Antoni Pierzchalski

Autoreferat

Wstęp

Gradienty w sensie Steina i Weissa, będące nieredukowalnymi składnikami pochodnej kowariantnej, są operatorami różniczkowymi pierwszego rzędu. Dokładniej, rozważmy wiązkę wektorową E nad rozmaitością gładką M wymiaru n. Załóżmy że wiązka E jest wyposażona w pochodną kowariantną ∇, a także, że dana jest grupa Liego $\mathfrak{G}$ działająca jednocześnie na E i $T^*M \otimes E$ (taka grupa jest zawsze ściśle związana ze strukturą geometryczną rozmaitości M).

Wiązki E oraz $T^*M \otimes E$ rozkładają się - ze względu na działanie grupy $\mathfrak{G}$ - na sumę nieredukowalnych i niezmienniczych subwiązek. Zawężenie pochodnej kowariantnej ∇ do jednej z nieredukowalnych subwiązek wiązki E, złożone następnie z rzutem na wybraną nieredukowalną subwiązkę wiązki $T^*M \otimes E$, nazywamy $\mathfrak{G}$-*gradientem* lub *gradientem* Steina i Weissa grupy $\mathfrak{G}$. Szczegółowa definicja gradientu zostanie podana w ustępie 2.1. W autoreferacie główną rolę odgrywają $SO(n)$-gradienty, tj. gradienty grupy $\mathfrak{G} = SO(n)$ związanej ze strukturą riemannowską rozmaitości zorientowanej M oraz, w nieco mniejszym stopniu gradienty grupy $GL(n)$.

Mówiąc obrazowo, gradienty to najmniejsze cegiełki, z których zbudowana jest pochodna kowariantna.

$SO(n)$-gradienty zostały po raz pierwszy wprowadzone przez Steina i Weissa w roku 1968, w słynnym artykule *Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representations of the rotation group* [50], który rzucił nowe światło na teorię pochodnej kowariantnej. Podejście przedstawione przez Steina i Weissa dało silny impuls do rozwoju takich gałęzi matematyki jak: geometria, analiza globalna, teoria operatorów różniczkowych, czy wreszcie teoria reprezentacji grup i algebr Liego. Okazało się, że wiele badanych i naturalnych w geometrii riemannowskiej operatorów różniczkowych pierwszego rzędu jest gradientami bądź kombinacjami linowymi gradientów. Na przykład, gradientami są: operator różniczki zewnętrznej d, operator koróżniczki d^*, operator Cauchy'ego-Riemanna $\bar{\partial}$. Z kolei suma $d + d^*$ dwu gradientów d i d^* jest operatorem typu Diraca, złożenie którego z operatorem formalnie sprzężonym $d^* + d$ jest operatorem Hodge'a-Laplace'a $\Delta = dd^* + d^*d$.

Sama definicja gradientów, wskazuje na ich silny związek z geometrią rozmaitości (w istocie, z geometrią wyznaczoną przez grupę $\mathfrak{G}$). Co ciekawe, własności spektralne gradientów mogą nieść informacje o geometrii rozmaitości. Ze względu na swoje własności algebraiczne i analityczne, gradienty są wciąż obiektem badań i narzędziem do badania geometrii rozmaitości.

Teoria gradientów w sensie Steina i Weissa stanowi główny przedmiot zainteresowań pracy badawczej i dorobku autora.

Ogólnie mówiąc, moja praca naukowa z gradientami składa się z dwu etapów:

- Badanie gradientu Cauchy'ego-Ahlforsa w kontekście zastosowań w teorii deformacji i transformacji konforemnych i quasikonforemnych.

- Badanie gradientów - jako rodziny operatorów różniczkowych o interesujących własnościach algebraicznych, analitycznych i geometrycznych w szczególności: ich eliptyczność, zachowanie na brzegu i ich geometria.

Pierwszy nazwałbym etapem przed-habilitacyjnym a drugi po-habilitacyjnym, ale to nie jest takie proste, bo okres od złożenia pracy habilitacyjnej na początku roku 1997 do uzyskania stopnia doktora habilitowanego w grudniu 1999 roku trwał niemal trzy lata.

Te dwa obszary moich zainteresowań są niemal rozłączne jeśli rozważać je z punktu widzenia tematyki, lecz zachodzą na siebie, gdy patrzeć na nie z punktu widzenia chronologii publikacji.

Pierwsza tematyka, wiążąca się z zastosowaniami w teorii odwzorowań quasikonforemnych zakończyła się wraz z publikacją pracy habilitacyjnej [45] w roku 1997. Druga zaczęła się trochę wcześniej, lecz za formalny moment rozpoczęcia można uznać datę publikacji pracy [24] czyli rok 1996. Była to druga praca w cyklu prac o eliptyczności gradientów. Pierwsza, [23] wysłana do druku w roku 1995 ukazała się dwa lata później, więc formalnie na habilitację nie zachodzi. Żadna z tych prac nie jest cytowana w pracy habilitacyjnej [45], bo obie są z innej niż habilitacja tematyki. Ta nowa tematyka czyli badanie gradientów samych w sobie, wiąże się nierozerwalnie z moją aktywnością po-habilitacyjną. Tym samym pozwolę sobie umieścić obie prace [23] i [24] w opisie tej części mojej aktywności.

W mojej działalności naukowej współpracowałem z wieloma matematykami: Pawłem Walczakiem, Wojciechem Kozłowskim, Adamem Bartoszkiem, Małgorzatą Ciską i Anną Kimaczyńską (Uniwersytet Łódzki), Jerzym Kaliną i Bogdanem Balcerzakiem (Politechnika Łódzka), Bentem Ørstedem (Odense University a następnie Aarhus University, Dania), Thomasem Bransonem (Copenhagen University, Dania a następnie University of Iowa, USA), Peterem B. Gilkeyem (Oregon University, USA) and Genkaiem Zhangiem (Odense University a następnie University of Gothenburg, Szwecja). Z wieloma z nich współpraca trwa nadal.

Autoreferat składa z trzech części:

1. Przegląd wybranych prac
2. Przegląd wybranych wyników
3. Życiorys naukowy

W pierwszej, streściłem wyniki zawarte w wybranych przeze mnie 21 pracach. Opis jest tu skrótowy i ogólny. Naświetla jedynie to, co w znajduje się w poszczególnej pracy. Starałem się wyłącznie, opisać krótko i poglądowo najważniejsze rezultaty każdej z wybranych prac. Prace uszeregowane są w dwu grupach: do habilitacji (wraz z pracą habilitacyjną) i późniejsze. W każdej z tych grup, kolejność wynika z reguły: najpierw porządek tematyczny a następnie chronologiczny.

W drugiej części, zamieściłem wybrane przeze mnie wyniki. Są one tu sformułowane bardziej precyzyjnie niż w części pierwszej, tj. w formie twierdzeń. Jest ich 19. By wybrane twierdzenia stały się w miarę czytelne, zawarłem dodatkowo pewien materiał teoretyczny, zawierający niezbędne pojęcia i fakty. W tej części autoreferatu moje autorskie i współautorskie twierdzenia są wyróżnione napisem: twierdzenie (lemat, wniosek itp.) i opatrzone w nawiasie numerem, który jest odsyłaczem do pracy z której dane twierdzenie pochodzi. Dla odróżnienia, twierdzenia innych autorów, nie noszą nagłówka, lecz są wyróżnione w tekście kursywą.

Omawiane dwie części zamyka wykaz cytowanej literatury, który zawiera prace zarówno moje, jak i innych autorów.

W trzeciej części podaję mój życiorys naukowy, zawierający informacje, które mogą być przydatne do oceny mojej działalności już nie tylko *stricte* naukowej, ale także dydaktycznej, popularyzatorskiej, organizacyjnej itp. Tę część, a więc i cały autoreferat, zamyka lista moich publikacji.

1. Przegląd wybranych prac

1.1. Wybrane prace naukowe przed habilitacją i praca habilitacyjna

Prace: [40], [41], [42] and [43].

Prace te inspirowane są pracami L. Ahlforsa [1], [2], [3]. Studiował w nich operator liniowy S rzędu pierwszego zwany dziś operatorem Ahlforsa lub Cauchy'ego-Ahlforsa, działający na pola wektorowe w $\mathbb{R}^n$ następująco: dla dowolnego pola wektorowego $X = [X_1, \ldots, X_n]$, SX jest polem macierzowym o wyrazach

$$(SX)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x^j} + \frac{\partial X_j}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{n}\delta_{ij}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_k}{\partial x^k}, \tag{1}$$

Operator S odgrywa istotną rolę w teorii deformacji quasikonforemnych w $\mathbb{R}^n$.

Zauważyłem, że operator S, można w sposób niezmienniczy zdefiniować na dowolnej zorientowanej rozmaitości riemannowskiej M, $\dim M = n$ z metryką riemannowską g jako symetryczną i bezśladową część operatora pochodnej kowariantnej Leviego-Civity ∇. Ma wtedy dobre własności transformacyjne. W szczególności jest operatorem konforemnie kowariantnym, którego jądro składa się konforemnych pól Killinga. Zauważyłem, że S jest operatorem eliptycznym i że należy do klasy operatorów typu Steina i Weissa, która stanowi ważną klasę operatorów związanych z działaniem grupy $SO(n)$. Udowodniłem, że podobnie jak w przypadku płaskim norma operatora S jest dobrą miarą quasikonforemności w następującym sensie:

Jeśli $|SX| \leqslant k$, to X generuje jednoparametrową rodzinę transformacji quasikonforemnych $(\Psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ takich, że stała quasikonforemności transformacji Ψ_t nie przekracza $exp(\frac{1}{2}k^2)$.

