wilczyńskiego, natomiast K. Ciesielski, L. Larson i K. Ostaszewski poświecili temu tematowi monografię *$\mathcal{I}$-density continuous functions* (Mem. Amer. Math. Soc 515, 1994).

Poniżej omówię następujące najważniejsze osiągnięcia naukowe zamieszczone w następująco zatytułowanych paragrafach:

- *O gęstości względem σ-ideałów niezmienniczych*
- *O topologiach generowanych przez operatory*
- *Abstrakcyjna topologia gęstości*
- *Topologia $\langle s\rangle$-gęstości oraz f-gęstości*

- *O topologiach związanych z rozszerzeniem miary Lebesgue'a*
- *O topologiach gęstości generowanych przez ciągi przedziałów domkniętych zbieżne do zera*
- *Semiregularyzacja*
- *O rodzinach operatorów dolnej gęstości, prawie dolnej gęstości oraz semi dolnej gęstości*

2.2 O gęstości względem σ-ideałów niezmienniczych

Koncepcję punktu $\mathcal{J}$-gęstości rozważałem w pracy [27] zawierającej pewne wyniki rozprawy habilitacyjnej. Idea ta jest związana z σ-ciałem $\mathcal{S} \subset 2^{\mathbb{R}}$ oraz właściwym σ-ideałem $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$ niezmienniczymi ze względu na operacje liniowe postaci $nx+b$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, zaś $b \in \mathbb{R}$. Jeśli σ-ciało $\mathcal{S} \subset 2^{\mathbb{R}}$ oraz właściwy σ-ideał $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$ mają opisaną powyżej własność, to mówimy krótko, że para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ jest niezmiennicza.

Powiemy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{J}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{S}$, jeśli ciąg $\{\chi_{n(A-x_0)\cap[-1,1]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do funkcji $\chi_{[-1,1]}$ według σ-ideału $\mathcal{J}$, czyli dla dowolnego rosnącego ciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych istnieje podciąg $\{n_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\chi_{n_{k_j}(A-x_0)\cap[-1,1]} \xrightarrow[j\to\infty]{} \chi_{[-1,1]} \ \mathcal{J}\text{-prawie wszędzie},$$

czyli poza zbiorem z σ-ideału $\mathcal{J}$.

Określając dla dowolnego $A \in \mathcal{S}$

$$\Phi_{\mathcal{J}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{J}\text{-gęstości zbioru } A\}$$

zauważyłem, że $\Phi_{\mathcal{J}} : \mathcal{S} \to 2^X$ jest operatorem semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$. Definiując rodzinę

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi_{\mathcal{J}}(A)\},$$

postrzegamy, że $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ stanowi topologię wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ jest zamknięta ze względu na dowolne sumy. Obserwacja w Twierdzeniu 2.9 w pracy [27] pokazuje, że jeśli $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ stanowi topologię, to $\operatorname{card}(\mathcal{S}) = 2^{\mathfrak{c}}$. Zatem rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{J}_\omega}$ związana z parą $\langle \mathcal{B}, \mathcal{J}_\omega \rangle$, gdzie $\mathcal{J}_\omega$ jest σ-ideałem przeliczalnych podzbiorów $\mathbb{R}$, nie stanowi topologii.

Oczywiście zawsze rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{J}}$ związana z parą $\langle 2^{\mathbb{R}}, \mathcal{J}\rangle$ jest topologią dla dowolnego niezmienniczego σ-ideału $\mathcal{J} \subset 2^{\mathbb{R}}$. Zatem poczyniłem obserwację, że dla dowolnego niezmienniczego σ-ideału $\mathcal{J} \subset 2^{\mathbb{R}}$ istnieje najmniejsze σ-ciało $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ zawierające $\mathcal{B} \cup \mathcal{J}$ i takie, że para $\langle \mathcal{S}(\mathcal{J}), \mathcal{J}\rangle$ jest niezmiennicza oraz rodzina

$$\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \{A \in \mathcal{S}(\mathcal{J}) : A \subset \Phi_{\mathcal{J}}(A)\}$$

stanowi topologię zawierającą topologię naturalną. Takie podejście związane z najmniejszym σ-ciałem wychodzi naprzeciw reflesjom poszukiwania odpowiedniego σ-ciała zawartym we wspomnianej monografii *$\mathcal{I}$-density continuous functions* (Mem. Amer. Math. Soc 515, 1994) w paragrafie 1.5. Topologię otrzymaną powyżej nazwałem topologią $\mathcal{J}$-gęstości generowaną przez niezmienniczy σ-ideał $\mathcal{J}$.

Warto tu podkreślić fakt, że operator $\Phi_{\mathcal{J}}$ dla pary niezmienniczej $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$, gdzie $\mathcal{J} \subset \mathcal{S} \subset 2^{\mathbb{R}}$, nie musi być operatorem dolnej gęstości na przestrzeni mierzalnej $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Na przykład, jeśli $\mathcal{J} = \mathbb{K} \cap \mathbb{L}$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{B} \cap (\mathbb{L} \setminus \mathbb{K})$. Wówczas $\Phi_{\mathcal{J}}(A) = \emptyset$, więc $A \setminus \Phi_{\mathcal{J}}(A) \notin \mathbb{K} \cap \mathbb{L}$, czyli warunek 4° definicji operatora dolnej gęstości dla pary $\langle \mathcal{B} \triangle (\mathbb{K} \cap \mathbb{L}), \mathbb{K} \cap \mathbb{L}\rangle$ nie jest spełniony. Jednocześnie rodzina

$$\mathcal{T}_{\mathbb{K}\cap\mathbb{L}} = \{A \in \mathcal{B} \triangle (\mathbb{K} \cap \mathbb{L}) : A \subset \Phi_{\mathbb{K}\cap\mathbb{L}}(A)\} = \mathcal{T}_d \cap \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$$

stanowi topologię.

W pracy [27] przedstawiłem rezultaty dotyczące własności topologii $\mathcal{J}$-gęstości oraz σ-ciała $\mathcal{S}(\mathcal{J})$. Zauważyłem, że zawsze spełniony jest warunek, że $\mathcal{B} \triangle \mathcal{J} \subset \mathcal{S}(\mathcal{J}) \subset 2^{\mathbb{R}}$ i w pewnych przypadkach otrzymujemy, że $\mathcal{S}(\mathcal{J}) = \mathcal{B} \triangle \mathcal{J}$. Tak dzieje się w przypadku, gdy $\mathcal{J} = \mathbb{L}$ lub $\mathcal{J} = \mathbb{K}$, bądź $\mathcal{J} = \mathbb{K} \cap \mathbb{L}$. Ponadto zauważyłem, że wiele własności można opisać dla σ-ideałów niezmienniczych kontrolowanych przez miarę lub kategorię, to znaczy takich, że $\mathcal{J} \subset \mathbb{L}$ lub $\mathbb{L} \subset \mathcal{J}$ bądź $\mathcal{J} \subset \mathbb{K}$ lub $\mathbb{K} \subset \mathcal{J}$. W przypadku, gdy $\mathcal{J} \supset \mathbb{L}$ lub $\mathcal{J} \supset \mathbb{K}$ stwierdziłem, że $\mathcal{S}(\mathcal{J}) = \mathcal{B} \triangle \mathcal{J}$ oraz $\Phi_{\mathcal{J}}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathcal{J}), \mathcal{J}\rangle$. Ponadto $\mathcal{J} = \mathbb{K}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ oraz $\mathcal{J} = \mathbb{L}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{T}_{\mathcal{J}} = \mathcal{T}_d$.

Udowodniłem w rozprawie habilitacyjnej [23], że jeśli niezmienniczy σ-ideał $\mathcal{J}$ kontrolowany jest przez kategorię, to wówczas przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}}\rangle$ nie jest przestrzenią regularną. Natomiast, jeśli niezmienniczy σ-ideał $\mathcal{J}$ zawiera σ-ideał $\mathbb{L}$, to przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{J}} \rangle$ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{J} = \mathbb{L}$.

Wywnioskowałem, że w rodzinie σ-ciał niezmienniczych na $\mathbb{R}$ i zawierających σ-ciało $\mathcal{B}$ jedynym σ-ciałem $\mathcal{S}(\mathbb{L})$ takim, że operator $\Phi_{\mathbb{L}}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{L}), \mathbb{L} \rangle$ i topologia $\mathbb{L}$-gęstości pokrywa się z topologią $\mathcal{T}_d$ jest σ-ciało $\mathcal{L}$. Analogiczny rezultat otrzymałem dla kategorii. Wówczas takim jedynym σ-ciałem $\mathcal{S}(\mathbb{K})$, że operator $\Phi_{\mathbb{K}}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}(\mathbb{K}), \mathbb{K} \rangle$ i topologia $\mathbb{K}$-gęstości pokrywa się z topologią $\mathcal{I}$-gęstości jest σ-ciało $\mathcal{B}a$.

Biorąc pod uwagę rezultaty przedstawione w pracy [23] można zauważyć, że jeśli rozważymy niezmienniczy σ-ideał $\mathcal{J}_{\emptyset} = \{\emptyset\}$, to otrzymamy, że punkt x_0 jest punktem $\mathcal{J}_{\emptyset}$-gęstości zbioru $A \subset \mathbb{R}$, jeśli ciąg funkcji charakterystycznych $\{\chi_{n(A-x_0)\cap[-1,1]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny wszędzie do funkcji charakterystycznej $\chi_{[-1,1]}$ lub równoważnie, jeśli

$$[-1,1] \subset \liminf_{n\to\infty} n(A - x_0).$$

Punkt takiej gęstości nazywamy krótko punktem p-gęstości.

Kładąc

$$\Phi_p(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } p\text{-gęstości zbioru } A\}$$

dla dowolnego $A \subset \mathbb{R}$ uzyskujemy jednak, że rodzina

$$\mathcal{T}_{p\mathcal{S}} = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi_p(A)\},$$

gdzie $\mathcal{S}$ jest niezmienniczym σ-ciałem, nie musi być zamknięta ze względu na dowolne sumy, co pokazuje σ-ciało $\mathcal{S} = \mathcal{B}$. Z drugiej strony, gdy $\mathcal{S} = \mathcal{L}$, to na podstawie własności, $\Phi_p(A) \subset \Phi_d(A)$ dla dowolnego $A \in \mathcal{L}$, można wywnioskować, że rodzina

$$\mathcal{T}_{p\mathcal{L}} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_p(A)\}$$

stanowi topologię bogatszą niż topologia naturalna i uboższą niż topologia gęstości.

Ta topologia, nazywana topologią punktowej gęstości, była przedmiotem badań M. Górajskiej w pracy doktorskiej *Topologia punktowej gęstości* z 2011 r. przygotowanej pod moim kierunkiem. W pracy tej badany był także przypadek, gdy $\mathcal{S} = \mathcal{B}a$.

Analogicznie jak w przypadku miary, ze względu na własność, że dla dowolnego $A \in \mathcal{B}a$ mamy, że $\Phi_p(A) \subset \Phi_{\mathcal{I}}(A)$, wnioskujemy, że rodzina

$$\mathcal{T}_{p\mathcal{B}a} = \{A \in \mathcal{B}a : A \subset \Phi_p(A)\}$$

stanowi topologię. Jest to topologia bogatsza od topologii naturalnej i uboższa od topologii $\mathcal{I}$-gęstości. Interesujący jest wynik tej rozprawy, mówiący, że istnieje zbiór $A \in \mathcal{L}$, taki że $\Phi_p(A) \notin \mathcal{L}$ i istnieje zbiór $B \in \mathcal{B}a$, taki że $\Phi_p(B) \notin \mathcal{B}a$.

Oczywiście w przypadku σ-ideału $\mathcal{J}_\emptyset$, podobnie jak w ogólnym przypadku σ-ideału niezmienniczego, możemy mówić, że istnieje najmniejsze niezmiennicze σ-ciało $\widehat{\mathcal{S}}$ zawierające $\mathcal{B}$, takie że rodzina

$$\mathcal{T}_{p\widehat{\mathcal{S}}} = \{A \in \widehat{\mathcal{S}} : A \subset \Phi_p(A)\}$$

stanowi topologię. Oczywiście $\widehat{\mathcal{S}} \neq \mathcal{L}$ i $\widehat{\mathcal{S}} \neq \mathcal{B}a$, ponieważ dla σ-ciała niezmienniczego $\mathcal{S} = \mathcal{L} \cap \mathcal{B}a$ otrzymujemy, że

$$\mathcal{T}_{p\mathcal{S}} = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi_p(A)\} = \mathcal{T}_{p\mathcal{L}} \cap \mathcal{T}_{p\mathcal{B}a},$$

a więc $\mathcal{T}_{p\mathcal{S}}$ jest topologią. Postać najmniejszego σ-ciała $\widehat{\mathcal{S}}$ jest wciąż otwarta.

W pracy [43] zostało postawione pytanie, czy $\mathcal{T}_{p\mathcal{L}} \neq \mathcal{T}_{p\mathcal{B}a}$. W przygotowanej pracy, wspólnie z M. Filipczak i M. Górajską, została przedstawiona pozytywna odpowiedź na to pytanie. Praca ta również zawiera rezultat, że przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{p\mathcal{L}} \rangle$ nie jest regularna. W przypadku dowolnego σ-ciała niezmienniczego $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}a$ i $\mathcal{S} \supset \mathcal{B}$ oraz takiego, że operator Φ_p generuje topologię $\mathcal{T}_{p\mathcal{S}} = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi_p(A)\}$ otrzymany w pracy [43] rezultat, orzeka, że $\mathcal{B}a(\mathcal{T}_{p\mathcal{S}}) = \mathcal{B}a$ i $\mathbb{K}(\mathcal{T}_{p\mathcal{S}}) = \mathbb{K}$ oraz przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{p\mathcal{S}} \rangle$ nie jest regularna.

Użycie dwóch różnych σ-ciał $\mathcal{L}$ oraz $\mathcal{B}a$ do opisania punktowej topologii gęstości $\mathcal{T}_{p\mathcal{L}}$ oraz $\mathcal{T}_{p\mathcal{B}a}$ prowadzi do zwiększenia kolekcji różnic miedzy miarą i kategorią wyrażonych w języku punktów p-gęstości. Mianowicie, w pracy [54] pokazano, że jeżeli 0 jest punktem p-gęstości zbioru $A \in \mathcal{B}a$, to istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że $A \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ jest zbiorem rezydualnym w przedziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$, podczas gdy istnieje zbiór $B \in \mathcal{L}$ taki, że 0 jest punktem p-gęstości zbioru B i zbiór $B \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ nie jest pełnej miary na przedziale

$(-\varepsilon, \varepsilon)$ dla dowolnego $\varepsilon > 0$. Rezygnując z własności Baire'a lub mierzalności zbioru, otrzymujemy ciekawy rezultat zawarty w pracy [54], o istnieniu zbioru $E \notin \mathcal{L}$ takiego, że miara wewnętrzna Lebesgue'a zbioru E wynosi zero i $0 \in \Phi_p(E)$. W przypadku kategorii istnieje zbiór $E \notin \mathcal{B}a$ taki, że $0 \in \Phi_p(E)$ i zbiór $E \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$ nie jest zbiorem rezydualnym w dowolnym przedziale $(-\varepsilon, \varepsilon)$ dla $\varepsilon > 0$. Konstrukcje tych zbiorów angażują bazę Hamela oraz bazę Burstina.

Okazuje się, że koncepcję topologii $\mathcal{J}$-gęstości można również wprowadzić na płaszczyźnie względem σ-ideałów niezmienniczych ze względu na operację $\langle x, y\rangle \to \langle nx, ny\rangle$ dla $n \in \mathbb{N}$ i niezmienniczych ze względu na translację. W szczególności w pracy [15], jeszcze przed habilitacją, zbadane są tzw. σ-ideały produktowe miary i kategorii na płaszczyźnie.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ i $s, t \in \mathbb{R}$. Oznaczmy $\mathrm{pr}_1(\langle s, t\rangle) = s$, $\mathrm{pr}_2(\langle s, t\rangle) = t$ oraz $A \pm \langle s, t\rangle = \{\langle x \pm s, y \pm t\rangle : \langle x, y\rangle \in A\}$ i $\langle s, t\rangle A = \{\langle sx, ty\rangle : \langle x, y\rangle \in A\}$. Niech $[-1, 1]^2$ będzie kwadratem jednostkowym o środku w początku układu współrzędnych. Niech $\mathcal{S}$ będzie σ-ciałem na płaszczyźnie zawierającym zbiory borelowskie, a $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$ będzie właściwym σ-ideałem, przy czym $\mathcal{S}$ i $\mathcal{J}$ są niezmiennicze ze względu na operację $\langle x, y\rangle \to \langle nx, ny\rangle$ dla $n \in \mathbb{N}$ i translację.

Punkt $\langle 0, 0\rangle$ jest punktem $\mathcal{J}$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{S}$ jeśli ciąg $\{\chi_{\langle n,n\rangle A \cap [-1,1]^2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do funkcji $\chi_{[-1,1]^2}$ według σ-ideału $\mathcal{J}$, czyli dla dowolnego ciągu rosnącego ciągu $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ liczb naturalnych istnieje podciąg $\{n_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$\chi_{\langle n_{k_j}, n_{k_j}\rangle (A - x_0) \cap [-1,1]^2} \xrightarrow[j\to\infty]{} \chi_{[-1,1]^2} \ \mathcal{J}\text{-prawie wszędzie.}$$

Niech

$$\mathbb{K} \times \mathbb{L} = \left\{ E \subset \mathbb{R}^2 : \underset{B \in \mathcal{B}(\tau_{\mathbb{R}^2})}{\exists} \left(E \subset B \wedge \{x \in \mathbb{R} : B_x \notin \mathbb{L}\} \in \mathbb{K} \right) \right\},$$

gdzie $\tau_{\mathbb{R}^2}$ jest topologią naturalną w $\mathbb{R}^2$ oraz $B_x = \{y \in \mathbb{R} : \langle x, y\rangle \in B\}$. Analogicznie definiujemy rodzinę $\mathbb{L} \times \mathbb{K}$. Rodziny $\mathbb{K} \times \mathbb{L}$ i $\mathbb{L} \times \mathbb{K}$ są właściwymi, niezmienniczymi σ-ideałami na płaszczyźnie. Taka definicja jest zgodna z faktem, że gdy produkujemy rodziny $\mathbb{L} \times \mathbb{L}$ i $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$, to z twierdzenia Fubiniego i odpowiednio twierdzenia Kuratowskiego-Ulama otrzymujemy zbiory miary zero i odpowiednio zbiory I kategorii na płaszczyźnie. W przypadku σ-ideału $\mathbb{K} \times \mathbb{L}$ i odpowiedni $\mathbb{L} \times \mathbb{K}$ otrzymujemy, że

$\mathcal{S}(\mathbb{L}\times\mathbb{K}) = \mathcal{B}\ (\tau_{\mathbb{R}^2})\triangle(\mathbb{K}\times\mathbb{L})$ i $\mathcal{S}(\mathbb{K}\times\mathbb{L}) = \mathcal{B}(\tau_{\mathbb{R}^2})\triangle(\mathbb{L}\times\mathbb{K})$. Okazuje się, że operatory $\Phi_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}}$ i $\Phi_{\mathbb{L}\times\mathbb{K}}$ są operatorami dolnej gęstości na $\langle\mathbb{R}^2, \mathcal{S}(\mathbb{K}\times\mathbb{L}), \mathbb{K}\times\mathbb{L}\rangle$ i odpowiednio $\langle\mathbb{R}^2, \mathcal{S}(\mathbb{L}\times\mathbb{K}), \mathbb{L}\times\mathbb{K}\rangle$. Z Twierdzenia 2.3 w pracy M. Gavalec, *Iterated product of ideals of Borel sets* (Colloq. Math. 50 no. 1, 39–52, 1985) i Proposition 8 w pracy D. H. Fremlin, *Measure-additive covering of measurable selector* (Disertationes Math. 260, 1987) wynika, że pary $\langle\mathcal{S}(\mathbb{K}\times\mathbb{L}), \mathbb{K}\times\mathbb{L}\rangle$ i $\langle\mathcal{S}(\mathbb{L}\times\mathbb{K}), \mathbb{L}\times\mathbb{K}\rangle$ spełniają warunek c.c.c, a zatem posiadają własność mierzalnej otoczki. W konsekwencji rodziny:

$$\mathcal{T}_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}} = \{A \in \mathcal{S}(\mathbb{K}\times\mathbb{L}) : A \subset \Phi_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}}(A)\}$$

i

$$\mathcal{T}_{\mathbb{L}\times\mathbb{K}} = \{A \in \mathcal{S}(\mathbb{L}\times\mathbb{K}) : A \subset \Phi_{\mathbb{L}\times\mathbb{K}}(A)\}$$

są topologiami bogatszymi od topologii naturalnej, przy czym topologie te są nieporównywalne. Dotychczas nie jest rozstrzygnięty problem, czy przestrzenie $\langle\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathbb{K}\times\mathbb{L}}\rangle$ i $\langle\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{\mathbb{L}\times\mathbb{K}}\rangle$ są homeomorficzne.

2.3 O topologiach generowanych przez operatory

Moje badania nad topologiami gęstości w abstrakcyjnych przestrzeniach mierzalnych przebiegały w kierunku osłabienia warunków nakładanych na operator dolnej gęstości Φ na przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Zgodnie z uwagą we wstępie, operator dolnej gęstości Φ na przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$, przy założeniu własności mierzalnej otoczki dla pary $\langle\mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi(A)\}$. Nawet można wzmocnić to twierdzenie w ten sposób, że operator dolnej gęstości Φ na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy para $\langle\mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki (praca [45]). W przypadku operatora Φ prawie dolnej gęstości lub słabej prawie dolnej gęstości na przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ i własnością mierzalnej otoczki dla pary $\langle\mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$, analogicznie, jak w przypadku operatora dolnej gęstości, operator Φ też generują topologię

$$\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{S} : A \subset \Phi(A)\}.$$

Jednocześnie prosty przykład w pracy [45] ilustruje, że w przeciwieństwie do operatora dolnej gęstości, generowanie topologii przez operator prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ nie implikuje własności mierzalnej otoczki dla pary $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

W przypadku operatora semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ można wykazać (Twierdzenie 2 w pracy [35]), że dla przestrzeni mierzalnych $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ takich, że σ-ciało $\mathcal{S}$ nie pokrywa się z najmniejszym σ-ciałem generowanym przez rodzinę $\mathcal{J}$ i jest różne od 2^X oraz $\bigcup \mathcal{J} = X$, zawsze istnieje operator Φ semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ nie generujący topologii $\mathcal{T}_\Phi$.

Badania związane z operatorem semi dolnej gęstości były kontynuowane w pracy [42] nawiązującej w pewnym sensie do topologii generowanych przez σ-ideały niezmiennicze z Rozdziału 2.2. Jednakże w tym przypadku rozważamy sytuację ogólniejszą, bo w dowolnej przestrzeni topologicznej $\langle X, \tau \rangle$ z wyróżnionym właściwym σ-ideałem $\mathcal{J}$ wiążemy operator $\Phi_\mathcal{J} : 2^X \to 2^X$ semi dolnej gęstości na przestrzeni $\langle X, 2^X, \mathcal{J} \rangle$ oraz kojarzymy z nim najmniejsze σ-ciało $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ takie, że $\tau \subset \mathcal{S}(\mathcal{J})$ i $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}(\mathcal{J})$ oraz rodzina

$$\mathcal{T}_{\Phi_\mathcal{J}} = \{A \in \mathcal{S}(\mathcal{J}) : A \subset \Phi_\mathcal{J}(A)\}$$

stanowi topologię. W pracy [42] przedstawione są także pewne własności przestrzeni $\langle X, \mathcal{T}_{\Phi_\mathcal{J}} \rangle$ oraz postaci σ-ciała $\mathcal{S}(\mathcal{J})$ i zbiorów $\mathbb{K}(\mathcal{T}_{\Phi_\mathcal{J}})$ i $\mathcal{B}a(\mathcal{T}_{\Phi_\mathcal{J}})$ w przypadku σ-ideału kontrolowanego przez σ-ideał $\mathbb{K}(\tau)$.

Podobnie, dla dowolnej przestrzeni topologicznej $\langle X, \tau \rangle$ z wyróżnionym właściwym σ-ideałem $\mathcal{J}$, w pracy [44] podejmuję dyskusję nad własnością regularności przestrzeni topologicznej $\langle X, \mathcal{T}_\Phi \rangle$, gdzie $\mathcal{T}_\Phi$ jest topologią generowaną przez operator semi dolnej gęstości na przestrzeni $\langle X, \mathcal{B}a(\tau), \mathcal{J} \rangle$, gdy $\mathcal{J} \subset \mathbb{K}(\tau)$ lub na przestrzeni $\langle X, \mathcal{B}a(\tau) \triangle \mathcal{J}, \mathcal{J} \rangle$, gdy $\mathcal{J} \supset \mathbb{K}(\tau)$.

Warto przytoczyć rezultat wynikający z Twierdzenia 3.1 w pracy [57], że topologie generowane przez dowolne operatory semi dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$ lub na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$ nie są normalne. Nawiązuje to częściowo do problemu 1.5.5 w paragrafie 1.5 wspominanej już monografii *$\mathcal{I}$-density continuous functions* (Mem. Amer. Math. Soc 515, 1994).

W obszar badań nad topologiami generowanymi przez operatory wpisuje się praca [47], gdzie w przestrzeni topologicznej Baire'a $\langle X, \tau\rangle$ definiujemy operator $\Phi : \tau \to 2^X$ o własnościach:

i) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(X) = X$,

ii) $\underset{A\in\tau}{\forall}\ \underset{B\in\tau}{\forall}\ \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$,

iii) $\underset{A\in\tau}{\forall}\ A \subset \Phi(A)$.

Wiadomo, że w przestrzeni topologicznej Baire'a $\langle X, \tau\rangle$ każdy zbiór $A \in \mathcal{B}a(\tau)$ posiada jednoznaczne przedstawienie $A = G(A)\triangle B$, gdzie $G(A)$ jest zbiorem τ-regularnie otwartym i $B \in \mathbb{K}(\tau)$. W związku z tym przedstawieniem, można określić operator $\Phi_r : \mathcal{B}a(\tau) \to \mathcal{B}a(\tau)$ wzorem

$$\Phi_r(A) = \Phi(G(A))$$

dla dowolnego $A \in \mathcal{B}a(\tau)$. Tak zdefiniowany operator Φ_r jest operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{B}a(\tau), \mathbb{K}(\tau)\rangle$. Zatem

$$\mathcal{T}_{\Phi_r} = \mathcal{B}a(\tau) : A \subset \Phi_r(A)\}$$

stanowi topologię zawierającą τ. Warto dodać, że w przypadku gdy Φ jest operatorem stałym, to $\mathcal{T}_{\Phi_r} = \tau \ominus \mathbb{K}(\tau)$. W pracy [47] zbadano pewne własności przestrzeni topologicznej $\langle X, \mathcal{T}_{\Phi_r}\rangle$, funkcji ciągłych w przestrzeni $\langle X, \mathcal{T}_{\Phi_r}\rangle$ oraz funkcji obcięciowo-ciągłych zwanych $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywnie ciągłymi. Mianowicie powiemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywnie ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli istnieje zbiór $A \in \mathcal{B}a(\tau)$ taki, że $x_0 \in \Phi_r(A)$ i funkcja obcięciowa $f_{|(A\cup\{x_0\})}$ jest ciągła w x_0 w zwykłym sensie. Pokazałem, że $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-ciągłość i $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywna ciałość nie muszą być równoważne.

Z każdym operatorem $\Phi : \tau \to 2^X$ o własnościach i)–iii) można związać topologie $\mathcal{T}_{\Phi_{r'}}$ i $\mathcal{T}_{\Phi_{r''}}$, gdzie

$$\mathcal{T}_{\Phi_{r'}} = \{A \subset X : A = W \cup B, W \in \tau, B \subset \Phi(W)\}$$

oraz

$$\mathcal{T}_{\Phi_{r''}} = \{A \subset X : A = W \cup B, W \in \tau, B \subset \Phi(G(W))\}.$$

Wówczas $\mathcal{T}_{\Phi_{r'}} \subset \mathcal{T}_{\Phi_{r''}} \subset \mathcal{T}_{\Phi_r}$, przy czym inkluzje te są właściwe, oraz

$$\mathcal{T}_{\Phi_{r'}} \ominus \mathbb{K}(\tau) = \mathcal{T}_{\Phi_{r''}} \ominus \mathbb{K}(\tau) = \mathcal{T}_{\Phi_r},$$

a zatem zachodzi równość klas funkcji ciągłych

$$\mathcal{C}(\langle X, \mathcal{T}_{\Phi_{r'}}\rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle) = \mathcal{C}(\langle X, \mathcal{T}_{\Phi_{r''}}\rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle) = \mathcal{C}(\langle X, \mathcal{T}_{\Phi_r}\rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle).$$

Praca [41] zawiera pewne własności topologii generowanych przez operator prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$. W pracy tej pokazano między innymi, że operator Φ semi dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest operatorem słabej prawie dolnej gęstości, czyli

$$\underset{A \in \mathcal{L}}{\forall} (A \subset \Phi(A) \Rightarrow \Phi(A) \setminus A \in \mathbb{L}).$$

W pracy tej przedstawiona jest także uwaga, że w przypadku, gdy $\Phi : \mathcal{L} \to 2^{\mathbb{R}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$, to zawsze istnieje rodzina $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ taka, że $\mathbb{L} \subset \mathcal{R}$, $\mathbb{R} \in \mathcal{R}$ i $\mathcal{R}$ jest zamknięta ze względu na skończone iloczyny oraz operator $\Phi' : \mathcal{R} \to \mathcal{L}$ taki, że Φ' jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathbb{L}\rangle$ oraz

$$\mathcal{T}_{\Phi'} = \{A \in \mathcal{R} : A \subset \Phi'(A)\}$$

stanowi topologię taką, że $\mathcal{T}_\Phi = \mathcal{T}_{\Phi'}$.

W przypadku dowolnej przestrzeni topologicznej $\langle X, \tau\rangle$, jeśli Φ jest operatorem prawie dolnej gęstości na przestrzeni $\langle X, \mathcal{B}a(\tau), \mathbb{K}(\tau)\rangle$, gdzie $X \notin \mathbb{K}(\tau)$, to oczywiście Φ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$, przy czym zakładając, że $\tau \subset \mathcal{T}_\Phi$ otrzymujemy, że taki operator Φ jest zawsze operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{B}a(\tau), \mathbb{K}(\tau)\rangle$.

2.4 Abstrakcyjna topologia gęstości

Niech $\langle X, \tau\rangle$ będzie przestrzenią topologiczną oraz $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Mówimy, że topologia τ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$, jeśli istnieje operator Φ dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ taki, że topologia $\mathcal{T}_\Phi$ generowana przez Φ pokrywa się z τ.

Monografia J. Lukeš, J. Malý, L. Zajíček *Fine topology methods* (Real Analysis and Potential Theory, Lecture Notes in Math. 1189, Springer-Verlag, Berlin, 1986) zawiera kilka warunków charakteryzujących abstrakcyjne topologie gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$. Jeden z nich stanowi, że τ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

a) $A \in \mathcal{J}$ wtedy i tylko wtedy gdy, A jest τ-nigdzie gęsty i τ-domknięty,

b) $\mathcal{S} = \mathcal{B}a(\tau)$.

Oczywiście topologia $\mathcal{T}_\Phi$ generowana przez operator Φ dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$.

Rozważania dotyczące generowania topologii przez różne operatory typu gęstości można związać również, jak zilustrowano w pracy [40], z przestrzenią $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, gdzie $\mathcal{A}$ jest ciałem i $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ jest właściwym ideałem.

Niech Φ będzie operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$. Standardowo otrzymujemy, że jeśli para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki, to rodzina

$$\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{A} : A \subset \Phi(A)\}$$

stanowi topologię, przy czym $\mathcal{N}(\mathcal{T}_\Phi) = \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{A} = \mathcal{T}_\Phi \triangle \mathcal{N}(\mathcal{T}_\Phi)$. Zachodzi nawet twierdzenie odwrotne, bo wówczas para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle = \langle \mathcal{T}_\Phi \triangle \mathcal{N}(\mathcal{T}_\Phi), \mathcal{N}(\mathcal{T}_\Phi) \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki.

Analogicznie operator prawie dolnej gęstości i słabej prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ generują topologię przy założeniu, że para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki.

Niech $\langle X, \tau, \rangle$ będzie przestrzenią topologiczną. Mówimy, że τ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, jeśli istnieje operator Φ dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ taki, że topologia $\mathcal{T}_\Phi$ generowana przez operator Φ pokrywa się z τ. Praca [37] zawiera rezultat, że topologia τ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki:

a) $A \in \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy gdy, A jest τ-nigdzie gęsty i τ-domknięty,

b) $\mathcal{A} = \tau \triangle \mathcal{N}(\tau)$.

Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ zawiera zbiory jednoelementowe, to operator dolnej gęstości konstruowany w dowodzie warunku dostatecznego powyższej własności ma postać:

$$\underset{A\in\mathcal{A}}{\forall}\ \Phi(A) = \mathrm{int}_\tau\{x \in X : x \in \mathrm{int}_\tau(A \cup \{x\})\}.$$

Praca [37] zawiera także wynik, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej $\langle X, \tau\rangle$ następujące warunki są równoważne:

(a) każdy zbiór τ-nigdzie gęsty jest τ-domknięty,

(b) istnieje dokładnie jedna para $\langle \mathcal{A}, \mathcal{I}\rangle$ taka, że τ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I}\rangle$.

Praca [40] zawiera natomiast rezultat, że jeśli operator $\Phi : \mathcal{A} \to 2^X$ jest operatorem semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I}\rangle$ oraz Φ generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$, to $\mathcal{N}(\mathcal{T}_\Phi) = \mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciało $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ takie, że $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}'$ i $\mathcal{T}_\Phi$ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{A}', \mathcal{I}\rangle$. Kolejny rezultat w pracy [40] stanowi, że jeśli $\Phi : \mathcal{A} \to 2^X$ jest operatorem semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I}\rangle$ generującym topologię $\mathcal{T}_\Phi$, to $\mathcal{T}_\Phi$ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I}\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{N}(\mathcal{T}_\Phi) = \mathcal{I}$ oraz $\mathcal{A} = \mathcal{T}_\Phi \triangle \mathcal{I}$. Oprócz tego praca [40] zawiera obserwację, że jeśli $\Phi : \mathcal{S} \to 2^X$ jest operatorem prawie dolnej gęstości, to istnieje podrodzina $\mathcal{R}$ taka, że $\mathcal{I} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{S}$, $X \in \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ jest zamknięta ze względu na skończone iloczyny i istnieje operator $\Phi' : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$, który jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{R}, \mathcal{I}\rangle$ takim, że

$$\mathcal{T}_{\Phi'} = \{A \in \mathcal{R} : A \subset \Phi'(A)\} = \mathcal{T}_\Phi.$$

W obszarze badań nad abstrakcyjnymi topologiami gęstości można zaobserwować też pewne różnice między miarą i kategorią. W przestrzeni topologicznej Baire'a $\langle X, \tau\rangle$, co zaobserwoawano w pracy [47], istnieje operator Φ dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{B}a(\tau), \mathbb{K}(\tau)\rangle$ generujący topologię $\mathcal{T}_\Phi$ taką, że $\mathcal{T}_\Phi = \tau \ominus \mathbb{K}(\tau)$.

Stąd wniosek, że topologia typu Hashimoto $\tau_{nat} \ominus \mathbb{K}(\tau)$ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle R, \mathcal{B}a, \mathbb{K}\rangle$. Dualna topologia Hashimoto $\tau_{nat} \ominus \mathbb{L}$ już tej własności nie posiada. Mianowicie, praca [57] orzeka, że nie istnieje przestrzeń mierzalna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ taka, że topologia $\tau_{nat} \ominus \mathbb{L}$ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$. Okazuje się jednak, że topologia $\tau_{nat} \ominus \mathbb{L}$ jest prawie abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$, to znaczy istnieje operator Φ prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$, który generuje topologię $\mathcal{T}_\Phi$ identyczną z $\tau_{nat} \ominus \mathbb{L}$.

2.5 Topologia $\langle s\rangle$-gęstości oraz f-gęstości

Definicja punktu gęstości dla zbioru $A \in \mathcal{L}$, w którym interweniował ciąg $\{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ była inspiracją w pracy [30] do sformułowania definicji gęstości względem niemalejącego i nieograniczonego ciągu liczb dodatnich $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Rodzinę takich ciągów oznaczać będziemy przez $\mathbb{S}$, a ciąg $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ przez $\langle s\rangle$.