Wyniki tych badań zamieszczone zostały w pracach [40] i [41]. Wykorzystałem je następnie do badania deformacji pseudo-konforemnych na hiperpowierzchniach rzeczywistych w przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^{n+1}$. Podałem oszacowania stałej quasikonforemności dowolnej takiej deformacji. Wyniki opublikowałem w "Mathematica Scandinavica" [42].

Dalsze badania operatora S oraz silnie eliptycznego i samosprzężonego operatora rzędu drugiego S^*S (gdzie S^* jest operatorem formalnie sprzężonym do S) zwanego laplasjanem Ahlforsa ujawniły szereg ich własności geometrycznych. W szczególności interesujący jest wzór opisujący relację laplasjanu Ahlforsa z operatorem Hodge'a-Laplace'a (Twierdzenie 2 w pracy [43]). We wzorze tym pojawia się bowiem tensor krzywizny Ricciego rozmaitości M. Wiąże to operator Ahlforsa z geometrią rozważanej rozmaitości.

Praca [44]

Przeniesienie operatora Cauchy'ego-Ahlforsa z $\mathbb{R}^n$ na rozmaitość riemannowską stworzyło nowe pole badań. Przede wszystkim umożliwiło badanie własności spektralnych. W przypadku rozmaitości zwartej, ten silnie eliptyczny operator ma bowiem dyskretne spektrum. Zostało ono wyznaczone w wielu przypadkach szczególnych. Możliwe stało się także oszacowanie normy operatora S w zależności od krzywizny Ricciego rozmaitości. Korzystając z kolei z tego, że stała quasikonforemności $c(X)$ dowolnej deformacji X jest funkcją normy pola tensorowego SX, wyznaczyłem wiele oszacowań tej stałej dla szerokiej klasy deformacji. Co więcej, zgodnie z twierdzeniem Bochnera (patrz [11]), na rozmaitości zwartej o ujemnej krzywiźnie Ricciego nie ma deformacji konforemnych. Z drugiej strony, każda deformacja X jest deformacją quasikonforemną o pewnej stałej $c(X)$, przy czym $c(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy X jest deformacją konforemną. Przy pewnej normalizacji na normę pola X otrzymałem oszacowania z dołu stałej $c(X)$ niezależne od X, a zależne wyłącznie od normy tensora Ricciego. Wyniki zostały opublikowane w "manuscripta mathematica".

Praca [33]

Wspólnie z B. Ørstedem zbadaliśmy rozwinięcie asymptotyczne jądra ciepła dla Laplasjanu Ahlforsa S^*S na zamkniętej rozmaitości riemannowskiej. Wyznaczyliśmy również spektrum operatora S^*S w przypadku sfery euklidesowej ([33]).

Prace [14], [15]

Wspólnie z T. P. Bransonem i P. B. Gilkey'em oraz w dalszych badaniach także z B. Ørstedem wyznaczyliśmy cztery początkowe wyrazy rozwinięcia asymptotycznego jądra ciepła dla operatorów różniczkowych, liniowych drugiego rzędu o niemetrycznym symbolu wiodącym, w szczególności dla laplasjanu Ahlforsa, zarówno na rozmaitości riemannowskiej zwartej bez brzegu (praca [15]) jak i na rozmaitości zwartej z brzegiem przy różnych warunkach brzegowych (praca [14]).

Praca [34]

W przypadku dowolnej rozmaitości riemannowskiej M z niepustym brzegiem, rozważyliśmy zagadnienia brzegowe dla laplasjanu Ahlforsa S^*S z warunkami brzegowymi analogicznymi do rozważanych przez H. Weyla w jego pracach z początku XX wieku o deformacjach ciał elastycznych w $\mathbb{R}^3$. Warunki te mają naturalną interpretację fizyczną. Dla każdego z tych warunków otrzymaliśmy rozkład asymptotyczny wartości własnych operatora S^*S na rozmaitości M, który stanowi dalekie uogólnienie głębokiego twierdzenia Weyla. Otrzymane przez nas współczynniki rozwinięcia, pokrywają się w przypadku płaskim $\mathbb{R}^3$, ze współczynnikami wyznaczonymi przez Weyla w pracy ([51]) z roku 1915.

Praca habilitacyjna [45]

Praca habilitacyjna rozszerza wyniki pracy [44] o geometrii laplasjanu Ahlforsa i w konsekwencji geometrii deformacji quasikonforemnych na zwarte rozmaitości z brzegiem. Na badane deformacje nakłada się w tym przypadku szereg warunków brzegowych. W tym przypadku, stała quasikonforemności zależy nie tylko (jak w przypadku rozmaitości zwartej bez brzegu) od krzywizny Ricciego lecz również od kształtu brzegu rozmaitości (drugiej formy podstawowej brzegu) oraz konkretnego warunku brzegowego spełnianego przez zadaną deformację.

1.2. Wybrane prace naukowe po pracy habilitacyjnej

Prace [23], [24]

W roku 1995 wspólnie J. Kaliną i P. Walczakiem podjęliśmy się rozwiązania otwartego problemu wyznaczenia i sklasyfikowania gradientów eliptycznych. Zagadnienie jest istotne, choćby z tego względu, że eliptyczność gradientu G, niesie za sobą silną eliptyczność operatora G^*G. Wspólnie prowadzane badania pozwoliły wyrazić problem w języku diagramów Younga – jednego z kluczowych narzędzi teorii reprezentacji grup. Tym samym zagadnienie analityczne zostało wyrażone za pomocą algebry. Podejście to pozwoliło nie tylko wykazać, że - dla danej nieredukowalnej wiązki tensorowej - wśród gradientów występujących w rozkładzie pochodnej, eliptyczny jest tylko jeden, ale również podać regułę znajdowania (wskazywania) gradientu eliptycznego.

W roku 1996 przy współpracy z B. Ørsetedem i G. Zhangiem wynik został wzmocniony w znaczący sposób w pracy [24]. Przeformułowanie na język teorii reprezentacji pozwoliło nadać mu nowe znaczenie i rozszerzyć go na znacznie większą klasę operatorów i grup Liego.

Wspomniane wyniki dotyczące eliptyczności gradientów, pozwoliły T. Bransonowi pójść jeszcze dalej. W 1997 roku dokonał on pełnej klasyfikacji gradientów eliptycznych i eliptycznych kombinacji liniowych gradientów w znakomitym artykule [12].

Artykuł ten ta wraz z omawianymi tu naszymi pracami [23] i [24] zamyka problem eliptyczności.

Nieopublikowany manuskrypt

Wspólnie z T. Bransonem pracowałem również, szczególnie w czasie mojego pobytu (jako *associate visiting professor*) na Uniwersytecie w Iowa, nad sformułowaniem uniwersalnego i kompletnego układu eliptycznych warunków brzegowych dla dowolnego gradientu. Współpraca ta była kontynuowana również po moim wyjeździe z USA. Nagła i przedwczesna śmierć profesora T. Bransona w roku 2006 przerwała współpracę. Niektóre z naszych wspólnych pomysłów były spisane w nieopublikowanym manuskrypcie. Zawierał on w szczególności konstrukcję układu naturalnych warunków brzegowych, ale właściwie nie zawierał żadnych twierdzeń. Konstrukcja jest uniwersalna w tym sensie, że działa w przypadku dowolnego $SO(n)$-gradientu niekoniecznie eliptycznego a także w przypadku innych operatorów różniczkowych. Nazwijmy ten układ warunków brzegowych skrótowo (SNBC) od angielskich słów: *System of Natural Boundary Conditions.* Kluczową rolę w konstrukcji (SNBC) odgrywa wzór całkowy (występujący w twierdzeniu 8 - wzmiankowanym w dalszej części autoreferatu i pochodzącym z mojej pracy wspólnej z B. Ørstedem). Konstrukcję układu (SNBC) i hipotezę o eliptyczności każdego z warunków układu dla gradientu eliptycznego przedstawiłem na konferencji poświęconej pamięci T. Bransona, która odbyła się w roku 2007 na Uniwersytecie Iowa, macierzystym uniwersytecie T. Bransona. Metoda konstrukcji (SNBC) została następnie opisana we wstępie do mojej pracy wspólnej z W. Kozłowskim [30], z roku 2008, z wyraźnym wskazaniem współautorstwa T. Bransona. W pracy z W. Kozłowskim badamy problemy brzegowe dla wagowego laplasjanu i wiązki form skośnych w kuli euklidesowej właśnie dla czterech naturalnych warunków brzegowych, które tworzą (SNBC) w tym przypadku.