Niech $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$. Powiemy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\langle s\rangle$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap [x_0 - \frac{1}{s_n}, x_0 + \frac{1}{s_n}])}{\frac{2}{s_n}} = 1.$$

Niech

$$\Phi_{\langle s\rangle}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \langle s\rangle\text{-gęstości zbioru } A\}.$$

Wówczas dla każdego $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$ operator $\Phi_{\langle s\rangle} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$ i w konsekwencji rodzina

$$\mathcal{T}_{\langle s\rangle} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\langle s\rangle}(A)\}$$

stanowi topologię, zwaną topologią $\langle s\rangle$-gęstości. Topologia ta jest nie uboższa niż topologia gęstości. Uzyskany w pracy [30] interesujący rezultat stanowi, że

$$\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\langle s\rangle} \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n+1}} > 0.$$

Okazało się, że szczególną rolę w badaniach dotyczących topologii $\langle s\rangle$-gęstości odgrywa zbiór

$$\mathbb{S}_0 = \left\{\langle s\rangle \in \mathbb{S} : \liminf_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n+1}} = 0\right\}.$$

Jeśli $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$, to topologia $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ jest istotnym rozszerzeniem topologii $\mathcal{T}_d$. Pomimo, że dla dowolnego ciągu $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$ i $m \in \mathbb{R}$ takiego, że $|m| \geqslant 1$ zbiory $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$-otwarte są niezmiennicze ze względu na operację $x \mapsto mx+b$ dla $b \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$ i $m \in \mathbb{R}$ takiego, że $|m| < 1$ istnieje zbiór $A \in \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ taki, że $mA \notin \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$. Ponadto, jeśli $\mathbb{T} = \{\mathcal{T}_{\langle s\rangle} : \langle s\rangle \in \mathbb{S}\}$, to $\operatorname{card}(\mathbb{T}) = \mathfrak{c}$. Co więcej

$$\bigcap_{\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0} \mathcal{T}_{\langle s\rangle} = \mathcal{T}_d.$$

Jednocześnie okazuje się, że rodzina $\bigcup_{\langle s\rangle \in \mathbb{S}} \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ nie stanowi topologii, a najmniejszą topologią zawierającą $\bigcup_{\langle s\rangle \in \mathbb{S}} \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ jest $2^{\mathbb{R}}$.

Praca [30] zawiera również rezultat związany z porównywaniem topologii $\langle s\rangle$-gęstości. Jeśli

$$\langle s\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}_0 \text{ i } \lim_{n\to\infty} \tfrac{s_n}{t_n} = \alpha \in (0,\infty),$$

to wówczas

$$\mathcal{T}_{\langle s\rangle} = \mathcal{T}_{\langle t\rangle} \text{ wtedy i tylko wtedy gdy } \alpha = 1.$$

Dalsze własności dotyczące porównywania topologii $\langle s\rangle$-gęstości były badane w pracy [31]. Praca ta zawiera rezultat, że dla dowolnego ciągu $\langle t\rangle \in \mathbb{S}_0$ istnieje ciąg $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$ taki, że topologia $\mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ jest istotnie bogatsza niż topologia $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ oraz, że dla dowolnego ciągu $\langle t\rangle \in \mathbb{S}$ istnieje ciąg $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$ taki, że topologia $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ jest bogatsza niż topologia $\mathcal{T}_{\langle t\rangle}$.

Warto jednak dodać, że topologie generowane przez ciągi z rodziny $\mathbb{S}_0$ mogą być nieporównywalne. Istnieją bowiem $\langle s\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}_0$ takie, że $\mathcal{T}_{\langle t\rangle} \setminus \mathcal{T}_{\langle s\rangle} \neq \emptyset$ i $\mathcal{T}_{\langle s\rangle} \setminus \mathcal{T}_{\langle t\rangle} \neq \emptyset$. Kryteria porównywania topologii $\langle s\rangle$-gęstości zostały opisane przez pewne własności ciągów z rodziny $\mathbb{S}$. Mianowicie, jeśli dla ustalonych ciągów $\langle s\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}$ określimy ciąg $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wygenerowany z warunku, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedna liczba naturalna k_n taka,ze $t_n \in (s_{k_n}, s_{k_n+1}]$, to wówczas

$$\mathcal{T}_{\langle s\rangle} \subset \mathcal{T}_{\langle t\rangle}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\liminf_{i\to\infty} \frac{t_{n_i}}{s_{k_{n_i}}} < \infty \text{ lub } \liminf_{i\to\infty} \frac{s_{k_{n_i}+1}}{t_{n_i}} = 1.$$

Równość topologii $\mathcal{T}_{\langle s\rangle} = \mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ dla $\langle s\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}$ można osiągnąć przez porównywanie klas funkcji ciągłych $\mathcal{C}(\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle, \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle)$ i $\mathcal{C}(\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle, \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle)$. Mamy bowiem, że $\mathcal{T}_{\langle s\rangle} = \mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\mathcal{C}(\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle, \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle) = \mathcal{C}(\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle, \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle),$$

co jest konsekwencją faktu, że przestrzeń topologiczna $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ jest całkowicie regularna dla $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$. Ten wynik i szereg innych własności topologii $\langle s\rangle$-gęstości i funkcji ciągłych względem tych topologii zawiera, przygotowana pod moim kierunkiem, praca doktorska A. Loranty *O topologiach gęstości indukowanych przez niemalejące i nieograniczone ciągi liczb dodatnich* z roku 2005.

W nurcie rozważań nad topologiami $\langle s\rangle$-gęstości pozostaje praca [32]. Głównym jej celem jest badanie homeomorfizmów przestrzeni topologicznych $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ dla $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$. Uzyskany wynik stanowi, że jeśli ciągi $\langle s\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}_0$ oraz topologie $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ i $\mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ są nieporównywalne, to przestrzenie $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ i $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle$ nie są homeomorficzne. Założenie o nieporównywalności topologii $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ i $\mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ jest istotne dla tezy, bowiem dla dowolnego $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$ istnieje ciąg $\langle t\rangle \in \mathbb{S}_0$ taki, że $\mathcal{T}_{\langle t\rangle} \subsetneq \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ i przestrzenie $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ i $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle$ są homeomorficzne. Podobnie, dla każdego $\langle t\rangle \in \mathbb{S}_0$ istnieje ciąg $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$ taki, że $\mathcal{T}_{\langle t\rangle} \subsetneq \mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ i przestrzenie $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ i $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle$ są homeomorficzne. Jednocześnie prawdziwym pozostaje rezultat, że dla dowolnego $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$ przestrzenie $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ i $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_d\rangle$ nie są homeomorficzne, co uzasadnia badanie topologii $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$ dla ciągu $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$. Udowodnienie powyższych faktów wymagało uzyskania pewnych dodatkowych własności. Między innymi, pokazanie, że funkcje $\langle s\rangle$-aproksymatywnie ciągłe posiadają własność Darboux, przy czym $\langle s\rangle$-aproksymatywną ciągłość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ rozumiemy, jako ciągłość funkcji $f_{|A\cup\{x_0\}}$ w zwykłym sensie dla pewnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ takiego, że $x_0 \in \Phi_{\langle s\rangle}(A)$. Ponadto należało wykazać, że zbiory $\mathcal{T}_{\langle s\rangle}$-spójne pokrywają się ze zbiorami τ_{nat}-spójnymi.

Praca [33] zawiera dalsze rezultaty dotyczące mocy rodziny topologii $\langle s\rangle$-gęstości homeomorficznych i niehomeomorficznych. Dla dowolnego ciągu $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$ istnieje zbiór $\mathbb{S}_1 \subset \mathbb{S}$ mocy continuum taki, że dla dowolnych różnych ciągów $\langle u\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}_1$ otrzymujemy różne topologie $\mathcal{T}_{\langle u\rangle}$ i $\mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ oraz dla dowolnego $\langle t\rangle \in \mathbb{S}_1$ przestrzenie $\langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$

i $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle$ są homeomorficzne. Z drugiej strony dowolnego ciągu $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$ istnieje $\mathbb{S}_2 \subset \mathbb{S}$ mocy continuum taki, że dla dowolnych różnych ciągów $\langle u\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}_2$ otrzymujemy różne topologie $\mathcal{T}_{\langle u\rangle}$ i $\mathcal{T}_{\langle t\rangle}$ oraz dla dowolnego $\langle t\rangle \in \mathbb{S}_2$ przestrzenie $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s\rangle}\rangle$ i $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle$ nie są homeomorficzne. Ponadto znajdujemy zbiór $\mathbb{S}_3 \subset \mathbb{S}$ mocy continuum taki, że dla dowolnych różnych ciągów $\langle u\rangle, \langle t\rangle \in \mathbb{S}_3$ przestrzenie $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle u\rangle}\rangle$ i $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle t\rangle}\rangle$ nie są homeomorficzne.

Kategoryjny analogon topologii $\langle s\rangle$-gęstości zawiera praca [29]. Jeśli $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$, to dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{B}a$ punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{I}_{\langle s\rangle}$-gęstości zbioru A, jeśli ciąg funkcji charakterystycznych $\{\chi_{s_n(A-x_0)\cap[-1,1]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do funkcji $\chi_{[-1,1]}$ według σ-ideału $\mathbb{K}$. Określając

$$\Phi_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{I}_{\langle s\rangle}\text{-gęstości zbioru } A\}$$

otrzymujemy, że operator $\Phi_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}} : \mathcal{B}a \to \mathcal{B}a$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K}\rangle$. W konsekwencji rodzina

$$\mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}} = \{A \in \mathcal{B}a : A \subset \Phi_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}}(A)\}$$

stanowi topologię na $\mathbb{R}$ bogatszą od topologii τ_{nat}. Ponadto dla dowolnego ciągu $\langle s\rangle \in \mathbb{S}$ otrzymujemy, że $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}}$, natomiast $\mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}} = \mathcal{T}_{\mathcal{I}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{s_n}{s_{n+1}} > 0$. Podobnie jak dla topologii $\langle s\rangle$-gęstości względem miary otrzymujemy, że

$$\bigcap_{\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0} \mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}} = \mathcal{T}_{\mathcal{I}}.$$

Topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}}$ jest niezmiennicza ze względu na translację i jednokładność o współczynniku $m \in \mathbb{R}$ takim, że $|m| \geqslant 1$. Natomiast dla $\langle s\rangle \in \mathbb{S}_0$ i $m \in \mathbb{R}$ takiego, że $|m| < 1$ istnieje zbiór $A \in \mathcal{B}a$ taki, że $A \in \mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}}$ oraz $mA \notin \mathcal{T}_{\mathcal{I}_{\langle s\rangle}}$.

W pracy [34] wprowadziłem pojęcie punktu gęstości względem funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takiej, że $\limsup\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$ mówiąc, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem f-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeśli

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda(A' \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{f(2h)} = 0,$$

nazywając go punktem symetrycznej f-gęstości. Jeśli

$$\Phi^s_{\langle f\rangle}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem symetrycznej } f\text{-gęstości zbioru } A\},$$

dla $A \in \mathcal{L}$, to $\Phi^s_{\langle f \rangle} : \mathcal{L} \to 2^{\mathbb{R}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$. W rezultacie rodzina

$$\mathcal{T}^s_{\langle f \rangle} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi^s_{\langle f \rangle}(A)\}$$

stanowi topologię bogatszą od topologii naturalnej τ_{nat}. Stanowi ona uogólnienie topologii gęstość $\mathcal{T}_d$. Symetryczna f-gęstość, badana dalej w pracy [36], wiąże się z wprowadzoną wcześniej przez M. Filipczak i T. Filipczak f-gęstością. W pracy *A generalization of the density topology* (M. Filipczak, T. Filipczak, *A generalization of the density topology*, Tatra Mt. Math. Publ. 34, 37–45, 2006) wprowadzono pojęcie punktu f-gęstości dla funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, która jest niemalejąca i $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ oraz $\limsup\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$. Wówczas punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem f-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeśli

$$\lim_{\substack{h \to 0, k \to 0 \\ h \geqslant 0, k \geqslant 0 \\ h+k>0}} \frac{\lambda(A' \cap [x_0 - h, x_0 + k])}{f(h+k)} = 0.$$

W ślad za tą gęstością Autorzy uzyskali topologię f-gęstości

$$\mathcal{T}_{\langle f \rangle} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\langle f \rangle}(A)\},$$

gdzie $\Phi_{\langle f \rangle}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } f\text{-gęstości zbioru } A\}$.

W pracy [36] udowodniłem, że jeśli $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, to rodzina $\mathcal{T}_{\langle f \rangle}$ jest topologią wtedy i tylko wtedy gdy $\limsup\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$. Analogiczna własność zachodzi dla symetrycznej gęstości. Okazuje się również, że symetrycznej f-gęstości nie można scharakteryzować przez f-gęstość jednostronną. Istnieje bowiem zbiór $A \in \mathcal{L}$ i funkcja $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że $\limsup\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$ oraz 0 jest punktem symetrycznej f-gęstości zbioru A, przy czym

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda(A' \cap [0, h])}{f(h)} > 0.$$

Ponieważ $\Phi_{\langle f \rangle}(A) \subset \Phi^s_{\langle f \rangle}(A)$ dla $A \in \mathcal{L}$, więc $\mathcal{T}_{\langle f \rangle} \subset \mathcal{T}^s_{\langle f \rangle}$. Przykład w pracy [36] pokazuje, że ta inkluzja jest właściwa. Natomiast dla funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ i takiej, że $\limsup\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$ otrzymujemy, że $\mathcal{T}_{\langle f \rangle} = \mathcal{T}^s_{\langle f \rangle}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_{\langle f \rangle} = \Phi^s_{\langle f \rangle}$.

Jeśli

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : 0 < \limsup_{x \to 0^+} \frac{x}{f(x)} < \infty \right\},$$

to wówczas dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{A}_1$ operator $\Phi^s_{\langle f \rangle}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$. Ponadto dla funkcji $f \in \mathcal{A}_1$ takiej, że $\liminf_{x\to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$ otrzymujemy, że $\Phi^s_{\langle f \rangle} = \Phi_d$ i w konsekwencji $\mathcal{T}^s_{\langle f \rangle} = \mathcal{T}_d$.

Badając niezmienniczość topologii $\mathcal{T}^s_{\langle f \rangle}$ ze względu na translację i jednokładność pokazałem rezultat w pracy [36], że dla funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takiej, że $\limsup_{x\to 0^+} \frac{x}{f(x)} > 0$, topologia $\mathcal{T}^s_{\langle f \rangle}$ jest niezmiennicza ze względu na translację i jednokładność o współczynniku $\alpha \geqslant 1$. Jednocześnie pokazałem, że dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ istnieje funkcja f o powyższych własnościach taka, że topologia $\mathcal{T}^s_{\langle f \rangle}$ nie jest niezmiennicza ze względu na jednokładność o współczynniku α.

2.6 O topologiach gęstości związanych z rozszerzeniem miary Lebesgue'a

Badania nad topologiami gęstości związanymi z rozszerzeniem miary Lebesgue'a zapoczątkowałem w mojej rozprawie habilitacyjnej. Do badań tych zostałem zainspirowany przez Prof. A. B. Kharazishvili z Uniwersytetu w Tbilisi podczas krótkiego stażu na tym Uniwersytecie w 1992 roku. Później, współpracowałem z Prof. A. B. Kharazishvili podczas jego pobytu w Instytucie Matematyki UŁ w okresie 1995–1997. Wyniki badań przedstawione są w pracach [19], [20] oraz [21].

Jeśli μ jest rozszerzeniem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, to symbolem $\mathcal{S}_\mu$ oraz $\mathcal{I}_\mu$ będę zawsze oznaczał σ-ciało zbiorów μ-mierzalnych oraz odpowiednio σ-ideał zbiorów μ-miary zero. Zatem $\mathcal{S}_\mu = \operatorname{dom}\mu$ oraz $\mathcal{I}_\mu = \{A \in \mathcal{S}_\mu : \mu(A) = 0\}$.

Jeśli μ jest rozszerzeniem miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, to dla dowolnego $A \in \mathcal{S}_\mu$ można określić pojęcie punktu μ-gęstości tego zbioru. Mianowicie, powiemy, że $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem μ-gęstości zbioru $A \in \mathcal{S}_\mu$, jeśli

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu(A \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h} = 1.$$

Jeśli dla dowolnego $A \in \mathcal{S}_\mu$ położymy

$$\Phi_\mu(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mu\text{-gęstości zbioru } A\},$$

to bezpośrednio z definicji otrzymujemy, że Φ_μ jest operatorem semi dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$.

Niech

$$\mathcal{T}_\mu = \{A \in \mathcal{S}_\mu : A \subset \Phi_\mu(A)\}.$$

Stosując metodę zawartą w pracy A. B. Kharazishvili *Invariant extension of the Lebesgue measure* (Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1983), z użyciem twierdzenia Vitaliego o pokryciu, przedstawiłem w pracy [21] dowód, że $\mathcal{T}_\mu$ jest topologią zawierającą $\mathcal{T}_d$. Z tego dowodu można wywnioskować także, że

$$\mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_d \ominus \mathcal{I}_\mu.$$

Powyższa własność była dla mnie zaskoczeniem. Oznacza ona bowiem, że w utworzeniu topologii $\mathcal{T}_\mu$ najistotniejszą rolę z dziedziny rozszerzenia miary μ odgrywają zbiory z σ-ideału $\mathcal{I}_\mu$. Ponadto, jeśli $A \in \mathcal{S}_\mu$ i $A \subset \Phi_\mu(A)$, to $A \in \mathcal{T}_\mu$, więc $A = B \setminus C$, gdzie $B \in \mathcal{T}_d$ i $C \in \mathcal{I}_\mu$. Stąd wnioskujemy, że

$$\Phi_\mu(A) \setminus A = \Phi_\mu(B \setminus C) \setminus (B \setminus C) = \Phi_d(B) \setminus (B \setminus C) \in \mathcal{I}_\mu.$$

Zatem Φ_μ jest operatorem słabej prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$, co zaobserwowałem zajmując się w późniejszych badaniach różnymi operatorami gęstości, ale nie rozstrzygnąłem, czy Φ_μ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$.

Praca [21] zawiera pewne własności topologii $\mathcal{T}_\mu$. Pokazałem w tej pracy między innymi, że

$$\mathcal{B}a(\mathcal{T}_\mu) = \mathcal{B}(\mathcal{T}_\mu) = \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu.$$

Ponadto wykazałem, że topologia $\mathcal{T}_\mu$ jest topologią von-Neumanna odpowiadającą mierze μ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathcal{S}_\mu = \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu.$$

Podobnie Φ_μ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu$. W przypadku funkcji ciągłych wykazałem, że

$$\mathcal{C}(\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\mu \rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat} \rangle) = \mathcal{C}(\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_d \rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat} \rangle).$$

Praca [25] zawiera dalsze własności przestrzeni topologicznej $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\mu \rangle$. Pokazałem w niej, między innymi, że przestrzeń ta jest spójna, nie jest ośrodkowa i nie posiada własności Lindelöfa. Oczywiście $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\mu \rangle$ jest przestrzenią Hausdorffa dla każdego rozszerzenia miary Lebesgue'a. Pokazałem natomiast, że jest to przestrzeń regularna (całkowicie regularna) wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\mu$. Ponadto przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\mu \rangle$ przy założeniu C. H. (hipotezy continuum) nie jest przestrzenią Blumberga.

Kolejne moje badania dotyczące topologii $\mathcal{T}_\mu$ były związane z własnością Łuzina-Mieńszowa. Niech τ_1 i τ_2 będą topologiami na X i $\tau_1 \subset \tau_2$. Mówimy, że topologia τ_2 ma własność Łuzina-Mieńszowa względem topologii τ_1, jeśli dla każdej pary zbiorów rozłącznych $F_{\tau_1}, F_{\tau_2} \subset X$ takich, że F_{τ_1} jest τ_1-domknięty i F_{τ_2} jest τ_2-domknięty, istnieją zbiory $G_{\tau_1}, G_{\tau_2} \subset X$ takie, że G_{τ_1} jest τ_1-otwarty i G_{τ_2} jest τ_2-otwarty oraz $F_{\tau_1} \subset G_{\tau_1}$ i $F_{\tau_2} \subset G_{\tau_2}$. Udowodniłem, że topologia $\mathcal{T}_\mu$ nie posiada własności Łuzina-Mieńszowa względem topologii $\mathcal{T}_d$. Pokazałem również, że topologia $\mathcal{T}_\mu$ posiada własność Łuzina-Mieńszowa względem topologii naturalnej wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{T}_\mu = \mathcal{T}_d$.

W nurcie mojej rozprawy habilitacyjnej znajduje się twierdzenie orzekające, że istnieje niezmiennicza para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$, taka,że jeśli $1 \leqslant k \leqslant \omega_0$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{J}$ taki, że $\operatorname{card}(\Phi_{\mathcal{J}}(A)) = k$. Tak sformułowane twierdzenie jest rezultatem pracy [20]. W pracy tej skonstruowaliśmy rozszerzenie μ miary Lebesgue'a takie, że σ-ciało $\mathcal{S}_\mu$ i σ-ideał $\mathcal{I}_\mu$ są niezmiennicze ze względu na operacje liniowe $qx + b$, gdzie $q \in \mathbb{Q}$ i $b \in \mathbb{R}$ oraz dla dowolnej $1 \leqslant k \leqslant \omega$ istnieje zbiór $A \in \mathcal{S}_\mu \setminus \mathcal{I}_\mu$, taki że $\operatorname{card}(\Phi_\mu(A)) = k$. Ten rezultat jednocześnie ilustruje, że operator Φ_μ nie jest operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$, co w rezultacie oznacza, że

$$\mathcal{S}_\mu \neq \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu.$$

W pracy [28] rozważamy na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$ operator semi dolnej gęstości $\Phi^* : \mathcal{S}_\mu \to \mathcal{L}$ którego majorantą jest operator Φ_μ, a więc

$$\underset{A \in \mathcal{S}_\mu}{\forall} \ \Phi^*(A) \subset \Phi_\mu(A),$$

gdzie

$$\Phi_\mu(A) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \lim_{h \to 0} \frac{\mu(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1 \right\}$$

dla każdego $A \in \mathcal{S}_\mu$. W gruncie rzeczy operator Φ^* jest operatorem słabej prawie dolnej gęstości, bo dla $A \in \mathcal{S}_\mu$, jeśli $A \subset \Phi^*(A)$, to $A \subset \Phi_\mu(A)$, więc $\Phi_\mu(A) \setminus A \in \mathcal{I}_\mu$ i w konsekwencji

$$\Phi^*(A) \setminus A \subset \Phi_\mu(A) \setminus A \in \mathcal{I}_\mu.$$

Tak więc rodzina

$$\mathcal{T}_{\Phi^*} = \{A \in \mathcal{S}_\mu : A \subset \Phi^*(A)\}$$

stanowi topologię, przy czym jest to topologia typu Hashimoto, postaci

$$\mathcal{T}_{\Phi^*} = \mathcal{T}_{\Phi_\mu} \ominus \mathcal{I}_\mu.$$

Ponadto operator $\Phi = \Phi^* | \mathcal{L}$ stanowiący obcięcie operatora Φ^* do σ-ciała $\mathcal{L}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$ generującym topologię $\mathcal{T}_\Phi$.

W pracy [34] dla dowolnej funkcji $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takiej, że

$$\limsup_{x \to 0^+} \frac{x}{g(x)} > 0$$

i rozszerzenia zupełnego μ miary Lebesgue'a określiłem, że punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem g-gęstości zbioru $A \in \mathcal{S}_\mu$, jeśli

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\mu(A' \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{g(2h)} = 0.$$

Niech

$$\Phi^\mu_{\langle g \rangle}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } g\text{-gęstości zbioru } A\}$$

dla $A \in \mathcal{S}_\mu$. Otrzymałem rezultat, że jeśli

$$0 < \limsup_{x \to 0^+} \frac{x}{g(x)} < \infty,$$

to rodzina

$$\mathcal{T}^\mu_{\langle g \rangle} = \{A \in \mathcal{S}_\mu : A \subset \Phi^\mu_{\langle g \rangle}(A)\}$$

stanowi topologię na $\mathbb{R}$ taką, że

$$\mathcal{T}^\mu_{\langle g \rangle} = \mathcal{T}_{\langle g \rangle} \ominus \mathcal{I}_\mu,$$

gdzie $\mathcal{T}_{\langle g \rangle} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\langle g \rangle}(A)\}$. Natomiast, jeśli założymy że

$$\limsup_{x \to 0^+} \frac{x}{g(x)} = 0$$

to operator $\Phi^{\mu}_{\langle g \rangle}$ również generuje topologię $\mathcal{T}^{\mu}_{\langle g \rangle}$ przy czym

$$\mathcal{T}_{\langle g \rangle} \ominus \mathcal{I}_{\mu} \subset \mathcal{T}^{\mu}_{\langle g \rangle}.$$

Topologie, typu topologii gęstości, związane z rozszerzeniem miary Lebesgue'a są także przedmiotem badań w pracy [55]. Jednak podstawą rozważań w tej pracy jest określenie punktu gęstości względem ciągu przedziałów domkniętych zbieżnego do zera, co będzie szerzej omówione w kolejnym rozdziale. W tym przypadku rozważamy ciąg $J = \{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ niezdegenerowanych przedziałów domkniętych takich, że $0 \in J_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $|J_n| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$, gdzie $|J_n|$ oznacza miarę Lebesgue'a przedziału J_n. Niech $\mathfrak{J}^0$ będzie rodziną wszystkich opisanych powyżej ciągów przedziałów domkniętych.

Niech $J^0 = \{J^0_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathfrak{J}^0$. Jeśli μ jest zupełnym rozszerzeniem miary Lebesgue'a i $A \in \mathcal{S}_{\mu}$, to punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem J^0-gęstości zbioru A, jeśli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mu(A \cap (x_0 + J_n))}{|J_n|} = 1.$$

Jeśli dla $A \in \mathcal{S}_{\mu}$ położymy

$$\Phi^{\mu}_{J^0}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } J^0\text{-gęstości zbioru } A\},$$

to operator $\Phi^{\mu}_{J^0} : \mathcal{S}_{\mu} \to \mathcal{L}$ jest operatorem słabej prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_{\mu}, \mathcal{I}_{\mu} \rangle$. Pozwala to wywnioskować, że $\Phi^{\mu}_{J^0}$ generuje topologię

$$\mathcal{T}^{\mu}_{J^0} = \{A \in \mathcal{S}_{\mu} : A \subset \Phi^{\mu}_{J^0}(A)\}$$

zawierającą topologię $\mathcal{T}_d$. Oczywiście dla $\mu = \lambda$ otrzymujemy topologię

$$\mathcal{T}_{J^0} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{J^0}(A)\}$$

, i w konsekwencji zachodzi własność, że

$$\mathcal{T}^{\mu}_{J^0} = \mathcal{T}_{J^0} \ominus \mathcal{I}_{\mu}.$$

Dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}^0$ otrzymuję również, że Φ_J^μ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu$, co z kolei jest równoważne własności, że $\mathcal{T}_J^\mu$ jest topologią von-Neumanna odpowiadającą mierze μ.

Dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}^0$ przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_J^\mu \rangle$ jest przestrzenią Hausdorffa oraz nie jest przestrzenią normalną. Natomiast aksjomaty oddzielania: regularności i całkowitej regularności dla przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_J^\mu \rangle$ otrzymujemy tylko w przypadku, gdy $\mathcal{I}_\mu = \mathbb{L}$. Tutaj warto nadmienić rezultat A. B. Kharazishvili z pracy *A non separable extension of the Lebesgue measure without new null sets* (Real Anal. Exchange 33, no 1, 259–268, 2008) mówiący, że przy założeniu C. H. istnieje nieośrodkowe rozszerzenie μ miary Lebesgue'a na $\mathbb{R}$, dla którego $\mathcal{I}_\mu = \mathbb{L}$.

W pracy [59] przedstawione jest ogólne spojrzenie na topologie generowane przez operatory słabej prawie dolnej gęstości względem zupełnego rozszerzenia μ miary Lebesgue'a. Niech $\Phi_\mu : \mathcal{S}_\mu \to 2^\mathbb{R}$ będzie dowolnym operatorem słabej prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$. Operator Φ_μ generuje topologię

$$\mathcal{T}_{\Phi_\mu} = \{A \in \mathcal{S}_\mu : A \subset \Phi_\mu(A)\}.$$

Jeśli $\Phi = \Phi_\mu | \mathcal{L}$ jest obcięciem operatora Φ_μ do σ-ciała $\mathcal{L}$ i Φ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, to

$$\mathcal{T}_{\Phi_\mu} = \mathcal{T}_\Phi \ominus \mathcal{I}_\mu,$$

gdzie $\mathcal{T}_\Phi = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi(A)\}$ jest topologią generowaną przez operator Φ. Otrzymujemy zatem własność, że jeśli Φ_μ jest operatorem słabej prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$ oraz $\Phi = \Phi_\mu | \mathcal{L}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, to topologia $\mathcal{T}_\mu$ generowana przez operator Φ_μ jest abstrakcyjną topologią gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu, \mathcal{I}_\mu \rangle$ oraz $\mathcal{T}_\mu$ jest topologią von-Neumanna odpowiadającą mierze μ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{S}_\mu = \mathcal{L} \triangle \mathcal{I}_\mu$.

W przypadku, gdy μ_1 i μ_2 są rozszerzeniami miary Lebesgue'a i Φ_{μ_1} oraz Φ_{μ_2} są operatorami słabej prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}_{\mu_1}, \mathcal{I}_{\mu_1} \rangle$ i odpowiednio na $\langle X, \mathcal{S}_{\mu_2}, \mathcal{I}_{\mu_2} \rangle$, generującymi topologie $\mathcal{T}_{\Phi_{\mu_1}}$ i odpowiednio $\mathcal{T}_{\Phi_{\mu_2}}$ oraz $\Phi_{\mu_1} | \mathcal{L}$ i $\Phi_{\mu_2} | \mathcal{L}$ są operatorami dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, to przestrzenie $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_{\mu_1}} \rangle$ i $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_{\mu_2}} \rangle$ są podobne wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{T}_{\Phi_{\mu_1}} = \mathcal{T}_{\Phi_{\mu_2}}$. Przy czym mówimy, że przestrzenie topologiczne $\langle X, \tau_1 \rangle$,

$\langle X, \tau_2\rangle$ są podobne, co zostało zdefiniowane w pracy A. Bartoszewicz, M. Filipczak, A. Kowalski, M. Terepeta, *On similarity between topologies* (Cent. Eur. J. Math. 12, no. 4, 603–610, 2014), jeśli

$$\underset{A\subset X}{\forall}(\mathrm{int}_{\tau_1}(A) \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{int}_{\tau_2}(A) \neq \emptyset).$$

Niech $\mathcal{T}_{\Phi_\mu}$ będzie topologią generowaną przez operator słabej prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{I}_\mu\rangle$ i $\Phi = \Phi_\mu|\mathcal{L}$ będzie operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$. Wówczas w obszarze aksjomatów oddzielania otrzymujemy własności:

(i) $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_\mu}\rangle$ jest T_1-przestrzenią.

(ii) $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_\mu}\rangle$ jest T_2-przestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\Phi\rangle$ jest T_2-przestrzenią.

(iii) Jeśli $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\Phi\rangle$ jest $T_3(T_{3\frac{1}{2}})$-przestrzenią, to $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_\mu}\rangle$ jest $T_3(T_{3\frac{1}{2}})$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{T}_{\Phi_\mu} = \mathcal{T}_\Phi$.

(iv) Jeśli $\tau_{nat} \subset \mathcal{T}_\Phi$, to $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_\mu}\rangle$ nie jest T_4-przestrzenią.

Praca [26] związana jest z zagadnieniem rozszerzenia miary, ale nie dotyczy topologii generowanych przez takie rozszerzenia. Niech $\langle X, \mathcal{S}, \nu\rangle$ będzie dowolną przestrzenią z nieujemną i σ-skończoną miarą ν, gdzie $\mathcal{S} = \mathrm{dom}\,\nu$. Wówczas dla dowolnego $Y \subset X$ i dowolnego $c \in [\nu_*(Y), \nu^*(Y)]$, przy czym ν_* i ν^* oznaczają odpowiednio wewnętrzną i zewnętrzną miarę generowaną przez ν, istnieje rozszerzenie ν_c miary ν takie, że Y należy do najmniejszego σ-ciała generowanego przez rodzinę $\mathcal{S} \cup \{Y\}$ i $\nu_c(Y) = 0$. Dla dowolnego $Y \subset X$ moc rodziny takich rozszerzeń wynosi 1 lub jest nie mniejsza niż continuum.

2.7 O topologiach gęstości generowanych przez ciągi przedziałów domkniętych zbieżne do zera

Podczas prezentacji wyników związanych z uogólnieniem gęstości na $\langle s\rangle$-gęstość na Uniwersytecie w Joaninie w Grecji, w ramach programu Erasmus w 2012 roku, Prof. G. Karakostas zadał pytanie o możliwość rozważania gęstości, niekoniecznie względem $\langle s\rangle$-ciągów, którego wyrazami są symetryczne w zerze przedziały domknięte, ale względem zbieżnych do zera ciągów, których elementami są dowolne zbiory mierzalne miary dodatniej. Częściową odpowiedź na to pytanie stanowi praca [46].

Powiemy, że ciąg przedziałów domkniętych $J = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do 0, jeśli $\operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, gdzie $\operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n)$ oznacza średnicę zbioru $\{0\} \cup J_n$. Niech $J = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezdegenerowanych przedziałów domkniętych zbieżnym do zera. Mówimy, że punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem J-gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeśli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap (x_0 + J_n))}{|J_n|} = 1.$$

Niech

$$\Phi_J(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } J\text{-gęstości zbioru } A\}$$

dla $A \in \mathcal{L}$. Wówczas $\Phi_J(A) \in \mathcal{F}_{\sigma\delta}$ dla każdego $A \in \mathcal{L}$.

Tego rodzaju gęstość odnajdujemy w pracy M. Csörnyei, *Density theorems revisited* (Acta Sci. Math. (Szeged) 64, no. 1-2, 59–65, 1998), gdzie Autorka prezentuje wynik o braku analogonu klasycznego twierdzenia Lebesgue'a w kontekście punktów J-gęstości. A zatem istnieje ciąg J przedziałów domkniętych zbieżny do zera taki, że operator Φ_J nie jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$.

Niech $\mathfrak{J}$ oznacza rodzinę ciągów niezdegenerowanych przedziałów domkniętych zbieżnych do zera. Praca [46] zawiera rezultat, że dla dowolnego $J \in \mathfrak{J}$ operator $\Phi_J : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L}\rangle$, przeto generuje topologię

$$\mathcal{T}_J = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_J(A)\}.$$

Topologia ta, nazywana topologią J-gęstości, jest istotnie bogatsza od τ_{nat}. Topologie J-gęstości są obiektem badań w kolejnych pracach.

Dla wyróżnienia pewnych operatorów Φ_J dla $J \in \mathfrak{J}$ zostało zdefiniowane wyrażenie:

$$\alpha(J) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n)}{|J_n|}.$$

Okazuje się, że warunek $\alpha(J) < \infty$ jest równoważny warunkowi, że $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_J$. Jednocześnie twierdzenie w pracy [46] pokazuje, że dla każdego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ takiego, że $\alpha(J) = \infty$ istnieje zbiór $A \in \tau_{nat}$ taki, że $0 \in \Phi_d(A)$ i $0 \notin \Phi_J(A)$.

Najistotniejszym rezultatem pracy [46] jest twierdzenie, że dla każdego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ takiego, że $\alpha(J) < \infty$ operator $\Phi_J : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$. Własność ilustrująca, że istnieje ciąg $J \in \mathfrak{J}$ i zbiory $A, B \in \mathcal{L}$ takie, że $0 \in \Phi_J(A)$ i $0 \notin \Phi_d(A)$ oraz $0 \in \Phi_d(B)$ i $0 \notin \Phi_J(B)$ uzasadnia, że otrzymaliśmy nową koncepcję punktów gęstości. Oczywiście dla ciągu $J = \{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $J_n = [-\frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_n}]$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\langle s \rangle = \{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{S}$ otrzymujemy, że $J \in \mathfrak{J}$ i $\Phi_J(A) = \Phi_{\langle s \rangle}(A)$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$, tak więc J-gęstość jest uogólnieniem $\langle s \rangle$-gęstości.