Praca [30]

Problem brzegowy dla układu naturalnych warunków brzegowych (SNBC) został rozwiązany przy współpracy z W. Kozłowskim dla wagowego operatora Laplace'a

$$\Delta_{ab} = a\delta d + bd\delta \qquad a, b > 0$$

i dla wiązki form skośnych dowolnego stopnia w kuli euklidesowej w $\mathbb{R}^n$. Rozważane były cztery naturalne warunki brzegowe $\{\mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{N}\}$: Dirichleta, absolutny, relatywny i Neumanna. Warunek Dirichleta był wcześniej badany przez W. Kozłowskiego w jego pracy doktorskiej [29]. Układ wszystkich czterech warunków brzegowych został dokładnie zbadany. Wyłączając pewne wyjątkowe przypadki szczególne, udowodnione zostały twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań dla każdego z badanych warunków brzegowych. W przypadkach szczególnych podane zostały warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązań i oraz przedyskutowany został problem ich jednoznaczności.

Praca [27]

Problem brzegowy dla układu naturalnych warunków brzegowych (SNBC) został zbadany przy współpracy z A. Kimaczyńską dla operatora eliptycznego rzędu drugiego

$$\operatorname{div} \operatorname{grad}$$

i dla wiązki form symetrycznych dowolnego stopnia na rozmaitości riemannowskiej. Operator ten został zdefiniowany i zbadany przez A.Kimaczyńską w jej pracy doktorskiej [26]. Jeśli chodzi o problem brzegowy, układ (SNBC) składa się z 2^{k+1} naturalnych warunków brzegowych dla form symetrycznych stopnia k. Ich liczba zależy więc od stopnia rozważanych form, co istotnie odróżnia przypadek form symetrycznych od przypadku form skośnych gdzie, niezależnie od stopnia formy, są zawsze cztery naturalne warunki brzegowe. Omawiana publikacja [27] zawiera dowód eliptyczności wszystkich 2^{k+1} warunków. Jego zaletą jest to, że w odróżnieniu od znanych dotychczas dowodów eliptyczności, gdzie metody były konstruowane dla każdego warunku brzegowego oddzielnie, udało się nam dowieść eliptyczność wszystkich warunków brzegowych jednocześnie.

Prace [6], [7], [8]

Algebroidem Liego nad rozmaitością M nazywamy układ $(A, \varrho, , [\![\cdot,\cdot]\!])$, gdzie A jest wiązką wektorową nad M, $\varrho_A : A \to TM$ jest homomorfizmem wiązek nazywanym *kotwicą* i $[\![\cdot,\cdot]\!]$ jest nawiasem w przestrzeni cięć wiązki A , takim, że $(\Gamma(A), [\![\cdot,\cdot]\!])$ jest algebrą Liego przy czym $[\![a, fb]\!] = f[\![a, b]\!] + \varrho_A(a)(f) \cdot b$, $a, b \in \Gamma(A)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$.

Algebroidy Liego ze względu na swoją strukturę analityczną i algebraiczną są kolejnym dogodnym obiektem do badania gradientów. Samo pojęcie algebroidu Liego jest na tyle szerokie, że obejmuje m.in. algebry Liego, dystrybucje całkowalne (foliacje), czy istotne z punktu widzenia mechaniki rozmaitości Poissona.

Badania gradientów dla algebroidów Liego, prowadziłem wspólnie z B. Balcerzakiem i J. Kaliną. Wynikiem tych badań jest cykl trzech prac [6],[7], i [8].

Prace [9], [10]

Znaczenie i dobre własności gradientów na rozmaitościach riemannowskich narzucały pytania dotyczące przydatności gradientów do badania innych obiektów geometrycznych np. rozmaitości sfoliowanych. Okazało się, że również i w tym przypadku badanie gradientów prowadzi do interesujących wyników.

Foliacja ze względu na swoją skomplikowaną strukturę topologiczną jest obiektem trudnym do badania operatorów różniczkowych. Przyczyna leży w tym, że zawężenie operatora różniczkowego do podrozmaitości, a więc i do liścia foliacji tak, by zachował swoje własności analityczne i geometryczne wymaga korekt w zbiorze wartości (złożeń z odpowiednimi rzutowaniami), a te zależą z kolei od wzajemnego ułożenia liści, czyli tzw. struktury transwersalnej foliacji. Poszukujemy zatem klas foliacji, z jednej strony dostatecznie szerokich, a z drugiej klas, o w miarę regularnej strukturze transwersalnej. Dobrą, z tego punktu widzenia, wydaje się klasa $SL(q)$-foliacji. Ta dość szeroka klasa, wprowadzona przez P. Tondeura i badana w innym niż nasz kontekście [49], wydaje się najszerszą klasą (z punktu widzenia wymiaru: grupa Liego $SL(q)$ jest kowymiaru 1 w pełnej grupie liniowej $GL(q)$) foliacji, w której można uprawiać spójną teorię gradientów bez utraty ich podstawowych własności geometrycznych.

We współpracy z A. Bartoszkiem i J. Kaliną dowiedliśmy ([9]), że na każdej $SL(q)$-foliacji można wskazać szczególny lokalny układ współrzędnych, uwzględniający geometrię rozmaitości sfoliowanej, a jednocześnie mający prawie wszystkie własności normalnego układu współrzędnych. Stał on się ważnym narzędziem które ułatwiło wyprowadzenie wielu ciekawych własności geometrycznych gradientów. Przykładem jest ważny z punktu widzenia geometrii riemnnowskiej i teorii operatorów wzór Weitzenböcka.

Rok później, w pracy ([10]), zbadaliśmy również operator Diraca na $SL(q)$-foliacji.

Praca [16]

Odwzorowanie konforemne $\Phi = (\varphi, \psi) : U \to V$ między podzbiorami U, V płaszczyzny euklidesowej $\mathbb{R}^2$ można scharakteryzować geometrycznie za pomocą warunków

$$|\nabla\varphi|^2 = |\nabla\psi|^2 \neq 0, \quad < \nabla\varphi, \nabla\psi >= 0, \tag{2}$$

gdzie $< \cdot, \cdot >$ jest standardowym iloczynem skalarnym. Ponieważ odwzorowanie konforemne na płaszczyźnie jest odwzorowaniem holomorficznym lub anty-holomorficznym, więc funkcje φ i ψ są funkcjami harmonicznymi. Funkcje φ i ψ spełniające (2) nazywamy sprzężonymi. Poziomice takich funkcji tworzą parę wzajemnie ortogonalnych rodzin krzywych. Ich moduły, które są w istocie ważnymi niezmiennikami konforemnymi, są swoimi odwrotnościami. Innymi słowy ich iloczyn jest równy 1. Wyraża to matematycznie znaną z fizyki zasadę Dirichleta-Thomsona. Uwzględniając jedynie geometryczne własności konforemności, możemy sformułować tę ideę w bardzo ogólnej sytuacji. Dla pary liczb rzeczywistych $p, q > 1$ definiujemy i badamy submersje (p, q)–sprzężone na rozmaitości riemannowskiej. Dowodzimy, że submersje sprzężone na płaszczyźnie zespolonej są odpowiednio p- i q-harmoniczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dowodzimy, że przy tym założeniu o p i q, iloczyn modułów foliacji definiowanych przez submersje (p, q)–sprzężone jest równy 1. Co więcej, dowodzimy, że przy słabszym założeniu, orzekającym, że foliacje są określone przez takie submersje zaledwie lokalnie, iloczyn modułów jest nie większy niż 1.

2. Przegląd wybranych wyników

2.1. Gradienty: pojęcie i przykłady

Główna część mojej aktywności naukowej jest usytuowana w teorii gradientów. Żeby dokonać jej dokładniejszego przeglądu i zacytować twierdzenia wprowadzę niezbędny materiał teoretyczny. Następnie sformułuję trzy ważne zagadnienia teorii i opiszę mój udział w próbach rozwiązania każdego z nich.

Rozważmy wiązkę wektorową (skończonego rzędu) E nad n-wymiarową rozmaitością gładką M. Załóżmy, że wiązka E wyposażona jest w pochodną kowariantną ∇. Załóżmy również, że $\mathfrak{G}$ jest grupą Liego (związaną z geometrią rozmaitości M) działającą zarówno na wiązkę kostyczną T^*M jak i wiązkę wektorową E.

W tekście przyjmujemy konwencję oznaczeń, wedle której tą samą literą oznaczamy wiązkę wektorową jak i przestrzeń cięć tej wiązki. Ze względu na charakter rozważań, konwencja ta nie powinna prowadzić do nieporozumień. Dla przykładu, symbol E odp. $E \otimes T^*M$ oznacza, w zależności kontekstu, wiązkę wektorową lub przestrzeń cięć tej wiązki tj. przestrzeń $C^\infty(E)$ odp. $C^\infty(E \otimes T^*M)$. Z uwagi na to, że pochodna kowariantna ∇ jest operatorem różniczkowym przyporządkowującym cięciu wiązki wektorowej E pewne cięcie wiązki $E \otimes T^*M$, w zapisie

$$\nabla : E \to E \otimes T^*M, \tag{3}$$

symbole E i $E \otimes T^*M$ oznaczają przestrzenie cięć odpowiednich wiązek wektorowych.

Połóżmy $F = E \otimes T^*M$. Działanie grupy Liego $\mathfrak{G}$ pozwala nam rozłożyć wiązki wektorowe E i F na sumę prostą $\mathfrak{G}$-nieredukowalnych subwiązek:

$$E = V_1 \oplus \cdots \oplus V_\mu \oplus \cdots \oplus V_r \tag{4}$$

$$F = W_1 \oplus \cdots \oplus W_\nu \oplus \cdots \oplus W_s. \tag{5}$$

Odnotujmy również, że rozkłady (4) oraz (5) wyznaczają analogiczne rozkłady przestrzeni cięć odpowiednich wiązek.