W pracy [49] zostały przedstawione wyniki badań nad funkcjami rzeczywistymi $\mathcal{T}_J$-ciągłymi. Dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ rodzina funkcji $\mathcal{T}_J$-ciągłych jest zamknięta ze względu na podstawowe operacje algebraiczne. Analogicznie, jak w przypadku funkcji aproksymatywnie ciągłych wprowadzamy pojęcie ciągłości J-aproksymatywnej mówiąc, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest J-aproksymatywnie ciągła w $x_0 \in \mathbb{R}$, jeśli istnieje zbiór $A \in \mathcal{L}$ taki, że $x_0 \in \Phi_J(A)$ i funkcja obcięciowa $f_{|(A \cup \{x_0\})}$ jest ciągła w x_0 w topologii naturalnej. Jeśli $\alpha(J) < \infty$, to funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest J-aproksymatywnie ciągła wszędzie wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\mathcal{T}_J$-ciągła. W pracy [49] przedstawiono także rezultat o warunkach równoważnych dla mierzalności funkcji w sensie Lebesgue'a. Mianowicie dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ następujące warunki są równoważne:

a) f jest mierzalna w sensie Lebesgue'a,

b) istnieje $B \in \mathbb{L}$ taki, że dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ takiego, że $\alpha(J) < \infty$ i dowolnego $x \in \mathbb{R} \setminus B$ funkcja f jest J-aproksymatywnie ciągła w x,

c) istnieje ciąg $J \in \mathfrak{J}$ taki, że $\alpha(J) < \infty$ i istnieje zbiór $B_J \in \mathbb{L}$ taki, że f jest J-aproksymatywnie ciągła dla $x \in \mathbb{R} \setminus B_J$.

W obszarze aksjomatów oddzielania praca [49] zawiera rezultat, że dla ciągu $J \in \mathfrak{J}$ takiego, że $\alpha(J) < \infty$ przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_J \rangle$ jest regularna i nie jest normalna. W przypadku klasyfikacji Baire'a został uzyskany wynik, że dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ takiego, że $\alpha(J) < \infty$ funkcje J-aproksymatywnie ciągłe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ należą do 1 klasy Baire'a.

Praca [51] zawiera kolejne wyniki badań nad T_J-ciągłością. Niech $J \in \mathfrak{J}$. Powiemy, że ciąg $J = \{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest prawostronnie (lewostronnie) zbieżny do zera, jeśli istnieje

$n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $b_n > 0$ ($a_n < 0$) dla $n \geqslant n_0$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\min\{0, a_n\}}{b_n} = 0 \ \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{0, b_n\}}{a_n} = 0\right).$$

W kontekście ciągów jednostronnie zbieżnych otrzymujemy, że jeśli $J \in \mathfrak{J}$, to $[a, b) \in \mathcal{T}_J$ ($(a, b] \in \mathcal{T}_J$) dla $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg J jest prawostronnie (lewostronnie) zbieżny do 0.

Dla ciągu $J \in \mathfrak{J}$ określamy następujące rodziny funkcji ciągłych:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{nat,nat} &= \{f : \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle \to \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle\}, \\ \mathcal{C}_{nat,J} &= \{f : \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle \to \langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_J\rangle\}, \\ \mathcal{C}_{J,nat} &= \{f : \langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_J\rangle \to \langle\mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle\}, \\ \mathcal{C}_{J,J} &= \{f : \langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_J\rangle \to \langle\mathbb{R}, \mathcal{T}_J\rangle\}. \end{aligned}$$

Rodzina funkcji $\mathcal{C}_{nat,J}$ redukuje się do funkcji stałych. Jednocześnie $\mathcal{C}_{nat,J} \subsetneq \mathcal{C}_{nat,nat} \subset \mathcal{C}_{J,nat}$ oraz $\mathcal{C}_{nat,J} \subsetneq \mathcal{C}_{J,J} \subset \mathcal{C}_{J,nat}$. Jeśli ciąg $J \in \mathfrak{J}$ jest jednostronnie zbieżny do zera, to

i) $\mathcal{C}_{nat,nat} \setminus \mathcal{C}_{J,J} \neq \emptyset$,

ii) $\mathcal{C}_{J,J} \setminus \mathcal{C}_{nat,nat} \neq \emptyset$

oraz inkluzje $\mathcal{C}_{nat,nat} \subset \mathcal{C}_{J,nat}$ oraz $\mathcal{C}_{J,J} \subset \mathcal{C}_{J,nat}$ są właściwe.

Interesujący jest też rezultat, który ma znaczenie w semiregularyzacji topologii. Dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ istnieje zbiór przedziałowy $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$, gdzie $b_{n+1} < a_n < b_n$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, taki, że $0 \in \Phi_J(B)$. Natomiast w kierunku porównywania topologii, praca [50] zawiera rezultat, że dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ istnieje ciąg $K \in \mathfrak{J}$ taki, że topologie $\mathcal{T}_J$ i $\mathcal{T}_K$ są nieporównywalne.

Dla ciągów J, K z rodziny $\mathfrak{J}$ ciąg utworzony z przedziałów ciągu J oraz ciągu K w sposób dowolny oznaczać będziemy przez $J \cup K$, przy czym zawsze $J \cup K \in \mathfrak{J}$. W kontekście ciągu $J \cup K$ otrzymujemy następujące własności:

i) $\mathcal{C}_{J,nat} \cap \mathcal{C}_{K,nat} = \mathcal{C}_{J\cup K,nat}$,

ii) $\mathcal{C}_{nat,J} \cap \mathcal{C}_{nat,K} = \mathcal{C}_{nat,J\cup K}$,

iii) $\mathcal{C}_{J,J} \cap \mathcal{C}_{K,K} \subsetneq \mathcal{C}_{J\cup K,J\cup K}$.

Dalszą kontynuację badań nad topologiami J-gęstości zawiera praca [56]. Nowe wyniki w tej pracy dotyczą badania funkcji J-aproksymatywnie ciągłych w przypadku, gdy $J \in \mathfrak{J}$ bez ograniczeń dotyczących własności $\alpha(J)$. Ciągłość J-aproksymatywną definiujemy analogicznie, jak w pracy [49] i otrzymujemy rezultat, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest J-aproksymatywnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągła względem topologii $\mathcal{T}_J$. W pracy tej pojawia się również charakteryzacja mierzalności w sensie Lebesgue'a. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest mierzalna w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $J \in \mathfrak{J}$ i zbiór $B_J \in \mathbb{L}$ taki, że funkcja f jest J-aproksymatywnie ciągła w każdym punkcie $x \in \mathbb{R} \setminus B_J$. Ponadto dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ funkcja J-aproksymatywnie ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire'a. Rezultat w obszarze aksjomatów oddzielania pokazuje, że dla $J \in \mathfrak{J}$ takiego, że $\alpha(J) < \infty$ przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_J \rangle$ jest całkowicie regularna. Przy warunku $\alpha(J) < \infty$ mamy, że $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_J$, co jest przedstawione w pracy [46], ale ponieważ istnieje ciąg $J \in \mathfrak{J}$ taki, że $\alpha(J) < \infty$ i $\mathcal{T}_d \neq \mathcal{T}_J$, więc mamy przykład topologii typu J-gęstości, która jest różna od topologii gęstości i jest całkowicie regularna.

Koncepcja J-gęstości względem zbieżnych do zera ciągów niezdegenerowanych przedziałów domkniętych znalazła dalsze uogólnienie. W pracy R. Wiertelak, F. Strobin *On a generalization of density topologies on the real line* (Topology Appl. 199, 1–16, 2016) przedstawiona jest koncepcja gęstości względem zbieżnych do zera ciągów, których elementami są zbiory dodatniej miary Lebesgue'a. Okazuje się, że wówczas gęstość względem takiego ciągu można opisać za pomocą gęstości względem zbieżnych do zera ciągów składających się ze zbiorów będących skończonymi sumami niezdegenerowanych przedziałów domkniętych. Badania nad topologiami generowanymi przez pewne ciągi zbiorów opisanych powyżej wchodzą w zakres rozprawy doktorskiej przygotowywanej obecnie pod moim kierunkiem przez doktoranta M. Widzibora.

Przed rozpoczęciem badań J-gęstości w aspekcie miary, w pracy doktorskiej przygotowanej pod moim kierunkiem R. Wiertelak *Topologie gęstości generowane przez ciągi* *przedziałów zbieżne do zera* z 2008 roku, została wprowadzona kategoryjna J-gęstośc-gęstość dla zbiorów o własności Baire'a, nazwana $\mathcal{I}(J)$ gęstością.

Jeśli ciąg $J = \{J_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{J}$ to powiemy, że punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{I}(J)$-gęstości zbioru $A \in \mathcal{B}a$, jeśli ciąg funkcyjny $\{h(A, J_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny według σ-ideału $\mathbb{K}$ do funkcji $\chi_{[-1,1]}$, gdzie

$$h(A, J_n)(x) = \chi_{\frac{2}{|J_n|}((A-x_0)-s(J_n))\cap[-1,1]}(x)$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$, a $s(J_n)$ oznacza środek przedziału J_n.

W przypadku ciągu $J = \{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]\}_{n\in\mathbb{N}}$ otrzymujemy oczywiście, że x_0 będący punktem $\mathcal{I}(J)$-gęstości zbioru A jest punktem $\mathcal{I}$-gęstości zbioru A. Dla $J = \{[-\frac{1}{s_n}, \frac{1}{s_n}]\}_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie $\langle s\rangle = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{S}$, otrzymujemy natomiast, że x_0 jest punktem $\mathcal{I}_{\langle s\rangle}$-gęstości zbioru A.

Przyjmując dla $J \in \mathfrak{J}$ oraz $A \in \mathcal{B}a$

$$\Phi_{\mathcal{I}(J)}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \mathcal{I}(J)\text{-gęstości zbioru } A\}$$

R. Wiertelak udowodniła, że $\Phi_{\mathcal{I}(J)} : \mathcal{B}a \to \mathcal{B}a$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K}\rangle$. W konsekwencji dla każdego $J \in \mathfrak{J}$ operator $\Phi_{\mathcal{I}(J)}$ generuje topologię

$$T_{\mathcal{I}(J)} = \{A \in \mathcal{B}a : A \subset \Phi_{\mathcal{I}(J)}(A)\}$$

zwaną topologią $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}$-gęstości on $\mathbb{R}$. Pokazała także, że topologia ta jest bogatsza od topologii naturalnej i zbadała różne jej własności.

Praca [38] zawiera rezultaty dotyczące funkcji ciągłych względem topologii $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}$. W pracy tej zbadano związki między następującymi rodzinami funkcji ciągłych:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{nat,\mathcal{I}(J)} &= \{f : \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle \to \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}\rangle\},\\
\mathcal{C}_{\mathcal{I}(J),nat} &= \{f : \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}\rangle \to \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle\},\\
\mathcal{C}_{\mathcal{I}(J),\mathcal{I}(J)} &= \{f : \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}\rangle \to \langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}\rangle\},\\
\mathcal{C}_{nat,nat} &= \{f : \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle \to \langle \mathbb{R}, \tau_{nat}\rangle\}.
\end{aligned}$$

Interesującym jest fakt, że funkcja liniowa $f(x) = ax$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, jest $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}$-ciągła dla każdego $J \in \mathfrak{J}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in \{0, 1\}$. Inna charakteryzacja ciągłości funkcji liniowej orzeka, że dla dowolnego ciągu $J \in \mathfrak{J}$ funkcja $f(x) = ax$, $a \neq 0$, jest $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}$-ciągła wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{I}(aJ)}$, gdzie $aJ = \{aJ_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Rozważania operatorów J-gęstości odpowiednio dla miary i kategorii powiększają kolekcję różnic między miarą i kategorią. Dla ciągu $J \in \mathfrak{J}$ operator $\Phi_J : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$, podczas gdy $\Phi_{\mathcal{I}(J)} : \mathcal{B}a \to \mathcal{B}a$ jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$. W obu przypadkach operatory generują topologie $\mathcal{T}_J$-gęstości i odpowiednio $\mathcal{T}_{\mathcal{I}(J)}$-gęstości, z których pierwsza przy założeniu $\alpha(J) < \infty$ jest całkowicie regularna, a druga nie jest regularna.

2.8 Semiregularyzacja

Prace [52] i [53] związane są z semiregularyzacją topologii typu gęstości. Jeśli $\langle X, \tau \rangle$ jest przestrzenią topologiczną, to semiregularyzacją przestrzeni $\langle X, \tau \rangle$ nazywamy przestrzeń topologiczną $\langle X, \tau_{sem} \rangle$, gdzie τ_{sem} jest topologią generowaną przez zbiory τ-regularnie otwarte. Istotną cechą semiregularyzacji jest własność (R. A. Aleksandrian, E. M. Mirzahanian, *Topologia ogólna* (po rosyjsku), Moskwa, 1979), że jeśli $\langle X, \tau_{sem} \rangle$ jest semiregularyzacją przestrzeni topologicznej $\langle X, \tau \rangle$ oraz $\langle Y, \sigma \rangle$ jest przestrzenią regularną, to zachodzi równość klas funkcji ciągłych

$$\mathcal{C}(\langle X, \tau \rangle, \langle Y, \sigma \rangle) = \mathcal{C}(\langle X, \tau_{sem} \rangle, \langle Y, \sigma \rangle).$$

W związku z powyższym, jeśli okaże się, że przestrzeń $\langle X, \tau_{sem} \rangle$ jest ponadto całkowicie regularna, to wówczas semiregularyzacja jest najsłabszą topologią dla której funkcje τ_{sem}-ciągłe pokrywają się z funkcjami τ-ciągłymi. Szczególnie istotne jest więc poszukiwanie najsłabszej topologii τ, dla której funkcje $\mathcal{T}_\Phi$-ciągłe będą ciągłe względem topologii τ. Wiadomo, z pracy [44], że dla operatora Φ dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$, przy założeniu $\tau_{nat} \subset \mathcal{T}_\Phi$, przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_\Phi \rangle$ nie jest regularna. Wobec tego w tym przypadku uzasadnione jest badanie semiregularyzacji tej przestrzeni.

Praca [53] zawiera pewien przegląd topologii typu gęstości generowanych przez operatory dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$ lub $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$, dla których semiregularyzacja jest całkowicie regularna. Praca ta zawiera, między innymi, badanie semiregularyzacji topologii $\mathcal{T}_{\psi_C}$. Jest to topologia związana z operatorem uzależnionym od funkcji ciągłej $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ takiej, że

$$\lim_{t \to 0^+} \psi(t) = 0.$$

Mianowicie, dla zbioru $E \in \mathcal{B}a$ punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ jest punktem ψ_C-gęstości zbioru E, jeśli

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda((G(E))' \cap [x_0 - h, x_0 + h])}{2h\psi(2h)} = 0,$$

gdzie $G(E)$ jest zbiorem τ_{nat}-regularnie otwartym takim, że $G(E) \triangle E \in \mathbb{K}$. Operator $\Phi_{\psi_C} : \mathcal{B}a \to \mathcal{B}a$, gdzie

$$\Phi_{\psi_C}(A) = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ jest punktem } \psi_C\text{-gęstości zbioru } A\}$$

dla $A \in \mathcal{B}a$, jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$ i generuje topologię $\mathcal{T}_{\psi_C}$. Praca [53] zawiera rezultat mówiący o tym, że semiregularyzacja $\mathcal{T}_{\psi_C}$ jest topologią całkowicie regularną.

W pracy [52] zbadana jest semiregularyzacja topologii typu gęstości związanej z ciągiem $J \in \mathfrak{J}$. Kładąc

$$\Phi_r(A) = \Phi_J(G(A)),$$

gdzie $A \in \mathcal{B}a$, $G(A)$ jest τ_{nat}-regularnie otwarty i $A \triangle G(A) \in \mathbb{K}$, otrzymujemy operator dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$. Operator ten generuje topologię $\mathcal{T}_{\Phi_r}$ bogatszą od topologii naturalnej. Semiregularyzacja przestrzeni topologicznej $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\Phi_r} \rangle$ prowadzi do przestrzeni całkowicie regularnej.

Pomimo pewnych przykładów semiregularyzacji przestrzeni topologicznych generowanych przez operatory dolnej gęstości, nie jest rozwiązany problem określenia warunków dla topologii $\mathcal{T}_\Phi$ generowanej przez operator dolnej gęstości Φ na przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ tak, aby semiregularyzacja $\langle X, \mathcal{T}_\Phi \rangle$ była przestrzenią całkowicie regularną.

2.9 O rodzinach operatorów dolnej gęstości, prawie dolnej gęstości oraz semi dolnej gęstości

Praca A. Bartoszewicz, K. Ciesielski, *MB-representations and topological algebras* (Real Anal. Exchange 27, 749–756, 2001/2002) zawiera rezultat, o istnieniu przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ takiej, że para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki, ale nie istnieje operator dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$. Tym samym dowolna topologia τ na X nie jest abstrakcyjną topologią gęstości na przestrzeni $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$.

W sytuacji, gdy osłabiamy żądanie do istnienia operatora prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$, to zawsze możemy stwierdzić, że taki operator istnieje. Prosty przykład

$$\Phi(A) = \begin{cases} X & A \sim X, \\ \emptyset & \neg(A \sim X) \end{cases}$$

dla $A \in \mathcal{S}$ ilustruje, że Φ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$. Co więcej, generuje on zawsze topologię

$$\mathcal{T}_\Phi = \{A \subset X : A = \emptyset \vee (A = X \setminus B \wedge B \in \mathcal{J})\},$$

niezależnie od tego, czy para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J}\rangle$ posiada własność mierzalnej otoczki.

Nie mniej jednak istnieją przyklady operatorow dolnej gęstości na wyróżnionych w przestrzeniach mierzalnych. Praca [47] zawiera wspomniany wcześniej rezultat o tym, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej Baire'a$\langle X, \tau\rangle$ zawsze istnieje operator dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{B}a(\tau), \mathbb{K}(\tau)\rangle$. Również w przypadku przestrzeni $\langle X, \mathcal{S}_\nu, \mathcal{J}_\nu\rangle$, gdzie $\mathcal{S}_\nu$ jest dziedziną

σ-skończonej i nie równej tożsamościowo zero miary ν, zaś $\mathcal{J}_\nu$ jest σ-ideałem zbiorów miary ν-zero, dzięki twierdzeniu von Neumann-Maharam istnieje operator dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{S}_\mu, \mathcal{J}_\mu\rangle$.

Praca [58] zawiera rezultaty związane z badaniem operatorów typu operatora gęstości określone na przestrzeni z wyróżnionym ciałem i ideałem. Dokładniej, w pracy tej rozważane są trójki $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I}\rangle$ takie, że $\mathcal{A}$ jest ciałem, $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ideałem właściwym takim, że $\bigcup \mathcal{I} = X$. Wówczas, jeśli $\mathcal{P}$ jest rodziną operatorów dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, to następujące warunki są równoważne:

a) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$, gdzie $\mathcal{A}_0$ jest ciałem generowanym przez rodzinę $\mathcal{I}$,

b) istnieje najmniejsza, w sensie inkluzji, abstrakcyjna topologia gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$,

c) $\mathrm{card}(\mathcal{P}) = 1$,

d) operator $\Phi_{**} : \mathcal{A} \to 2^X$ określony wzorem

$$\mathbf{\Phi}_{**}(A) = \bigcap_{\Phi \in \mathcal{P}} \Phi(A)$$

jest operatorem dolnej gęstość na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$.

W pracy [58] badane są także rodziny wszystkich operatorów dolnej gęstości, prawie dolnej gęstości i semi dolnej gęstości określone na przestrzeni $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$.

Jeśli $\Phi_1 : \mathcal{S} \to 2^X$ i $\Phi_2 : \mathcal{S} \to 2^X$ są dowolnymi operatorami zdefiniowanymi na $\mathcal{A}$, to w naturalny sposób definiujemy relację $\prec$ mówiąc, że $\Phi_1 \prec \Phi_2$, jeśli dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ mamy, że $\Phi_1(A) \subset \Phi_2(A)$. Jeśli Φ_1 i Φ_2 są operatorami dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ oraz $\mathcal{T}_{\Phi_1}$ i $\mathcal{T}_{\Phi_2}$ są topologiami generowanymi przez Φ_1 i odpowiednio Φ_2, to $\mathcal{T}_{\Phi_1} \subset \mathcal{T}_{\Phi_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_1 \prec \Phi_2$.

Jeśli $\mathcal{LDO}$ jest rodziną wszystkich operatorów dolnej gęstości na przestrzeni $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, to w przypadku, gdy $\mathcal{LDO} \neq \emptyset$, istnienie największego elementu w $\mathcal{LDO}$ względem relacji $\prec$ jest równoważne faktowi, że rodzina $\mathcal{A}$ redukuje się do $\mathcal{A}_0$, czyli najmniejszego ciała generowanego przez $\mathcal{I}$. Natomiast $\Phi \in \mathcal{LDO}$ jest elementem maksymalnym w $\mathcal{LDO}$ względem relacji $\prec$ wtedy i tylko wtedy, gdy Φ jest liftingiem na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, to znaczy operatorem dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ spełniającym dodatkowy warunek, że $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) \cup \Phi(B)$ dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A}$.

W przypadku rodziny wszystkich operatorów prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, oznaczanej przez $\mathcal{ALDO}$, otrzymujemy, że jeśli $\Phi \in \mathcal{ALDO}$ jest elementem maksymalnym w $\mathcal{ALDO}$ względem relacji $\prec$, to $\Phi \in \mathcal{LDO}$. Ponadto następujące warunki są równoważne:

i) istnieje element maksymalny w $\mathcal{ALDO}$ względem relacji $\prec$,

ii) $\mathcal{LDO} \neq \emptyset$,

iii) istnieje operator $\Phi \in \mathcal{LDO}$ będący liftingiem.

Natomiast istnienie elementu największego w rodzinie $\mathcal{ALDO}$ względem relacji $\prec$ jest równoważne warunkowi, że $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.

W przypadku, gdy $\mathcal{SLDO}$ oznacza rodzinę operatorów semi dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$, to fakt, że $\Phi \in \mathcal{SLDO}$ jest elementem maksymalnym w rodzinie $\mathcal{SLDO}$ względem relacji $\prec$ jest równoważny warunkowi, że $\Phi(A) \cup \Phi(X \setminus A) = X$ dla każdego $A \in \mathcal{A}$. Należy ponadto dodać, że w rodzinie $\mathcal{SLDO}$ zawsze istnieje element maksymalny względem relacji $\prec$. Natomiast istnienie elementu największego w rodzinie $\mathcal{SLDO}$ względem relacji $\prec$ jest równoważne warunkowi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.

Praca [58] zawiera również rezultat, że w przypadku, gdy rodzina topologii generowanych przez operatory dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$ jest niepusta, to warunek $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}_0$ jest równoważny temu, że najmniejsza topologia generowana przez sumę tych wszystkich topologii pokrywa się z 2^X. Podobnie w przypadku rodziny topologii generowanych przez operatory prawie dolnej gęstości na $\langle X, \mathcal{A}, \mathcal{I} \rangle$. Istnienie największej topologii w tej rodzinie jest równoważne warunkowi $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.

3 Omówienie rozdziałów w monografiach

Praca [39] jest rozdziałem w monografii jubileuszowej *Real functions, density topology and selected topics* (Łódź University Press, 77–82, 2011) dedykowanej Prof. W. Wilczyńskiemu. W pracy rozważa się rodzinę $\mathfrak{A}$ niezmienniczych σ-ideałów na $\mathbb{R}$ pod kątem ich uniwersalności. Mówimy, że σ-ideał $\mathcal{J} \in \mathfrak{A}$ jest uniwersalny, jeśli dla dowolnego σ-ideału $\mathcal{I} \in \mathfrak{A}$ otrzymujemy jeden z warunków:

1° $\mathcal{I} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{J} \cap \mathcal{B}$

2° $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ są ortogonalne, to znaczy, że istnieją $X \in \mathcal{I}$ i $Y \in \mathcal{J}$ takie, że $X \cap Y = \emptyset$ oraz $X \cup Y = \mathbb{R}$.

Praca ta zawiera rezultat, że σ-ideały $\mathbb{L}$ i $\mathbb{K}$ są uniwersalne na prostej. Pokazano w niej także, że jeśli σ-ideały $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ są uniwersalne i borelowskie oraz $\mathcal{J}_1 \neq \mathcal{J}_2$, to σ-ideał $\mathcal{J}_1 \cap \mathcal{J}_2$ nie jest uniwersalny. Wykazano również, że każdy σ-ideał $\mathcal{J} \in \mathfrak{A}$, który nie zawiera niepustych zbiorów doskonałych, a więc jest całkowicie niedoskonały, nie jest uniwersalny. W pracy tej zamieszczono także rezultat, że jeśli $\mathcal{J} \in \mathfrak{A}$ jest borelowskim σ-ideałem oraz istnieje borelowski σ-ideał $\mathcal{J}_1 \in \mathfrak{A}$ taki, że $\mathcal{J} \subset \mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J} \neq \mathcal{J}_1$, to $\mathcal{J}$ nie jest uniwersalny. Zostało także zbadane, że znany z literaturze σ-ideał Mycielskiego $\mathcal{J}_{\mathcal{M}}$ (J. Mycielski, *Some new ideals of sets on the real line*, Colloq. Math. 20, 71–77, 1960) też nie jest uniwersalny.

Praca [45] jest rozdziałem w monografii *Traditional and present-day topics in real analysis* (Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, 431–447, 2013) dedykowanej prof. S. Lipińskiemu. Praca ta ma charakter przeglądowy. W pierwszej części gromadzi własności topologii generowanych przez operatory dolnej gęstości na przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Przedstawione w rozdziale dowody pochodzą w większości z prac wcześniej opublikowanych przez Autorów. Druga część tej pracy dotyczy operatorów prawie dolnej gęstości na przestrzeni mierzalnej $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ z uwzględnieniem własności topologii generowanych przez te operatory. Celem nadrzędnym tej pracy jest pokazanie pewnych dualnych własności topologii generowanych przez operatory dolnej i prawie dolnej gęstości, a także zasygnalizowanie różnic między takimi topologiami.

Praca [48] jest rozdziałem w monografii *Monograph on the occasion of 100th birthday anniversary of Zygmunt Zahorski* (Wydaw. Politechniki Śl., Gliwice, 141–154, 2015) wydanej na okoliczność 100 rocznicy urodzin Prof. Z. Zahorskiego. Motywem przewodnim tej pracy są topologie generowane przez operatory dolnej i prawie dolnej gęstości związane ze zbieżnymi do zera ciągami niezdegenerowanych przedziałów domkniętych. Pierwsza część pracy dotyczy topologii generowanych przez operatory dolnej gęstości na przestrzeni $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$. Zawarte są w niej wyniki prac opublikowanych przez Autorów rozdziału i dotyczą własności tych topologii, a także własności funkcji ciągłych względem nich. W części drugiej pracy przedstawione zostały rezultaty prac dotyczące topologii generowanych przez operatory Φ_J-gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L} \rangle$. Przytoczone zostały własności tak uzyskanych topologii J-gęstości, zarówno w przypadku, gdy operator generujący te topologie jest operatorem dolnej gęstości jak i prawie dolnej gęstości. Przedstawione zostały również własności funkcji ciągłych względem tych topologii.

Praca [50] jest rozdziałem w monografii *Modern Real Analysis* (Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, 61–68, 2015). Przedmiotem rozważań w tej pracy są funkcje ciągłe względem topologii gęstości generowanych przez operatory dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$ związane z pewnym operatorem $\Phi : \tau_{nat} \to 2^{\mathbb{R}}$ o następujących własnościach:

i) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ i $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$,

ii) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$ dla dowolnych zbiorów $A, B \in \tau_{nat}$,

iii) $A \subset \Phi(A)$ dla dowolnego zbioru $A \in \tau_{nat}$.

Z pracy [47] wynika, że operator $\Phi_r : \mathcal{B}a \to \mathcal{B}a$ określony wzorem

$$\Phi_r(A) = \Phi(G(A)),$$

gdzie $A \in \mathcal{B}a$ i $G(A)$ jest zbiorem τ_{nat}-regularnie otwartym takim, że $A \triangle G(A) \in \mathbb{K}$, jest operatorem dolnej gęstości na $\langle \mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathbb{K} \rangle$. Operator ten generuje topologię $\mathcal{T}_{\Phi_r}$. Przedmiotem pracy [50] jest badanie rzeczywistych funkcji $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-ciągłych i funkcji $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywnie ciągłych, gdzie $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywna ciągłość funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ oznacza istnienie zbioru $A \in \mathcal{B}a$ takiego, że $x_0 \in \Phi_r(A)$ oraz $f_{|A \cup \{x_0\}}$ jest ciągła w zwykłym sensie. Ciągłość $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywna w x_0 implikuje $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-ciągłość w x_0. Praca ta zawiera warunek gwarantujący równoważność tych ciągłości. W przypadku gdy Φ jest operatorem tożsamościowym, to $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-aproksymatywna ciągłość oraz $\mathcal{T}_{\Phi_r}$-ciągłość są równoważne.

4 O pewnych osiągnięciach naukowych przed uzyskaniem stopnia doktora habilitowanego

Jeszcze w okresie studiów zainteresowany byłem pewnymi porównaniami miary i kategorii, do czego znacznie przyczyniła się wydana w latach siedemdziesiątych monografia J. C. Oxtoby'ego *Measure and Category* (J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York, 1971). Zgromadzone w niej pewne fundamentalne przykłady związane z miarą i kategorią wskazywały zarówno na bogactwo analogii, jak i też na bogactwo różnic.

Dla nowych porównań miary i kategorii, gdzie dualnie występuje σ-ideał zbiorów miary Lebesgue'a zero i σ-ideał zbiorów I kategorii, duże znaczenie miała koncepcja pojęcia zbieżności ciągu rzeczywistych funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych względem dowolnego, właściwego σ-ideału $\mathcal{J} \subset \mathcal{S}$, wprowadzona w paragrafie 2.2, gdzie $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ jest przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$. Dzięki temu pojęciu zbieżności rozwijane były porównawcze badania w rodzinie funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a i rodzinie funkcji mających własność Baire'a dotyczące topologizacji tych rodzin poprzez operację domknięcia zdefiniowaną przez zbieżność względem odpowiednio, σ-ideałów zbiorów miary zero albo I kategorii. To sprawiło, że intensywnie zajmowałem się możliwością topologizacji rodzin funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych poprzez operacje domknięcia zdefiniowaną przez zbieżność względem σ-ideału $\mathcal{J}$. Rozważając rodziny funkcji rzeczywistych, mierzalnych względem najmniejszego σ-ciała $\mathcal{B} \triangle \mathcal{J}$ stwierdziłem w pracy [3], co było elementem mojej pracy doktorskiej, że dla σ-ideału Mycielskiego $\mathcal{J}_M$ przestrzeń funkcji $\mathcal{B} \triangle \mathcal{J}_M$-mierzalnych nie jest topologizowalna. Podobnie, co pokazałem w pracy [5], zachowują się wszystkie σ-ideały całkowicie niedoskonałe, to znaczy nie zawierające niepustych zbiorów doskonałych. Naturalne przykłady takich rodzin licznie występują w literaturze. Nie można jednak generować σ-ideału całkowicie niedoskonałego z σ-ideałów mających tę własność. W pracy [2] udowodniłem, że pomimo iż σ-ideały $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ są całkowicie niedoskonałe i niezmiennicze ze względu na translację, to σ-ideał generowany przez $\mathcal{J}_1$ i $\mathcal{J}_2$ może zawierać niepusty zbiór doskonały. W pracy [6] zbadałem pewne własności σ-ideałów, zbieżność według których generuje topologię, określając je mianem σ-ideałów topologicznych.

W 1989 roku w Centrum Banacha dowiedziałem się z autorskich wykładów Profesora J. Morgana, zawartych w późniejszej wydanej monografii *Point Set Theory* (Chapman & Marcel-Dekker Inc., New York and Basel, 1990), że operując pojęciem bazy kategorialnej udaje się niejednokrotnie wspólne własności dla miary i kategorii ująć w nowej, jednolitej koncepcji języka baz kategorialnych. Przestrzeń topologiczna lub przestrzeń z miarą σ-skończoną, bądź przestrzeń mierzalna $\langle X, \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ z wyróżnionym σ-ideałem $\mathcal{J}$ takim, że para $\langle \mathcal{S}, \mathcal{J} \rangle$ spełnia warunek przeliczalnego łańcucha (c.c.c), to najbardziej naturalne przykłady baz kategorialnych. Z tego powodu, w pracy [12] badałem zbieżność wielowskaźnikowych ciągów funkcji mierzalnych w bazach kategorialnych, by zaobserwować, że zbieżność prawie wszędzie w bazie kategorialnej względem podciągów po współrzędnych implikuje zbieżność prawie wszędzie wyjściowego ciągu. Badając topologizację rodziny funkcji mierzalnych w ośrodkowej bazie kategorialnej, przedstawiłem w pracy [17], pewną lokalną własność, która przeszkadza w uzyskaniu topologii. Na tej podstawie scharakteryzowałem przestrzenie topologiczne T_1 z bazą przeliczalną, w których można topologizować przestrzenie funkcji o własności Baire'a. Dzięki temu uzyskałem w pracy [22] rezultat orzekający brak topologizacji funkcji $\mathcal{B}\triangle\mathcal{J}$-mierzalnych w przestrzeniach polskich, gdy σ-ideał $\mathcal{J}$ posiada bazę złożoną ze zbiorów typu F_σ. Przy założeniu, że w dowolnej bazie kategorialnej zbiory mocy mniejszej niż moc przestrzeni należą do σ-ideału zbiorów I kategorii, który posiada bazę mocy nie przewyższającą mocy przestrzeni, wywnioskowałem w pracy [13] istnienie podzbioru nie będącego zbiorem Baire'a, z czego wynika również istnienie zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a i zbioru nie mającego własności Baire'a. Pod tym kątem badałem w pracy [18] warunki, kiedy z dowolnej, nieprzeliczalnej rodziny zbiorów I kategorii w ustalonej bazie kategorialnej można wyjąć podrodzinę, której suma jest zbiorem nie będącym zbiorem Baire'a.

Pojęcie zbieżności ciągu funkcyjnego według σ-ideału wyzwoliło chęć badania ośrodkowości i zwartości odpowiednich przestrzeni funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych. W pracy [4] przedstawiłem miedzy innymi warunek konieczny i dostateczny ośrodkowości, a w pracy [10] została scharakteryzowana zwartość rodziny funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych o wartościach w przestrzeni Hausdorffa, która jest regularną przestrzenią Lindelöfa z przekątną typu G_δ.

Pewną, równoległą tematykę moich zainteresowań stanowiły badania małych systemów zbiorów, zapoczątkowane przez B. Riečana w pracy *Subadditive measures and small systems* (Časopis Pěst. Mat. 99 no. 3, 279–285, 1974). Mały system szacuje wielkość zbioru poprzez przynależność do odpowiedniej rodziny, która jest jednym z elementów zstępującego ciągu rodzin. Przekrój małego systemu (część wspólna ciągu rodzin) jest σ-ideałem, którego elementy traktujemy jako małe zbiory. W języku małego systemu wyraziłem w pracy [11] twierdzenie Jegorowa i w pracy [16] twierdzenie Łuzina. Otrzymujemy z nich klasyczne twierdzenie Jegorowa i Łuzina, gdy mały system jest generowany przez miarę skończoną. W pracy [10] zbadano zwartość rodzin funkcji $\mathcal{S}$-mierzalnych, podając warunki konieczne i dostateczne, które w naturalny sposób uogólniają twierdzenie Frécheta o zwartości dla funkcji mierzalnych w sensie zbieżności według miary skończonej.

Praca [7] dotyczy badania σ-ideałów z bazą borelowską w nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej. Z właściwym σ-ideałem $\mathcal{J}$ w X z bazą borelowską typu G_δ można związać σ-ideał $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$, definiując go jako podrodzinę $\mathcal{J}$, w której każdy zbiór posiada nadzbiór typu F_σ z rodziny $\mathcal{J}$. Taki σ-ideał jest porównywalny z rodziną zbiorów σ-porowatych na prostej. Dowodzi się, że dla σ-ideału $\mathcal{J}$ w nieprzeliczalnej przestrzeni polskiej X istnieje ciąg o długości ω_1 zbiorów parami rozłącznych nigdzie gęstych typu G_δ z rodziny $\mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$. W przypadku, jeśli $\mathcal{J} = \mathbb{L}$, to istnieje 2^{ω_0} zbiorów rozłącznych typu G_δ z rodziny $\mathbb{L} \setminus \mathbb{L}_1$. Interesujący jest też rezultat, że dla zbioru I kategorii $A \subset \mathbb{R}$ istnieje zbiór $B \in \mathbb{L} \setminus \mathbb{L}_1$ i $B \in G_\delta$ oraz $A \cap B = \emptyset$. Taki rezultat był znany dla zbiorów σ-porowatych. Mianowicie J. Tkadlec w pracy *Construction of some non-σ-porous sets on real line* (Real Anal. Exchange 9, 473–482, 1983) wykazał, że dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{R}$ i I kategorii istnieje zbiór doskonały B, który nie jest σ-porowaty oraz jest rozłączny z A.