Obcięcie pochodnej kowariantnej ∇ do każdej z subwiązek wiązki E złożone z rzutowaniem na wybraną subwiązkę wiązki F nazywamy $\mathfrak{G}$-*gradientem* lub krócej *gradientem*. Poniższy diagram ilustruje pojęcie gradientu.

$$\begin{array}{ccccccc}
V_1 & & & & & & W_1 \\
\oplus & & & & & & \oplus \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\oplus & \searrow & & & & \nearrow & \oplus \\
V_\mu & \to & E & \xrightarrow{\nabla} & F & \to & W_\nu \\
\oplus & \nearrow & & & & \searrow & \oplus \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\oplus & & & & & & \oplus \\
V_r & & & & & & W_s
\end{array}$$

Dokładniej, $\mathfrak{G}$-gradientem jest każdy z operatorów różniczkowych pierwszego rzędu $\nabla^{\mu\nu}$ określony wzorem

$$\nabla^{\mu\nu} = \pi_\nu \circ \nabla \circ j_\mu : C^\infty(V_\mu) \longrightarrow C^\infty(W_\nu),$$

gdzie $\mu = 1, \ldots, r$ i $\nu = 1, \ldots, s$. Symbolami j_μ oraz π_ν oznaczyliśmy odpowiednio, naturalne włożenie $j_\mu : V_\mu \to E$ oraz naturalne rzutowanie $\pi_\nu : F \to W_\nu$, wyznaczone poprzez rozkłady (4) i (5).

Na diagramie operacje włożenia i rzutowania oznaczone są strzałkami a ich kierunki wskazują, z którą operacją mamy do czynienia. Aby otrzymać gradient wybieramy jedno z włożeń, składamy je z pochodną kowariantną a następnie z jednym z rzutowań.

Rozważamy przede wszystkim $\mathfrak{G}$-gradienty grup $\mathfrak{G} = GL(n)$ lub $\mathfrak{G} = SO(n)$. Odnotujmy także, że przypadek $\mathfrak{G} = SO(n)$ odpowiada w naturalny sposób temu, że M jest orientowaną rozmaitością riemannowską wyposażoną w tensor metryczny $g = \langle , \rangle$. W tym przepadku będziemy zakładali, że ∇ jest pochodną kowariantną Leviego-Civity.

2.2. Gradienty w wiązkach tensorowych

Załóżmy dalej, że E jest wiązką tensorów nad rozmaitością zorientowaną M oraz, że $\mathfrak{G} = GL(n)$ lub $\mathfrak{G} = SO(n)$. Jeżeli

$$E = T^*M^k = \bigotimes^k T^*M, \quad k = 0, 1, 2, \ldots ,$$

to stosując wcześniej przyjęte konwencje,

$$\nabla : \bigotimes^k T^*M \to \bigotimes^{k+1} T^*M,$$

gdzie przestrzeń cięć wiązki $\bigotimes^0 T^*M$ utożsamiamy z przestrzenią $C^\infty(M)$ wszystkich funkcji gładkich na M. Przy zadanej grupie $\mathfrak{G}$, możemy rozłożyć każdą z wiązek T^*M^k na $\mathfrak{G}$-nieredukowalne subwiązki, i dalej, stosując metodę omówioną w poprzednim paragrafie, wyznaczyć dokładne wzory wyrażające każdy z gradientów. W szczególności, możemy rozważyć gradienty w wiązce tensorów skośnie-symetrycznych (w przypadku $\mathfrak{G} = GL(n)$) lub w wiązce tensorów symetrycznych bezśladowych (w przypadku $\mathfrak{G} = SO(n)$).

Jeżeli M wyposażona jest w strukturę riemannowską g, włókna wiązki stycznej TM, są przestrzeniami euklidesowymi, na które w naturalny sposób działa grupa $SO(n)$ tj. jako grupa izometrii zachowujących orientację. Działanie to rozszerza się do działania grupy $SO(n)$ na każdą z wiązek T^*M^k.

Rozłóżmy T^*M^k na sumę prostą $SO(n)$-nieredukowalnych składników:

$$T^*M^k = \bigoplus\nolimits_\mu V_\mu .$$

Dla dowolnego μ, powyższy rozkład definiuje włożenie $j_\mu : V_\mu \to V$.

Następnie rozłóżmy na $SO(n)$-nieredukowalne subwiązki każdą z wiązek $V_\mu \otimes T^*M$:

$$V_\mu \otimes T^*M = \bigoplus\nolimits_\nu W_\nu .$$

Dla dowolnego ν, powyższy rozkład definiuje rzutowanie

$$\pi_\nu : V_\mu \otimes T^*M \to V_\nu .$$

Można pokazać, że w rozważanym przez nas przypadku, taki rozkład jest jedyny. Dokładniejsze informacje na temat nieredukowalnych rozkładów wiązek tensorów ze względu na działanie grupy $SO(n)$ można znaleźć w m.in. w [52].

Oznaczmy przez ∇ pochodną kowariantną Leviego-Civity metryki g. Powyższe rozkłady prowadzą do gradientów

$$\nabla^{\mu\nu} = P_{\mu\nu} = \pi_\nu \circ \nabla \circ j_\mu : C^\infty(V_\mu) \longrightarrow C^\infty(W_\nu) ,$$

z których każdy jest operatorem różniczkowym pierwszego rzędu.

Bez zmniejszenia ogólności rozważań, możemy od tej pory przyjąć, że wiązka z której działamy jest nieredukowalna. W takiej sytuacji, rozkład staje się prostszy w zapisie, a pochodna kowariantna ∇ rozpada się na sumę r operatorów różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\nabla = G_1 + \cdots + G_\nu + \cdots + G_r. \tag{6}$$

W przypadku, gdy $k = 1$, wiązka $T^*M^1 = T^*M$ jest nieredukowalna, jako że grupa $SO(n)$ działa tranzytywnie na sferze euklidesowej. Jednakże, jeśli $k = 2$, to $T^*M^2 = T^*M \otimes T^*M$ rozpada się na trzy $SO(n)$-nieredukowalne subwiązki

$$T^*M^2 = \bigwedge^2 \oplus \mathsf{S}^2_0 \oplus \mathsf{S}^2_{\mathrm{tr}}. \tag{7}$$

W rozkładzie $\bigwedge^2$ oznacza subwiązkę tensorów skośnie-symetrycznych, S^2_0 oznacza subwiązkę tensorów symetrycznych i bezśladowych oraz $\mathsf{S}^2_{\mathrm{tr}}$ oznacza subwiązkę *czystych śladów* tj. subwiązkę złożoną z tensorów postaci cg, gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Załóżmy, że π_1, π_2, π_3 w zapisanej kolejności oznaczają rzutowania wyznaczone przez rozkład (7). Przedstawione powyżej rozważania prowadzą do wniosku, że $\nabla : T^*M \to T^*M^2$ rozpada się na trzy gradienty $\nabla = G_1 + G_2 + G_3 = \pi_1\nabla + \pi_2\nabla + \pi_3\nabla$. Można pokazać, że

$$G_1 = \pi_1\nabla = \frac{1}{2}d, \qquad G_2 = \pi_2\nabla = S, \qquad G_3 = \pi_3\nabla = -\frac{1}{n}gd^*,$$

gdzie d jest operatorem różniczki zewnętrznej, d^* zaś – operatorem koróżniczki. W konsekwencji

$$\nabla = \frac{1}{2}d + S - \frac{1}{n}gd^*, \tag{8}$$

2.3. Zasadnicze zagadnienia teorii gradientów

Okazuje się, że $SO(n)$-gradienty mogą być scharakteryzowane za pomocą ich *niezmienniczości konforemnej*. Tę fundamentalną dla teorii gradientów charakteryzację wykazał Fegan ([17]).

Każdy $SO(n)$-gradient jest konforemnie niezmienniczy. Dokładniej, załóżmy że g i $\underline{g}$ są metrykami konforemnie równoważnymi tj. $\underline{g} = \Omega^2 g$, dla pewnej gładkiej dodatniej funkcji Ω na M. Wówczas istnieją (niezależne od Ω) stałe c oraz c^*, takie że

$$G = \Omega^{-(c+1)}\underline{G}\Omega^c, \qquad G^* = \Omega^{-(c^*+1)}\underline{G}^*\Omega^{c^*}.$$

Odwrotnie, każdy konforemnie niezmienniczy operator różniczkowy liniowy pierwszego rzędu określony na $SO(n)$-nieredukowalnej wiązce wektorowej jest $SO(n)$-gradientem z dokładnością do odwzorowania wiązkowego.

Dowiedziona przez Fegana charakteryzacja rzuciła nowe światło na teorię $SO(n)$-gradientów. Pozwoliło ono spojrzeć globalnie na całą rodzinę gradientów, oraz dało nadzieję, że takie ujęcie umożliwi wyróżnienie innych charakterystycznych dla gradientów własności, w tym, jedną z najważniejszych własności: *eliptyczność.*

Gradienty są operatorami różniczkowymi liniowymi pierwszego rzędu. Niektóre z nich są eliptyczne w sensie injektywności ich symbolu (dokładna definicja poniżej), inne eliptyczne nie są. Powstaje pytanie, czy można wskazać te gradienty, które są eliptyczne?

Na przykład, gradient S występujący w rozkładzie (8) jest eliptyczny. W rzeczywistości, jest to jedyny gradient eliptyczny w tym rozkładzie. Pozostałe gradienty d i d^* eliptyczne już nie są. Jednakże, (uwaga!) ich suma $d + d^*$ - znana w literaturze jako operator Diraca - jest operatorem eliptycznym.

Powstaje naturalne pytanie: które z gradientów są operatorami eliptycznymi, a także, które sumy bądź kombinacje liniowe gradientów prowadzą do operatorów eliptycznych. Powyższe jak i podobne pytania nazwiemy *zagadnieniem eliptyczności.*

Znaczenie eliptyczności gradientu polega na tym, że dla eliptycznego gradientu G operator liniowy drugiego rzędu G^*G jest silnie eliptyczny. W przypadku rozmaitości M zamkniętej (tj. spójnej, zwartej i bez brzegu) operator taki ma dyskretne spektrum. Co więcej, przestrzeń L^2 cięć wiązki ma wtedy bazę złożoną z cieć gładkich, które są wektorami własnymi operatora. Wreszcie, badając równanie ciepła (heat equation) dla operatora G^*G a następnie rozwinięcie asymptotyczne jego jądra (heat asymptotic expansion) stwierdzamy, że współczynniki tego rozwinięcia wyrażają się przez pewne stałe natury topologicznej (np. wymiar) czy geometrycznej (np. objętość, czy krzywizna skalarna). Gradienty jako operatory zależne od struktury geometrycznej kodują w sobie w jakieś elementy tej geometrii. Eliptyczność jest tą własnością, która pozwala geometrię zakodowaną w gradiencie odkodować.

Przykładem jest gradient Cauchy'ego-Ahlforsa S. Po złożeniu z operatorem formalnie sprzężonym otrzymujemy operator S^*S w którego postaci pojawia się krzywizna Ricciego (28). Pewną informację może przynieść badanie jąder gradientów. Wystarczy spojrzeć na trzy gradienty w wiązce form skośnych na M. Operator różniczki zewnętrznej d, operator Cauchy-ego Ahlforsa S i operator koróżniczki d^*. Jądro operatora d - to formy zamknięte, jądro operatora S - to konforemne formy (pola) Killinga, a jądro operatora d^* - formy (pola) bezźródłowe. Jadro operatora d nie zależy od struktury geometrycznej, tylko od analitycznej. Grupy kohomologii definiowane przez ten operator nie zależą nawet od struktury analitycznej i są, wobec twierdzenia de Rhama, niezmiennikami topologicznymi. Jednakże jądra dwu pozostałych gradientów mają geometryczny charakter.

Omawiane tu zagadnienia wchodzą w zakres tzw. geometrii operatorów różniczkowych. W naszym przypadku możemy nadać im nazwę: *geometria gradientów.* Problem badania wpływu struktury geometrycznej rozmaitości na kształt gradientu, jego spektrum, czy rozkłady asymptotyczne, w tym wyznaczania ich współczynników, nosi nazwę *problemu prostego.* Z kolei problem "odkodowywania" geometrii rozmaitości z własności spektralnych operatora, w szczególności z rozkładu wartości własnych, czy kształtu współczynników w rozkładach asymptotycznych, nosi nazwę nazwę *problemu odwrotnego.*

Problemy eliptyczności czy geometrii gradientów komplikują się, gdy rozważać rozmaitość M z niepustym brzegiem ∂M. By zagwarantować operatorowi eliptycznemu istnienie dyskretnego spektrum, a następnie bazy w L^2 i asymptotycznego rozkładu jądra ciepła względem tej bazy, trzeba narzucić na cięcia wiązki odpowiednie warunki brzegowe. Poszukiwanie i badanie takich warunków jest ważne chociażby dlatego, że istnienie bazy w L^2 i to w dodatku złożonej z cięć gładkich, spełniających warunki brzegowe pozwala na badanie problemu brzegowego (w tym problemu istnienia i jednoznaczności rozwiązań) metodami analizy fourierowskiej. Najwłaściwszymi wydają się *eliptyczne warunki brzegowe.* Pojęcie eliptyczności warunku brzegowego zostało wprowadzone w pracy P. B. Gilkeya i Smitha [19] a następnie opisane w książce P. B. Gilkeya [18]. Eliptyczność ta jest na ogół trudna do sprawdzenia i wymaga konstrukcji dodatkowych wiązek (auxuliry bundles) na brzegu ∂M oraz pokazania, że pewne równanie różniczkowe, definiowane przez symbol ma dokładnie jedno rozwiązanie. Problem poszukiwania i kompletowania naturalnych eliptycznych warunków brzegowych dla poszczególnych gradientów eliptycznych nazywamy problemem *naturalnych warunków brzegowych*

W ten sposób wyróżniamy w teorii gradientów trzy ważne zagadnienia wyznaczające kierunki badań:

- **problem eliptyczności**
- **problem naturalnych eliptycznych warunków brzegowych dla gradientów eliptycznych**
- **geometria gradientów: zagadnienia proste i odwrotne**

Wszystkie trzy wymienione kierunki badawcze są, w mojej ocenie, równie ważne i interesujące. Rezultaty badań autora i współpracowników będą teraz podane z podziałem na wkład do poszczególnych kierunków.

2.4. Eliptyczność

Operatory eliptyczne posiadają wiele istotnych własności analitycznych i geometrycznych.

Wprowadźmy formalną definicję symbolu operatora i eliptyczności operatora różniczkowego (patrz np.: książka R. Narasimhana [32]).

Załóżmy, że E i F są dwiema wiązkami wektorowymi nad rozmaitością M oraz że $P : E \to F$ jest operatorem różniczkowym liniowym rzędu m.

Wybierzmy $p \in M$ oraz $\xi \in T_p^*M$. Oznaczmy przez $\mathfrak{m}_p$ pierścień kiełków funkcji gładkich określonych w otoczeniu punktu p i przyjmujących wartość zero w tym punkcie. Załóżmy, że $f \in \mathfrak{m}_p$. Wówczas f utożsamiamy z funkcją gładką wyznaczającą ξ tj. $f(p) = 0$ oraz $df(p) = \xi$. Rozważmy $e \in E_p$ oraz cięcie s wiązki E, takie że $s(p) = e$.

Symbolem operatora P w punkcie p nazywamy odwzorowanie $\sigma : E_p \times T_p^*M \to F_p$ określone wzorem

$$\sigma(e, \xi) = P(f^m s)(p). \tag{9}$$

Można pokazać, że definicja symbolu jest poprawna, tj. nie zależy od wyboru kiełka f i cięcia s. Co więcej, przyporządkowanie $e \mapsto \sigma(e, \xi)$ jest liniowe. Aby podkreślić, że symbol w istotny sposób zależy od punktu p oraz kowektora ξ będziemy pisali $\sigma(p, \xi)$.

Liniowy operator różniczkowy P jest *eliptyczny w punkcie* p, jeśli dla dowolnego niezerowego kowektora $\xi \in T_p^*M$, injektywne jest odwzorowanie

$$E_p \ni e \mapsto \sigma(e, \xi) \in F_p.$$

Operator P jest *eliptyczny*, kiedy jest eliptyczny w każdym punkcie $p \in M$.

Przykładem operatora eliptycznego w powyższym sensie jest dowolna pochodna kowariantna.

W kontekście prowadzonych rozważań pojawia się pytanie, które gradienty z rozkładu (6) są eliptyczne.

Zauważmy w tym miejscu, że eliptyczność gradientu G_ν pociąga za sobą silną eliptyczność operatora

$$G_\nu^* G_\nu,$$

gdzie G_ν^* oznacza operator formalnie sprzężony do gradientu G_ν.

Zagadnienie eliptyczności zostało w pełni rozstrzygnięte w przeciągu trzech lat: 1995, 1996 i 1997 w trzech pracach [23], [24] i [12].

Pierwsza z odpowiedzi na pytanie o eliptyczność gradientów została udzielona przez J. Kalinę, A. Pierzchalskiego, P. Walczaka w pracy [23], wysłanej do druku w roku 1995.

W pracy dowiedziono, że w przypadku $\mathfrak{G} = GL(n)$ i pochodnej kowariantnej ∇ zadanej na $\mathfrak{G}$-nieredukowalnej wiązce wektorowej nad M, w rozkładzie (6) występuje dokładnie jeden gradient eliptyczny, co więcej, twierdzenie dokładnie wskazuje ten gradient. W pracy, narzędziem do charakteryzacji i badania gradientów są diagramy Younga. Opiszemy je tu pokrótce.

Niech W będzie n-wymiarową przestrzenią wektorową (nad ciałem $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$). Ustalmy naturalne k oraz obierzmy ciąg liczb całkowitych $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_r \geqslant 1$, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_r = k$. Ciąg α nazywany jest *schematem Younga długości k*. W literaturze można również spotkać określenie *rozkład* zamiast schemat Younga. Schemat Younga może być reprezentowany przez figurę posiadającą r wierszy złożonych z kwadratów tej samej wielkości, w której liczba kwadratów występująca w j. kolumnie wynosi α_j.