W pracy [24], pod wpływem pobytu na seminarium Prof. C. Weila w Michigan State University (USA), specjalisty od pochodnej Peano, zająłem się pochodną Peano dla funkcji o własności Baire'a. Otrzymałem rezultat, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ posiada własność Baire'a, to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $E_k = \{x \in \mathbb{R} : f_{(k)}(x) \text{ istnieje}\} \in \mathcal{B}a$, gdzie $f_{(k)}$ jest k-tym współczynnikiem w definicji Peano. W pracy wprowadziłem pojęcie $\mathcal{I}$-aproksymatywnej pochodnej Peano. Mówimy, że funkcja rzeczywista f określona w pewnym otoczeniu punktu x ma $\mathcal{I}$-aproksymatywną pochodną Peano rzędu k, jeśli istnieją liczby $f_{(1)\mathcal{I}-ap}(x), \ldots, f_{(k)\mathcal{I}-ap}(x)$ i zbiór E o własności Baire'a, taki, że x jest punktem $\mathcal{I}$-gęstości zbioru E oraz

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\in E}} \frac{f(x+t)-f(x)-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{t^i}{i!}f_{(i)\mathcal{I}-ap}(x)}{t^k}=0.$$

Udowodniłem, że jeśli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma własność Baire'a, to dla dowolnego $k\in\mathbb{N}$ zbiór $E_k=\{x\in\mathbb{R}: f_{(k)\mathcal{I}-ap}(x)$ istnieje$\}\in\mathcal{B}a$ oraz funkcja $f_{(k)\mathcal{I}-ap}$ ma własność Baire'a. W mojej pierwszej pracy [1] , wykorzystując własność S. Piccard o niepustym wnętrzu sumy algebraicznej dwóch zbiorów II kategorii o własności Baire'a zbadałem, jaka jest dopuszczalna postać każdego ze zbiorów przeliczalnej rodziny, stanowiącej rozkład przestrzeni $\mathbb{R}^n$, przy założeniu, że zbiory tej rodziny mają własność Baire'a i spełniają warunek addytywności. Stanowi to uogólnianie twierdzenia M. Kuczmy uzyskanego dla dwóch zbiorów: A i $\mathbb{R}^n\setminus A$.

Spis publikacji

[1] J. Hejduk, *"Some properties of subsets of R^k with the Baire property"*, Folia Mathematica 1 (1984), 25–33.

[2] J. Hejduk, *"On σ-ideal generated by two totally imperfects σ-ideals"*, Radovi Matematički 3 (1987), 229–233.

[3] J. Hejduk, *"Convergence with respect to the Mycielski σ-ideal"*, Demonstratio Math. 22 (1) (1989), 43–50.

[4] J. Hejduk, *"Universal sequences in the space of real measurable functions"*, Scientific Bulletin of Łódź Technical University 21 (1989), 75–85.

[5] J. Hejduk, *"Some properties of topological σ-ideals"*, Demonstratio Math. 22 (4) (1989), 1183–1189.

[6] J. Hejduk, E. Wajch, *"Compactness in the sense of the convergence with respect to a small system"*, Math. Slovaca 3 (1989), 267–275 (Journal Impact Factor 2017: 0,314).

[7] M. Balcerzak, J. E. Baumgartner, J. Hejduk, *"On certain σ-ideal of sets"*, Real Analysis Exchange 14 (1988-89), 447–453.

[8] J. Hejduk, *"Some remarks on Lusin theorem in the abstract sense"*, XXXV semester in Banach–Center, December 1990, 2–8.

[9] J. Hejduk, *"Convergence with respect to some σ-ideals"*, Univ.u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat.Fak. Ser. Mat. 21 (1) (1991), 157–164.

[10] J. Hejduk, E. Wajch, *"A characterization of compactness in the sense of convergence with respect to a σ-ideal"*, Radovi Matematički 7 (1991), 5–9.

[11] J. Hejduk, *"Some remarks on Egoroff's theorem"*, Folia Mathematica 4 (1991), 41–50.

[12] J. Hejduk, *"Convergence of multi-index functions"*, Folia Mathematica 5 (1992), 31–38.

[13] J. Hejduk, *"Non-Baire sets in category bases"*, Real Analysis Exchange 18 (2) (1993-93), 448–453.

[14] M. Balcerzak, J. Hejduk, W. Wilczyński, S. Wroński, *"Why only measure and cathegory?"*, Scientific Bulletin of Łódź Technical University 26 (1994), 89–94.

[15] M. Balcerzak, J. Hejduk, *"Density topologies for products of σ-ideals"*, Real Analysis Exchange 20 (1) (1994-95), 163–177.

[16] J. Hejduk, *"On Lusin theorem in the aspect of small system"*, Demonstratio Math. 28 (1) (1995), 107–110.

[17] J. Hejduk, *"Convergence with respect to the σ-ideal of meager sets in separable category bases"*, Demonstratio Math. 28 (3) (1995), 619–623.

[18] J. Hejduk, *"Non-Baire unions in category bases"*, Georgian Math. J. 6 (1995), 543–546 (Journal Impact Factor 2017: 0,482).

[19] J. Hejduk, A. B. Kharazishvili, *"On density topologies generated by ideals"*, Folia Mathematica 7 (1995), 51–62.

[20] J. Hejduk, A. B. Kharazishvili, *"On density points with respect to von Neumann topology"*, Real Analysis Exchange 21 (1) (1995-96), 278–291.

[21] J. Hejduk, *"On the density topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Real Analysis Exchange 21 (2) (1995-96), 811–816.

[22] J. Hejduk, *"Convergence with respect to F_σ-supported σ-ideals"*, Colloq. Math. 72 (2) (1997), 363–368 (Journal Impact Factor 2017: 0,420).

[23] J. Hejduk, *"Density topologies with respect to invariant σ-ideals"*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1997.

[24] J. Hejduk, *"On the Peano derivative of functions having the Baire property"*, Demonstratio Math. 31 no. 3 (1998), 663–668.

[25] J. Hejduk, *"Some properties of the density topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Math. Pannon. 9 no. 2 (1998), 173–180.

po uzyskaniu stopnia doktora habilitowanego

[26] M. Filipczak, J. Hejduk, *"On some extensions of σ-finite measures"*, Math. Pannon. 13/2 (2002), 287–292.

[27] J. Hejduk, *"On topologies with respect to invariant σ- ideals"*, Journal of Applied Analysis, vol.8, No. 2 (2002), 201–219.

[28] J. Hejduk, S. Lindner, *"On the Hashimoto topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 24 (2002), 147–153.

[29] J. Hejduk, G. Horbaczewska, *"On I-density topology with respect to a fixed sequence"*, Reports on Real Analysis, Słupsk (2003), 78–85.

[30] M. Filipczak, J. Hejduk, *"On topologies associated with Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 part II (2004), 187–197.

[31] M. Filipczak, T. Filipczak, J. Hejduk, *"On the comparison of the density type topologies"*, Atti. Semin. Mat. fis. Univ. Modena Reggio Emilia 52 no. 1 (2004), 37–46.

[32] M. Filipczak, J. Hejduk, W. Wilczyński, *"On the homeomorphisms of the density type topologies"*, Comment. Math., Prace Mat. 45 no. 2 (2005), 151–159.

[33] J. Hejduk, *"On the cardinality size of the homeomorphisms density type topologies"*, Tatra Mt. Math. Publ. 34 part I (2006), 135–139.

[34] J. Hejduk, *"Remarks on the density topologies generated by functions"*, Słupskie Prace Matematyczno - Fizyczne No. 4 (2007), 39–46.

[35] J. Hejduk, A. Loranty, *"On the lower and semi-lower density operators"*, Georgian Math. J. vol. 14 No. 4 (2007), 661–671 (Journal Impact Factor 2017: 0,482).

[36] J. Hejduk, *"On the density topologies generated by functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 40 (2008), 133–141.

[37] J. Hejduk, *"One more difference between measure and category"*, Tatra Mt. Math. Publ. 49 (2011), 9–15 (artykuł indeksowany w Web of Science).

[38] J. Hejduk, R. Wiertelak, *"Continuous Functions in $I(J)$-Density Topologies"*, Real Analysis Exchange 36 (2) (2011), 463–471.

[39] K. Flak, J. Hejduk, *"On the universal σ-ideals"*, rozdział w monografii: Real functions, density topology and selected topics, Łódź University Press (2011), 77–82.

[40] J. Hejduk, *"On the abstract density topologies"*, selected papers of the 2010 International Conference on Topology and its Application, (2012), 79–85.

[41] J. Hejduk, A. Loranty, *"Remarks on the topologies in the Lebesgue measurable sets"*, Demonstratio Math. vol. 45 (3) (2012), 655–663.

[42] K. Flak, Hejduk, *"On the topologies generated by some operators"*, Cent. European J. of Math. no. 2 (2013), 349–357 (Journal Impact Factor 2016: 0,489).

[43] M. Górajska, J. Hejduk, *"Pointwise density topology with respect to admissible σ-algebras"*, Tatra Mt. Math. Publ. 55 (2013), 77–83 (artykuł indeksowany w Web of Science).

[44] J. Hejduk, *"On the regularity of topologies in the family of sets having the Baire property"*, Filomat 27 no. 7 (2013), 1291–1295 (Journal Impact Factor 2017: 0,635).

[45] J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the abstract density topologies generated by lower and almost lower density operators"*, rozdział w monografii: Traditional and present - day topics in real analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódz, 2013, 431–447.

[46] J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the generalization of density topologies on the real line"*, Math. Slovaca 64 no. 5 (2014), 1267–1276 (Journal Impact Factor 2017: 0,314).

[47] J. Hejduk, *"On topologies in the family of sets with the Baire property"*, Georgian Math. J no. 2 (2015), 243–250 (Journal Impact Factor 2017: 0,482).

[48] J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"On the density points on the real line with respect to sequences tending to zero"*, rozdział w monografii: Monograph on the occasion of 100th birthday anniversary of Zygmunt Zahorski, Wydaw. Politechniki Śl., Gliwice, 2015, 141–154.

[49] J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"J-approximately continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 62 (2015), 45–55.

[50] K. Flak, J. Hejduk, *"On equivalence of topological and restrictional continuity"*, rozdział w monografii: Modern Real Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, 2015, 61–68.

[51] J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"On J-continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 49–59 (artykuł indeksowany w Web of Science).

[52] J. Hejduk, R. Wiertelak, W. Wojdowski, *"On semiregularization of some abstract density topologies involving sets having the Baire property"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 37–48 (artykuł indeksowany w Web of Science).

[53] J. Hejduk, W. Wilczyński, W. Wojdowski, *"On semiregularization of the density - type topologies"*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódz, vol. LXVI (2016), 91–103.

[54] M. Górajska, J. Hejduk, *"On the structure of the poitwise density sets on the real line"*, Filomat 30 (2016), 49–59 (Journal Impact Factor 2017: 0,635).

[55] K. Flak, J. Hejduk, S. Tomczyk, *"On some density topology with respect an extension of Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 68 (2017), 1–9.

[56] J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On some properties of J-appropximately continuous functions"*, Math. Slovaca 67 no. 6 (2017), 1–10 (Journal Impact Factor 2017: 0,314).

[57] J. Hejduk, A. Loranty, *"On abstract and almost abstract density topologies"*, Acta Math. Hungarica 155 no.2 (2018), 228–240 (Journal Impact Factor 2017: 0,481).

[58] J. Hejduk, S. Lindner, A. Loranty, *"On lower density type operators and topologies generated by them"*, Filomat 32 no. 14 (2018), 4949–4957 (Journal Impact Factor 2017: 0,635).

[59] J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On topologies related to the extension of Lebesgue measure"*, to appear in Georgian Math. J. https://doi.org/10.1515/gmj-2018-0050 (Journal Impact Factor 2017: 0,482).

5 Lista publikacji wraz z liczbą cytowań

Źródło dotyczy trzech baz: Mathscinet, Web of Science i Google Scholar.

- Baza Mathscinet podaje 58 cytowań przez 32 Autorów, w tym 7 autocytowań. Indeks Hirscha według tej bazy wynosi 5.

- Baza Web of Sience podaje 71 cytowań przez 32 Autorów, w tym 10 autocytowań. Indeks Hirscha według tej bazy wynosi 5.

- Baza Google Scholar podaje 179 cytowań przez 47 Autorów. Indeks Hirscha według tej bazy wynosi 8.

Dodatkowo Baza Web of Science pozwala na wygenerowanie zestawienia liczby cytowań przez poszczególnych Autorów (w nawiasie zaznaczono liczbę cytowań):

- M. Balcerzak (2)
- A. Bartoszewicz (1)
- K. Czudek (1)
- M. Filipczak (5)
- T. Filipczak (4)
- K. Flak (1)
- M. Grinc (1)
- J. Hejduk (10)
- G. Horbaczewska (5)
- G. Ivanova (1)
- A. Karasińska (1)
- A. S. Kechris (1)
- E. Kotlicka (1)
- A. Kowalski (1)
- A. Kwela (1)
- J. A. Larson (1)
- S. Lindner (4)
- A. Loranty (4)
- N. D. Macheras (1)
- N. Mrożek (1)
- R. J. Pawlak (1)
- S. Shelah (1)
- S. Solecki (1)
- J. Steprans (1)
- W. Strauss (1)
- F. Strobin (2)
- M. Terepeta (4)
- E. Wajch (1)
- R. Wiertelak (7)
- W. Wilczyński (2)
- W. Wojdowski (2)
- W. Wołoszyn (1)

Z informacji zamieszczonych w Web of Science wynika, że publikacje cytowane są w artykułach zamieszczonych w następujących czasopismach/seriach wydawniczych:

- Acta Mathematica Hungarica
- Archive For Mathematical Logic
- Bulletin of the American Mathematical Society
- Bulletin of the Australian Mathematical Society
- Central European Journal of Mathematics
- Czechoslovak Mathematical Journal
- Filomat

- Georgian Mathematical Journal
- Israel Journal of Mathematics
- Journal of Symbolic Logic
- Lithuanian Mathematical Journal
- Mathematica Slovaca
- Mathematical Logic Quarterly
- Positivity
- Publicationes Mathematicae Debrecen
- Real Function 09 Measure Integration Harmonic Analysis Topology and Mathematical Economics
- Real Function 08 Functional Equations Measure Integration and Harmonic Analysis Topology
- Real Functions 10
- Real Function 15 Measure Theory Real Functions General Topology
- Tatra Mountains Mathematical Publications
- Topology and its Aplications

Poniżej zamieszczone są spisy publikacji wraz z liczbą cytowań w poszczególnych bazach.

5.1 Cytowania prac według bazy Mathscinet

Lista publikacji wraz z liczbą cytowań według bazy Mathscinet:

i) M. Filipczak, J. Hejduk, *"On topologies associated with Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 part II (2004), 187–197 – praca cytowana 13 razy.

ii) M. Filipczak, T. Filipczak, J. Hejduk, *"On the comparison of the density type topologies"*, Atti. Semin. Mat. fis. Univ. Modena Reggio Emilia 52 no. 1 (2004), 37–46 – praca cytowana 7 razy.

iii) M. Balcerzak, J. Hejduk, *"Density topologies for products of σ-ideals"*, Real Analysis Exchange 20 (1) (1994-95), 163–177 – praca cytowana 6 razy.

iv) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the generalization of density topologies on the real line"*, Math. Slovaca 64 no. 5 (2014), 1267–1276 – praca cytowana 6 razy.

v) J. Hejduk, *"On density topologies with respect to invariant σ- ideals"*, Journal of Applied Analysis, vol.8, No.2 (2002), 201–219 – praca cytowana 5 razy.

vi) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the abstract density topologies generated by lower and almost lower density operators"*, rozdział w monografii: Traditional and present - day topics in real analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódz, 2013, 431–447 – praca cytowana 4 razy.

vii) M. Balcerzak, J. E. Baumgartner, J. Hejduk, *"On certain σ-ideal of sets"*, Real Analysis Exchange 14 (1988-89), 447–453 – praca cytowana 2 razy.

viii) M. Filipczak, J. Hejduk, W. Wilczyński, *"On the homeomorphisms of the density type topologies"*, Comment. Math., Prace Mat. 45 no. 2 (2005), 151–159 – praca cytowana 2 razy.

ix) J. Hejduk, *"Remarks on the density topologies generated by functions"*, Słupskie Prace Matematyczno - Fizyczne No. 4 (2007), 39–46 – praca cytowana 2 razy.

x) J. Hejduk, *"One more difference between measure and category"*, Tatra Mt. Math. Publ. 49 (2011), 9–15 – praca cytowana 2 razy.

xi) J. Hejduk, *"Convergence with respect to the Mycielski σ-ideal"*, Demonstratio Math. 22 (1) (1989), 43–50 – praca cytowana 1 raz.

xii) J. Hejduk, S. Lindner, *"On the Hashimoto topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 24 (2002), 147–153 – praca cytowana 1 raz.

xiii) J. Hejduk, *"On the density topologies generated by functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 40 (2008), 133–141 – praca cytowana 1 raz.

xiv) J. Hejduk, A. Loranty, *"Remarks on the topologies in the Lebesgue measurable sets"*, Demonstratio Math. vol. 45 (3) (2012), 655–663 – praca cytowana 1 raz.

xv) J. Hejduk, *"On the regularity of topologies in the family of sets having the Baire property"*, Filomat 27 no. 7 (2013), 1291–1295 – praca cytowana 1 raz.

xvi) J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"On J-continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 49–59 – praca cytowana 1 raz.

xvii) J. Hejduk, R. Wiertelak, W. Wojdowski, *"On semiregularization of some abstract density topologies involving sets having the Baire property"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 37–48 – praca cytowana 1 raz.