Schemat Younga możemy wypełnić w dowolny sposób liczbami od 1 do k, tak aby każda z liczb zajmowała dokładnie jeden kwadrat. Tak wypełniony schemat Younga nazywamy *diagramem Younga*. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy założyć, że schemat Younga wypełniamy w taki sposób, by wstawione doń liczby tworzyły ciąg rosnący w każdym wierszu i każdej kolumnie schematu.

Istotne jest tu to, że każdy $GL(n)$-gradient może być reprezentowany przez diagram Younga i na odwrót Odpowiedniość ta jest opisana np. w książce H. Weyla [52].

Dowolny diagram Younga α definiuje (patrz [52]) operator liniowy

$$P_\alpha : W^k \to W^k, \quad W^k = \bigotimes^k W$$

nazywany *symetryzatorem Younga*.

Jest on rzutowaniem oraz, że $W_\alpha = \operatorname{im} P_\alpha$ jest podprzestrzenią niezmienniczą przestrzeni W^k względem reprezentacji standardowej pełnej grupy liniowej $GL(n)$ działającej na W^k. Co więcej, podprzestrzeń W_α jest nieredukowalna względem tej reprezentacji.

Ponadto

$$W^k = \bigoplus_\alpha W_\alpha.$$

Powtarzając tę samą konstrukcję otrzymujemy analogiczny rozkład przestrzeni $W^{k+1} = W^k \otimes W$ na sumę prostą podprzestrzeni nieredukowalnych

$$W^{k+1} = \bigoplus_\beta W_\beta.$$

Symbol σ pochodnej kowariantnej ∇ jest w gruncie rzeczy "mnożeniem tensorowym przez kowektor". Dokładniej, działanie symbolu może być postrzegane następująco:

Dla wektora $w \in W$ rozważmy odwzorowanie liniowe $\otimes_w : W^k \to W^{k+1}$ określone wzorem

$$\otimes_w(w_1 \otimes \cdots \otimes w_k) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_k \otimes w.$$

W języku diagramów Younga główny rezultat pracy o eliptyczności gradientu czyli w istocie o injektywności jego symbolu można teraz wyrazić następująco.

Twierdzenie 1. ([23]) *Dla dowolnego niezerowego wektora $w \in W$*

$$P_\beta \circ \otimes_w|_{W_\alpha} : W_\alpha \to W_\beta$$

jest injektywne wtedy i tylko wtedy, gdy β jest rozszerzeniem wyróżnionym diagramu α.

Przez *rozszerzenie wyróżnione* diagramu α długości k o r wierszach, rozumiemy diagram Younga β długości $k+1$ o r wierszach, powstały z diagramu α poprzez rozszerzenie o jeden kwadrat jednego kwadratu, w taki sposób by zachować uporządkowanie diagramu α.

$$\beta_1 = \alpha_1 + 1 \quad \beta_2 = \alpha_2, \ldots \beta_s = \alpha_s.$$

Innymi słowy, rozszerzamy diagram α do diagramu β poprzez dodanie jednego kwadratu na końcu ze strony prawej, do pierwszego wiersza diagramu α.

Zauważmy również, że twierdzenie 1 zastosowane do dowolnej nieredukowalnej wiązki tensorów daje nam nie tylko istnienie gradientu eliptycznego lecz również jasną regułę wyznaczania tego gradientu. Reguła ta sprowadza się do zasady: dodaj jeden kwadrat na końcu pierwszego wiersza ze strony prawej. Innymi słowy, bezpośrednio z twierdzenia 1 wynika

Wniosek 2. ([23]) *Gradient $G_{\alpha\beta} = \pi_\beta \circ \nabla|_{W_\alpha}$ jest eliptyczny wtedy i tylko wtedy, gdy β jest rozszerzeniem wyróżnionym diagramu α.*

Odnotujmy, że analogiczny do powyższego wynik został otrzymany w pracy [23] dla niektórych $SO(n)$-gradientów, w tym dla $SO(n)$-gradientów w wiązce tensorów skośnie symetrycznych oraz wiązce tensorów symetrycznych.

Rok później, wraz z J. Kaliną, B. Ørstedem, P. Walczakiem, G. Zangiem dowiedliśmy w pracy ([24]) znacznie ogólniejszego twierdzenie dla zwartych i półprostych grup Liego $\mathfrak{G}$ a więć obejmujących w szczególności grupy klasyczne.

Załóżmy mianowicie, że $\mathfrak{G}$ jest półprostą zwartą grupą Liego oraz U i V są odpowiednio nieredukowalnymi reprezentacjami grupy $\mathfrak{G}$ Oznaczmy przez u_1 i v_1 wektory najwyższej wagi odpowiednio w U i V. Reprezentacja $U \otimes V$ nie jest na ogół nieredukowalna i rozkłada się na nieredukowalne podreprezentacje

$$U \otimes V = \oplus_i W_i. \tag{10}$$

Rozkład (12) definiuje rzutowania $P_i : U \otimes V \to W_i$ Załóżmy, że reprezentacja W_1 w rozkładzie (12)) odpowiada wektorowi najwyższej wagi $u_1 \otimes v_1$.

Lemat 3. ([24]) *Wtedy P_1 jest jedynym z określonych właśnie rzutowań P_i spełniającym następujący warunek eliptyczności*

$$u \otimes v \neq 0, \quad u \in U, v \in V \quad \Rightarrow \quad P(u \otimes v) \neq 0 \tag{11}$$

Lemat 3 umożliwia z kolei wyprowadzenia zasadniczego twierdzenia pracy w następującej postaci.

Twierdzenie 4. ([24]) *Załóżmy, że $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_\mathbb{C}$ jest spójną i zwartą półprostą grupą Liego, Załóżmy, że U i V są zespolonymi reprezentacjami grupy $\mathfrak{G}$ o najwyższych wagach równych odpowiednio λ i μ. Jeśli*

$$U \otimes V = \bigoplus_i W_i, \tag{12}$$

jest nieredukowalnym rozkładem reprezentacji $U \otimes V$ takim, że reprezentacja W_1 jest składową Cartana w tym rozkładzie, tj. reprezentacją o najwyższej wadze $\lambda + \mu$, to rzutowanie P_1 z $U \otimes V$ na W_1 jest jedynym spośród P_i spełniającym warunek eliptyczności (11).

Z udowodnionych twierdzeń wynika teraz natychmiastowy wniosek o eliptyczności odpowiednich gradientów.

Zauważmy, że podobnie jak przypadku wyników z pracy [23] tak również i tu, z udowodnionych twierdzeń 3 i 4 wynika nie tylko istnienie jedynego gradientu eliptycznego w rozkładzie pochodnej kowariantnej. Twierdzenia te mianowicie wskazują ten gradient.

W omawianej pracy znajduje się jeszcze jedno twierdzenie, które chciałbym tu przytoczyć. Podaje ono liczbę nieredukowalnych reprezentacji grupy unitarnej $U(n)$ w k-tej potędze tensorowej przestrzeni $\mathbb{C}^n$ czyli w $\otimes^k \mathbb{C}^n$. Oznaczmy tę liczbę przez $d(k) = d(k, n)$.

Twierdzenie 5. ([24]) *Dla dowolnego $k \leqslant n$*

$$d(k) = k! \times \textit{ współczynnik przy } t^k \textit{ w rozwinięciu funkcji } \exp\left(t + \frac{1}{2}t^2\right)$$

oraz

$$d(k) - \textit{liczba elementów } \alpha \in S_k \textit{ takich, że } \alpha^2 = 1.$$

Co więcej, mamy następujący wzór rekurencyjny

$$d(k+1) = kd(k-1) + d(k).$$

Rok później, zagadnienie eliptyczności zostało w pełni rozstrzygnięte przez T. P. Bransona, który zbadał nie tylko same gradienty lecz również i ich kombinacje liniowe.

W swoim znakomitym artykule ([12]) Branson dowiódł między innymi, że dla $\mathfrak{G} = SO(n)$ oraz odpowiadającego tej grupie rozkładu (6) zachodzi natępujące twierdzenie:

Istnieją zbiory $B_1, \ldots, B_p \subset \{1, ..., r\}$, z których każdy jest mocy 1 lub 2, takie że suma

$$\sum_{\nu \in A} G_\nu^* G_\nu$$

jest eliptyczna wtedy i tylko wtedy, gdy $B_u \subset A$ dla pewnego u.

Co więcej, wykluczając pewne przypadki szczególne, zbiory B_u stanowią rozbicie zbioru $\{1, \ldots, r\}$ tzn. są parami rozłączne i ich suma mnogościowa równa jest $\{1, \ldots, r\}$.

Na zakończenie podrozdziału o eliptyczności chciałbym przytoczyć wybrane wyniki z prac wspólnych z J.Kaliną i B, Balcerzakiem, o operatorach różniczkowych na algebroidach Liego, bo stanowią dobrą ilustrację do omówionych twierdzeń o eliptyczności.

Algebroidem Liego nad rozmaitością M nazywamy układ $(A, \varrho, , [\![\cdot,\cdot]\!])$, gdzie A jest wiązką wektorową nad M, $\varrho_A : A \to TM$ jest homomorfizmem wiązek nazywanym *kotwicą* i $[\![\cdot,\cdot]\!]$ jest nawiasem w przestrzeni cięć wiązki A , takim, że $(\Gamma(A), [\![\cdot,\cdot]\!])$ jest algebrą Liego przy czym $[\![a, fb]\!] = f[\![a, b]\!] + \varrho_A(a)(f) \cdot b$, $a, b \in \Gamma(A)$, $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ M

Każda gładka rozmaitość M definiuje algebroid Liego, gdzie $A = TM$, ρ jest kotwicą identycznościową, $[\![\cdot,\cdot]\!]$ jest zwykłym nawiasem Liego pól wektorowych. Dalsze przykłady algebroidów Liego to: dystrybucje całkowalne (foliacje), wiązki kostyczne rozmaitości Poissona, algebroidy Liego wiązek głównych.

Kategoria algebroidów Liego wydaje się właściwym obiektem do badania algebraicznych własności gradientów.

Operatory różniczkowe są tam definiowane jako homomorfizmy odpowiednio zdefiniowanych wiązek. Najlepszym przykładem jest pochodna kowariantna, która jest też określona w ten właśnie sposób.

Wspólnie z J. Kaliną i B. Balcerzakiem badaliśmy gradienty i operatorty typu Diraca algebroidu wyposażonego w strukturę metryczną g w wiązce A i metryczną pochodną kowariantną ∇, tj. taką, że $\nabla g = 0$. Struktura metryczna przenosi sie wtedy na wiązki tensorowe nad A^*, w szczególności na wiązkę tensorów skośnych $\bigwedge^k A^*$ i wiązkę tensorów symetrycznych $\mathsf{S}^{k+1}A^*$ Na wiązki te działa wtedy grupa $SO(n)$, gdzie n jest rzędem wiązki A. Sensowne jest zatem badanie SO(n)-gradientów w tej sytuacji. Zdawaliśmy sobie sprawę, że narzędzia badawcze w przypadku algebroidu Liego są ograniczone. Ze względu na brak sensownej całki są trudności ze zdefiniowaniem operatorów sprzężonych. Brak odpowiednika normalnego układu współrzędnych nie ułatwia pracy przy wyprowadzaniu wzorów. Jest jednak większe bogactwo narzędzi algebraicznych. Z trzech prac poświęconych badaniu operatorów różniczkowych na algebroidach Liego; pracy [6] - wspólnej z J. Kaliną i B. Balcerzakiem oraz dwu następnych prac [7] i [8] - wspólnych z B. Balcerzakiem, wybrałem do autoreferatu wyniki z pracy [7]. Pokazują bowiem harmonijne podobieństwo $SO(n)$-gradientów w pozornie dwu odległych przypadkach: wiązce form skośnych i wiązce form symetrycznych na algebroidzie Liego.

W pracy [7] wyprowadzona jest dokładna postać SO(n)-gradientów na algebroidzie wyposażonym w orientowalną strukturę riemannowską dla wiązek tensorów (form) skośnie symetrycznych oraz dla wiązek tensorów (form) symetrycznych. Zestawienie tych dwu antypodycznych przykładów ujawnia jednak pewną harmonię i podobieństwa. W szczególności liczba gradientów jest w każdym przypadku taka sama i w każdym z tych przypadków ważną rolę w ich konstrukcji odgrywają dwa operatory: operator śladu tr i sprzężony do niego operator kośladu cotr. Opiszmy tę konstrukcję dla obu wiązek. Operatory związane z wiązką tensorów skośnie-symetrycznych będziemy indeksować literą a, a operatory związane z wiązką tensorów symetrycznych - literą s.

Zacznijmy od przypadku form skośnie-symetrycznych.

Operator pochodnej kowariantnej ∇ przenosi się naturalnie na wiązkę dualną A^* a następnie rozszerza - za pomoca wzoru Leibniza - do operatora różniczkowego ∇^a rzędu pierwszego w wiązce $\bigwedge^k A^*$ tensorów skośnych dowolnego stopnia k:

$$\nabla : \bigwedge^k A^* \longrightarrow A^* \otimes \bigwedge^k A^*. \tag{13}$$

Definiujemy *operator śladu* tr^a jako operator zwykłego śladu metrycznego ze względu na dwa pierwsze argumenty:

$$\mathrm{tr}^a : A^* \otimes \bigwedge^k A^* \longrightarrow \bigwedge^{k-1} A^*$$

Definiujemy *operator kośladu*

$$\mathrm{cotr}^a : \bigwedge^{k-1} A^* \longrightarrow A^* \otimes \bigwedge^k A^*$$

jako operator sprzężony do operatora $k \cdot \mathrm{tr}^a$, tj. $\mathrm{cotr}^a = k \cdot (\mathrm{tr}^a)^*$ lub dokładniej:

$$\langle \mathrm{cotr}^a(\eta), \xi \rangle_g = \langle \eta, k \cdot \mathrm{tr}^a \xi \rangle_g \tag{14}$$

dla $\eta \in \bigwedge^{k-1} A^*$, $\xi \in A^* \otimes \bigwedge^k A^*$.

Definiujemy trzy odwzorowania liniowe

$$\pi_1^a, \pi_2^a, \pi_3^a : A^* \otimes \bigwedge^k A^* \longrightarrow A^* \otimes \bigwedge^k A^*$$

następująco

$$\pi_1^a = \mathrm{Alt}, \qquad \pi_2^a = \mathrm{id} - \pi_1^a - \pi_3^a, \qquad \pi_3^a = \frac{1}{n-k+1}\,\mathrm{cotr}^a \circ \mathrm{tr}^a\,.$$

Alt jest *operatorem uskośnienia* działającym na tensor ϑ stopnia $k+1$ według wzoru

$$(\mathrm{Sym}\,\vartheta)\,(a_1,\ldots,a_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}} sign(\sigma)\vartheta\left(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(k+1)}\right).$$

Definiujemy następnie trzy operatory różniczkowe

$$P_j^a = \pi_j^a \circ \nabla^a : \bigwedge^k A^{*k} \longrightarrow A^* \otimes \bigwedge^k A^*, \qquad j \in \{1,2,3\}\,.$$

Twierdzenie 6. **([7])** *Operatory $\pi_1^a, \pi_2^a, \pi_3^a$ są rzutowaniami w wiązce $A^*\otimes\bigwedge^k A^*$ i wiązka ta rozkłada się na sumę prostą (w istocie ortogonalną) subiązek $SO\,(n)$-niezmienniczych:*

(15) $$A^* \otimes \bigwedge^k A^* = \mathrm{Im}\,\pi_1^a \oplus \mathrm{Im}\,\pi_2^a \oplus \mathrm{Im}\,\pi_3^a.$$

W efekcie, pochodna kowariantna ∇^a rozkłada się na sumę trzech operatorów różniczkowych

(16) $$\nabla^a = P_1^a + P_2^a + P_3^a.$$

postaci

(17) $$P_1^a = \tfrac{1}{k+1}d^a, \quad P_2^a = \nabla - \tfrac{1}{k+1}d^a + \tfrac{1}{n-k+1}\,\mathrm{cotr}^a \circ d^{a*}, \quad P_3^a = \tfrac{-1}{n-k+1}\,\mathrm{cotr}^a \circ d^{a*}.$$

$d^a = d$ i $d^{a*} = d^{ast}$ są tu odpowiednio operatorami różniczki zewnętrznej i koróżniczki w wiązce form skośnych. Jedynym operatorem eliptycznym w rozkładzie (16) *jest P_2^a.*

Uwaga 2.1. Dla $k \neq \frac{n}{4} \neq k+1$ wzajemnie ortogonalne subwiązki występujące w rozkładzie (15) są nieredukowalne i wtedy operatory (17) są gradientami. Dla $n = 4k$ lub $n = 4(k+1)$ wyjściowa wiązka $\bigwedge^{\frac{n}{4}} A^*$ rozpada się na sumę subwiązek $\bigwedge_+^{\frac{n}{4}} A^* \oplus \bigwedge_-^{\frac{n}{4}} A^*$, gdzie znak $+/-$ oznacza subwiązkę wiązki $\bigwedge^{\frac{n}{4}} A^*$ będącą podprzestrzenią własną operatora gwiazdki Hodge'a z odpowiednim znakiem wartości własnej.

Uwaga 2.2. Aby otrzymać gradienty w przypadkach wyjątkowych, opisanych w poprzedniej uwadze, należy złożyć operator P_1^a z rzutami na $\bigwedge_+^{\frac{n}{4}} A^*$ czy $\bigwedge_-^{\frac{n}{4}} A^*$ dla $n = 4k$, lub zawęzić wyjściową wiązkę do jednej z subwiązek $\bigwedge_+^{\frac{n}{4}} A^*$, $\bigwedge_-^{\frac{n}{4}} A^*$ dla $n = 4\,(k+1)$.

Przejdźmy do przypadku form symetrycznych.