5.2 Cytowania prac według bazy Web of Science

Lista publikacji wraz z liczbą cytowań według bazy Web of Science:

i) M. Filipczak, J. Hejduk, *"On topologies associated with Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 (2004), part II, 187–197 – cytowana w 15 pracach.

ii) M. Filipczak, T. Filipczak, J. Hejduk, *"On the comparison of the density type topologies"*, Atti. Semin. Mat. fis. Univ. Modena Reggio Emilia 52 no. 1 (2004), 37–46 – cytowana w 7 pracach.

iii) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the generalization of density topologies on the real line"*, Math. Slovaca 64 no. 5 (2014), 1267–1276 – cytowana w 8 pracach.

iv) J. Hejduk, G. Horbaczewska, *"On I-density topology with respect to a fixed sequence"*, Reports on Real Analysis, Słupsk (2003), 78–85 – cytowana w 5 pracach

v) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the abstract density topologies generated by lower and almost lower density operators"*, rozdział w monografii: Traditional and present - day topics in real analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódz, 2013, 431–447 – cytowana w 5 pracach.

vi) M. Balcerzak, J. Hejduk, *"Density topologies for products of σ-ideals"*, Real Analysis Exchange 20 (1) (1994-95), 163–177 – cytowana w 4 pracach.

vii) J. Hejduk, A. Loranty, *"On the lower and semi-lower density operators"*, Georgian Math. J. vol. 14 No. 4 (2007), 661–671 – cytowana w 4 pracach.

viii) J. Hejduk, *"One more difference between measure and category"*, Tatra Mt. Math. Publ. 49 (2011), 9–15 – cytowana w 4 pracach.

ix) J. Hejduk, *"On the regularity of topologies in the family of sets having the Baire property"*, Filomat 27 no. 7 (2013), 1291–1295 – cytowana w 4 pracach.

x) M. Balcerzak, J. E. Baumgartner, J. Hejduk *"On certain σ-ideal of sets"*, Real Analysis Exchange 14 (1988-89), 447–453 – cytowana w 3 pracach.

xi) J. Hejduk, *"On the density topologies generated by functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 40 (2008), 133–141 – cytowana w 3 pracach.

xii) M. Filipczak, J. Hejduk, W. Wilczyński, *"On the homeomorphisms of the density type topologies"*, Comment. Math., Prace Mat. 45 no. 2 (2005), 151–159 – cytowana w 3 pracach.

xiii) J. Hejduk, *"On the abstract density topologies"*, selected papers of the 2010 International Conference on Topology and its Application, (2012), 79–85 – cytowana w 3 pracach

xiv) J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"On J-continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 49–59 – cytowana w 3 pracach.

xv) J. Hejduk, A. Loranty, *"Remarks on the topologies in the Lebesgue measurable sets"*, Demonstratio Math. vol. 45 (3) (2012), 655–663 – cytowana w 2 pracach.

xvi) J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"J-approximately continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 62 (2015), 45–55 – cytowana w 2 pracach.

xvii) J. Hejduk, A. B. Kharazishvili, *"On density points with respect to von Neumann topology"*, Real Analysis Exchange 21 (1) (1995-96), 278–291 – cytowana w 1 pracy.

xviii) J. Hejduk, *"Universal sequences in the space of real measurable functions"*, Scientific Bulletin of Łódź Technical University 21 (1989), 75–85 – cytowana w 1 pracy.

xix) J. Hejduk, *"Some properties of topological σ-ideals"*, Demonstratio Math. 22 (4) (1989), 1183–1189 – cytowana w 1 pracy.

xx) J. Hejduk, E. Wajch, *"Compactness in the sense of the convergence with respect to a small system"*, Math. Slovaca 3 (1989), 267–275 – cytowana w 1 pracy.

xxi) J. Hejduk, *"On Lusin theorem in the aspect of small system"*, Demonstratio Math. 28 (1) (1995), 107–110 – cytowana w 1 pracy.

xxii) J. Hejduk, *"On the density topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Real Analysis Exchange 21 (2) (1995-96), 811–816 – cytowana w 1 pracy.

xxiii) J. Hejduk, *"Density topologies with respect to invariant σ-ideals"*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 1997 – cytowana w 1 pracy.

xxiv) J. Hejduk, S. Lindner, *"On the Hashimoto topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 24 (2002), 147–153 – cytowana w 1 pracy.

xxv) K.Flak, J. Hejduk, *"On the topologies generated by some operators"*, Cent. European J. of Math. no. 2 (2013), 349–357 – cytowana w 1 pracy.

xxvi) J. Hejduk, R. Wiertelak, W. Wojdowski, *" On semiregularization of some abstract density topologies involving sets having the Baire property"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 37–48 – cytowana w 1 pracy.

5.3 Cytowania prac według bazy Google Scholar

Lista publikacji wraz z liczbą cytowań według bazy Google Scholar:

i) M. Filipczak, J. Hejduk, *"On topologies associated with Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 (2004), part II, 187–197 – praca cytowana 32 razy.

ii) M. Filipczak, T. Filipczak, J. Hejduk, *"On the comparison of the density type topologies"*, Atti. Semin. Mat. fis. Univ. Modena Reggio Emilia 52 no. 1 (2004), 37–46 – praca cytowana 20 razy.

iii) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the generalization of density topologies on the real line"*, Math. Slovaca 64 no. 5 (2014), 1267–1276 – praca cytowana 12 razy.

iv) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On the abstract density topologies generated by lower and almost lower density operators"*, rozdział w monografii: Traditional and present - day topics in real analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódz, 2013, 431–447 – praca cytowana 11 razy.

v) J. Hejduk, G. Horbaczewska, *"On I-density topology with respect to a fixed sequence"*, Reports on Real Analysis, Słupsk (2003), 78–85 – praca cytowana 10 razy.

vi) M. Balcerzak, J. Hejduk, *"Density topologies for products of σ-ideals"*, Real Analysis Exchange 20 (1) (1994-95), 163–177 – praca cytowana 10 razy.

vii) J. Hejduk, *"On topologies with respect to invariant σ- ideals"*, Journal of Applied Analysis, vol. 8, No. 2 (2002), 201–219 – praca cytowana 8 razy.

viii) J. Hejduk, A. B. Kharazishvili, *"On density points with respect to von Neumann topology"*, Real Analysis Exchange 21 (1) (1995-96), 278–291 – praca cytowana 8 razy.

ix) J. Hejduk, A. Loranty, *"On the lower and semi-lower density operators"*, Georgian Math. J. vol. 14 No. 4 (2007), 661–671 – praca cytowana 6 razy.

x) M. Filipczak, J. Hejduk, W. Wilczyński, *"On the homeomorphisms of the density type topologies"*, Comment. Math., Prace Mat. 45 no. 2 (2005), 151–159 – praca cytowana 6 razy.

xi) M. Balcerzak, J. E. Baumgartner, J. Hejduk *"On certain σ-ideal of sets"*, Real Analysis Exchange 14 (1988-89), 447–453 – praca cytowana 6 razy.

xii) J. Hejduk, *"One more difference between measure and category"*, Tatra Mt. Math. Publ. 49 (2011), 9–15 – praca cytowana 5 razy.

xiii) J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"On J-continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 49–59 – praca cytowana 4 razy.

xiv) J. Hejduk, *"On the regularity of topologies in the family of sets having the Baire property"*, Filomat 27 no. 7 (2013), 1291–1295 – praca cytowana 4 razy.

xv) J. Hejduk, *"On the density topologies generated by functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 40 (2008), 133–141 – praca cytowana 4 razy.

xvi) J. Hejduk, A. Loranty, R. Wiertelak, *"J-approximately continuous functions"*, Tatra Mt. Math. Publ. 62 (2015), 45–55 – praca cytowana 3 razy.

xvii) J. Hejduk, *"On the density topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Real Analysis Exchange 21 (2) (1995-96), 811–816 – praca cytowana 3 razy.

xviii) J. Hejduk, A. Loranty, *"Remarks on the topologies in the Lebesgue measurable sets"*, Demonstratio Math. vol. 45 (3) (2012), 655–663 – praca cytowana 2 razy.

xix) J. Hejduk, *"Some properties of the density topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Math. Pannon. 9 no. 2 (1998), 173–190 – praca cytowana 2 razy.

xx) J. Hejduk, *"Non-Baire sets in category bases"*, Real Analysis Exchange 18 (2) (1993-93), 448–453 – praca cytowana 2 razy.

xxi) J. Hejduk, E. Wajch, *"Compactness in the sense of the convergence with respect to a small system"*, Math. Slovaca 3 (1989), 267–275 – praca cytowana 2 razy.

xxii) J. Hejduk, *"Convergence with respect to the Mycielski σ-ideal"*, Demonstratio Math. 22 (1) (1989), 43–50 – praca cytowana 2 razy.

xxiii) J. Hejduk, A. Loranty, *"On abstract and almost abstract density topologies"*, Acta Math. Hungarica 155 no.2 (2018), 228–240 – praca cytowana 1 raz.

xxiv) J. Hejduk, R. Wiertelak, *"On some properties of J-appropximately continuous functions"*, Math. Slovaca 67 no. 6 (2017), 1–10 – praca cytowana 1 raz.

xxv) J. Hejduk, R. Wiertelak, W. Wojdowski, *" On semiregularization of some abstract density topologies involving sets having the Baire property"*, Tatra Mt. Math. Publ. 65 (2016), 37–48 – praca cytowana 1 raz.

xxvi) J. Hejduk, *"On topologies in the family of sets with the Baire property"*, Georgian Math. J no. 2 (2015), 243–250– praca cytowana 1 raz.

xxvii) K. Flak, J. Hejduk, *"On equivalence of topological and restrictional continuity"*, rozdział w monografii: Modern Real Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódz, 2015, 61–68 – praca cytowana 1 raz.

xxviii) J. Hejduk, K. Flak, *"On the topologies generated by some operators"*, Cent. European J. of Math. no. 2 (2013), 349–357 – praca cytowana 1 raz.

xxix) J. Hejduk, S. Lindner, *"On the Hashimoto topology with respect to an extension of the Lebesgue measure"*, Tatra Mt. Math. Publ. 24 (2002), 147–153 – praca cytowana 1 raz.

xxx) J. Hejduk, *"On Lusin theorem in the aspect of small system"*, Demonstratio Math. 28 (1) (1995), 107–110 – praca cytowana 1 raz.

xxxi) J. Hejduk, *"Convergence with respect to the σ-ideal of meager sets in separable category bases"*, Demonstratio Math. 28 (3) (1995), 619–623 – praca cytowana 1 raz.

xxxii) J. Hejduk, *"Convergence with respect to some σ-ideals"*, Univ.u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat.Fak. Ser. Mat. 21 (1) (1991), 157–164 – praca cytowana 1 raz.

xxxiii) J. Hejduk, *"Some properties of topological σ-ideals"*, Demonstratio Math. 22 (4) (1989), 1183–1189 – praca cytowana 1 raz.

5.4 Cytowania prac w monografiach

- W monografii: B. Riečan, T. Neubrun, *"Integral, measure and ordering"*, Bratislava, Kluver Academic Publishers 1997;

cytowane prace:

i) J. Hejduk, E. Wajch, *"Compactness in the sense of the convergence with respect to a small system"*, Math. Slovaca 3 (1989), 267–275.

ii) J. Hejduk, *"Some remarks on Lusin theorem in the abstract sense"*, XXXV semester in Banach–Center, December 1990, 2–8.

iii) J. Hejduk, *"On Lusin theorem in the aspect of small system"*, Demonstratio Math. 28 (1) (1995), 107–110.

- W monografii: A. B. Kharazishvili, *"Nonmeasurable sets and functions"*, Amsterdam, Elsvier 2004;

cytowana praca:

J. Hejduk, A. B. Kharazishvili, *"On density points with respect to von Neumann topology"*, Real Analysis Exchange 21 (1) (1995-96), 278–291.

6 Osiągnięcia w zakresie opieki naukowej i kształcenia młodej kadry

Zakończone postępowania o nadanie stopnia doktora, w których byłem promotorem:

1. dr Sebastian Lindner, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia: 2003.
   Tytuł rozprawy: *O pewnych własnościach miar uzyskanych przez wahanie.*

2. dr Anna Loranty, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia: 2005.
   Tytuł rozprawy: *O topologiach gęstości indukowanych przez niemalejące i nieograniczone ciągi liczb dodatnich.*

3. dr Renata Wiertelak, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia: 2008.
   Tytuł rozprawy: *Topologie gęstości generowane przez ciągi przedziałów zbieżne do zera.*

4. dr Magdalena Górajska, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia: 2011. Tytuł rozprawy: *Topologie punktowej gęstości.*

Otwarte przewody doktorskie, w których uczestniczę, jako promotor:

1. mgr Mikołaj Widzibor, Uniwersytet Łódzki, przewód otwarty w lutym 2019 roku. Tytuł rozprawy: *O topologiach generowanych przez regularne ciągi zbiorów mierzalnych.*

Sporządzone recenzje w przewodach doktorskich:

1. dr Monika Marciniak, Uniwersytet Łódzki, 2000. Rozprawa pod tytułem: *Własności funkcji względem systemów ścieżek.*
2. dr Joanna Rzepecka, Politechnika Łódzka, 2003. Rozprawa pod tytułem: *Reprezentacje Marczewskiego-Burstina pewnych algebr i ideałów zbiorów.*
3. dr Monika Potyrała, Politechnika Łódzka, 2006. Rozprawa pod tytułem: *O pewnych własnościach i modyfikacjach całki Birkhoffa.*
4. dr Marta Frankowska, Uniwersytet Gdański, 2013. Rozprawa pod tytułem: *Wybrane własności topologii na przykładzie pewnego ideału.*

W latach 2011–2016 byłem opiekunem naukowym Mikołaja Widzibora na Międzywydziałowych Studiach Matematyczno-Przyrodniczych w Uniwersytecie Łódzkim.

Byłem promotorem ponad 35 prac magisterskich i recenzentem ponad 75 prac magisterskich.

Od 2012 roku jestem członkiem Rady Programowej Międzywydziałowych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych w Uniwersytecie Łódzkim.

Dwukrotnie byłem członkiem komisji habilitacyjnych oraz pięciokrotnie zostałem powołany na sekretarza komisji habilitacyjnych.

7 Działalność popularyzująca naukę

W latach 2011-2018 w ramach programu Erasmus i Erasmus+ odbyłem tygodniowe pobyty na Uniwersytecie w Joaninie w Grecji, w Mersin, Adanie i Stambule w Turcji, w Santiago de Compostela i Grenadzie w Hiszpanii, w Palermo we Włoszech oraz w Sibiu w Rumunii. W bieżącym roku zakwalifikowałem się na wyjazd do Goce Delcev State University Stip w Macedonii. Podczas pobytów, oprócz referatów naukowych związanych z bieżącą tematyką badawczą i zajęć dydaktycznych, w spotkaniach nieformalnych opowiadałem o roli polskich matematyków w złamaniu Enigmy i fenomenie polskiej szkoly matematycznej. Na uniwersytecie w Palermo, Ankarze i Sibiu przedstawiłem dwa wykłady na temat:

- *On the contribution of the Polish mathematicians into breaking Enigma*
- *On the Polish mathematical School.*

Brałem udział w Festiwalu Nauki, Techniki i Sztuki organizowanym przez Uniwersytet Łódzki, wygłaszając referaty:

- *O dociekliwości matematycznej na przykładzie nierówności Bernoulliego*
- *Dlaczego doceniamy niestandardowe rozwiązania zadań matematycznych?*
- *O różnorodnych podziałach mandatów*
- *Jak dzielimy mandaty w polskim parlamencie po przeprowadzonych wyborach?*

W latach 2002–2008 prowadziłem akcję "Otwarte drzwi" dla maturzystów zainteresowanych studiami matematycznymi i informatycznymi w Uniwersytecie Łódzkim.

W 2017 roku przedstawiłem wykład inauguracyjny na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ na temat: *Od urny wyborczej do mandatu w polskim parlamencie*. W 2018 roku podobny wykład zaprezentowałem na spotkaniu Łodzkiego Towarzystwa Naukowego.

W marcu 2019 roku przedstawiłem komentarz (w formie filmu emitowanego na kanale You Tube Uniwersytetu Łódzkiego) na temat złamania kodu Enigmy przez polskich matematyków w kontekscie wydanego poskiego tłumaczenia monografii Dermonta Turinga "XYZ. Prawdziwa historia złamania szyfru Enigma". Nagranie odbyło się w ramach projektu "UŁ komentuje", w którym wykładowcy i absolwenci Uniwersytetu Łódzkiego komentują bieżące wydarzenia w Polsce i na świecie.

8 Działalność organizacyjna

Od 1984 roku do 2002 roku byłem sekretarzem w Komitecie Redakcyjnym czasopisma Folia Mathematica wydawanego przez Uniwersytet Łódzki.

W okresie 2003 - 2012 pełniem funkcję Radaktora czasopisma Folia Mathematica.

W 1989 roku pełniłem funkcję sekretarza podczas semestru poświęconemu Analizie Rzeczywistej w Centrum Banacha w Warszawie.

W 1994 roku byłem współorganizatorem odbywających się w Łodzi polsko-amerykańskich warsztatów przy udziale Katedry Funkcji Rzeczywistych.

W 1999 roku byłem współorganizatorem odbywającej się w Łodzi międzynarodowej konferencji Summer Symposium in Real Analysis XXIII "The Lodz Symposium".

W kadencji 2002–2005 pełniłem funkcję Prodziekana ds. studenckich na Wydziale Matematyki UŁ.

W kadencji 2005–2008 pełniłem funkcję Prodziekana ds. studenckich na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ.

Od 2008 roku, do chwili obecnej, jestem przedstawicielem Wydziału Matematyki i Informatyki do Senatu UŁ w grupie pracowników samodzielnych.

W okresie 2008–2016 byłem członkiem Komisji Statutowej.

W 2015 roku zostałem powołany przez Rektora UŁ na członka Rady Naukowej serii wydawniczej "Publikacje młodych naukowców" na okres 2015–2016.

W 2016 roku zostalem powołany przez Rektora UŁ na członka Rady Wydawniczej

UŁ na kadencję 2016–2020.

Od 2016 roku jestem członkiem Rady Biznesu przy Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ.

W 2018 roku zostałem przyjęty do Łódzkiego Towarzystwa Naukowego.

W marcu 2019 roku zostałem powołany przez Rektora UŁ do reprezentowania Uniwersytetu w Radzie Naukowej Kasy Mianowskiego w Warszawie.