Definiujemy operator *różniczki symetrycznej* w wiązce form symetrycznych stopnia k,

$$d^s : \mathsf{S}^k A^* \to \mathsf{S}^{k+1} A^*,$$

jako symetryzację pochodnej kowariantnej ∇^s działającej na wiązkę $\mathsf{S}^k A^*$ tensorów symetrycznych (form) stopnia k:

(18) $$d^s = (k+1)\cdot(\mathrm{Sym}\circ\nabla^s) \quad \text{na} \quad \mathsf{S}^k A^*$$

gdzie Sym jest *operatorem symetryzacji* działającyn na dowolny tensor ϑ stopnia $k+1$ następująco:

$$(\mathrm{Sym}\,\vartheta)\,(a_1,\ldots,a_{k+1}) = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\sigma\in S_{k+1}}\vartheta\left(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(k+1)}\right).$$

Przez *koróżniczkę symetryczną* d^{s*} rozumiemy zawężenie operatora ∇^* (sprzężonego do operatora pochodnej kowariantnej) do wiązki tensorów symetrycznych:

(19) $$d^{s*} = \nabla^*|_{\mathsf{S}^k A^*} : \mathsf{S}^k A^* \longrightarrow \mathsf{S}^{k-1}A^*$$

Definiujemy operator *śladu* tr^s:

$$\mathrm{tr}^s : A^*\otimes \mathsf{S}^k A^* \longrightarrow \mathsf{S}^{k-1}A^*$$

jako zawężenie do wiązki $A^*\otimes\mathsf{S}^kA^*$ operatora zwykłego sladu metrycznego ze względu na dwa pierwsze argumenty oraz *operator kośladu* cotr^s

$$\mathrm{cotr}^s : \mathsf{S}^{k-1}A^* \longrightarrow A^*\otimes\mathsf{S}^kA^*$$

jako operator sprzężony do operatora $k\cdot\mathrm{tr}^s$, tj. $\mathrm{cotr}^s = k\cdot(\mathrm{tr}^s)^*$ lub dokładniej:

(20) $$\langle \mathrm{cotr}^s\,(\eta)\,,\zeta\rangle_g = \langle \omega, k\cdot\mathrm{tr}^s\,\zeta\rangle_g$$

dla $\eta\in\mathsf{S}^{k-1}A^*$, $\zeta\in A^*\otimes\mathsf{S}^kA^*$.

Rozważamy subwiązkę $\mathsf{S}^k_oA^*$ tensorów bezśladowych, tj. takich tensorów $\xi\in\mathsf{S}^kA^*$, że $\mathrm{cotr}^s\,\xi=0$. $\mathsf{S}^k_0A^*$ jest wtedy nieredukowalną subwiązką wiązki S^kA^*.

Definiujemy operator

$$\pi_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{n+k-1}\,\mathrm{cotr}^s\circ\mathrm{tr}\quad\text{na}\quad A^*\otimes\mathsf{S}^k_oA^*$$

i trzy operatory liniowe:

$$\pi^s_1,\pi^s_2,\pi^s_3 : A^*\otimes\mathsf{S}^k_oA^* \longrightarrow A^*\otimes\mathsf{S}^k_oA^*$$

natępująco

$$\pi^s_1 = \mathrm{Sym}\circ(\mathrm{id}-\pi_{\mathrm{tr}})\,,\qquad \pi^s_2 = \mathrm{id}-\pi^s_1-\pi^s_3,\qquad \pi^s_3=\pi_{\mathrm{tr}}$$

Definiujemy wreszcie trzy operatory różniczkowe

$$P^s_j = \pi^s_j\circ\nabla^* : \mathsf{S}^k_oA^{*k} \longrightarrow A^*\otimes\mathsf{S}^k_oA^*,\qquad j\in\{1,2,3\}\,.$$

Twierdzenie 7. **([7])** *Operatory π^s_1,π^s_2,π^s_3 są rzutowaniami i wiązka $A^*\otimes\mathsf{S}^k_oA^*$ rozkłada się na sumę prostą (w istocie ortogonalną) subwiązek $SO\,(n)$-niezmienniczych:*

(21) $$A^*\otimes\mathsf{S}^k_oA^* = \mathrm{Im}\,\pi^s_1\oplus\mathrm{Im}\,\pi^s_2\oplus\mathrm{Im}\,\pi^s_3.$$

Pochodna kowariantna ∇^s w wiązce $\mathsf{S}^k_0A^*$ rozkłada się na sumę trzech operatorów

(22) $$\nabla^s = P^s_1+P^s_2+P^s_3.$$

postaci

$$P_1^s = \frac{1}{k+1}\left(d^s + \frac{2}{n+k-1} g \odot d^{s*}\right),$$

$$P_2^s = \nabla^* - \frac{1}{k+1} d^s - \frac{2}{(n+k-1)(k+1)} g \odot d^{s*} + \frac{1}{n+k-1} \operatorname{cotr}^s d^{s*},$$

$$P_3^s = \frac{-1}{n+k-1} \operatorname{cotr}^s \circ d^{s*}.$$

Jedynym operatorem eliptycznym w rozkładzie (22) jest P_1^s.

Uwaga 2.3. Dla $n \geqslant 5$ podprzestrzenie ortogonalne występujące w rozkładzie (21) są nieredukowalne, więc P_1^s, P_2^s, P_3^s są gradientami. Dla $n = 4$, P_2^s rozkłada się dalej na dwa$SO\,(n)$-gradienty. Dla $n = 3$ rozkład na subwiązki nieredukowalne opisuje wzór Clebscha-Gordona (patrz np.[20]).

Uwaga 2.4. Zauważmy, że w szczególnym przypadku $k = 1$ wiązki i $\Lambda^1 A^*$ *i* $\mathsf{S}_o^1 A^*$ pokrywają się. Zatem, w tym przypadku, $\nabla^s = \nabla^a$ i oba rozkłady są, z dokładnością do porządku składników, takie same. Łatwo sprawdzić, że wtedy $P_1^s = P_2^a$, $P_2^s = P_1^a$, *i* $P_3^s = P_3^a$.

Uwaga 2.5. Zauważmy, że $P_1^s = P_2^a$ są odpowiednikami operatora Cauchy'ego-Ahlforsa badanego w pracach [2] [47] [41] *i* [44]

Przejdźmy do następnego problemu teorii gradientów.

2.5. Układ naturalnych warunków brzegowych

W ustępie omówimy zagadnienia zwiąne z drugim z trzech wymienionych problemów teorii. W szczególności, opiszemy krótko metodę konstrukcji układu naturalnych warunków brzegowych dla eliptycznego $SO(n)$-gradientu.

Konstrukcja została zaproponowana w 2004 przez T.P. Bransona i A. Pierzchalskiego oraz opisana w nieopublikowanym manuskrypcie. Opisana została następnie we wstępie do mojej pracy [30] wspólnej z W. Kozłowskim z wyraźnym zaznaczeniem współautorstwa tej konstrukcji. Oto opis konstrukcji.

Załóżmy, że M jest rozmaitością riemannowską zorientowaną z niepustym brzegiem ∂M. Rozważamy pochodną kowariantną Leviego-Civity ∇ rozszerzoną na wszystkie wiązki tensorowe. W szczególności ∇ jest dobrze określona w dowolnej $SO(n)$- nieredukowalnej subwiązce i zgodnie z wzorem (6) ma rozkład

$$\nabla = G_1 + \cdots + G_r.$$

Fundamentalną dla omawianej konstrukcji warunków brzegowych jest obserwacja, że wówczas dla każdego operatora różniczkowego $G = G_i$, $i = 1, \ldots, r$, który w istocie jest gradientem (Steina - Weissa), zachodzi ta sama uniwersalna formuła całkowa wyprowadzona przez B. Ørsteda i A. Pierzchalskiego w pracy [34]. Oto ona:

W każdym punkcie brzegu ∂M określony jest jednoznacznie wektor normalny, zewnętrzny ν. Symbolem i_ν oznaczamy operację postawienia tego wektora (na pierwsze miejsce).

Twierdzenie 8. ([34])

$$(G^*G\alpha,\beta)-(\alpha,G^*G\beta) = \\ -\int_{\partial M}(\langle\alpha,i_\nu G\beta\rangle-\langle i_\nu G\alpha,\beta\rangle)\Omega_{\partial M}, \tag{23}$$

gdzie

$$(\cdot,\cdot)=\int_M\langle\cdot,\cdot\rangle\,\Omega_M$$

jest globalnym iloczynem skalarnym i gdzie Ω_M *i objętości* $\Omega_{\partial M}$ *są formami objętości odpowiednio na* M *i* ∂M *przy założeniu, że orientacja na* ∂M *jest indukowana z* M*.*

Możemy teraz przystąpić do konstrukcji naszego układu naturalnych warunków brzegowych (SNBC).

Po pierwsze, układ ten powinien być tak skonstruowany, by każdy warunek brzegowy układu zapewniał samosprzężoność operatora G^*G, gdy zawęzimy go do podprzestrzeni cięć spełniających ten warunek. Samosprzężoność ta jest bowiem własnością niezbędną, gdy chcemy mówić o *eliptyczności* warunku brzegowego w sensie Gilkeya-Smitha (patrz [19] lub [18] przy czym bardziej dokładny opis pojęcia eliptyczności znajduje się w dalszej częsci autoreferatu). Innymi słowy, całka po prawej stronie (23) powinna znikać.

I tu jest chyba najsubtelniejszy moment naszej konstrukcji, gdyż z punktu widzenia badania problemów brzegowych, należy podać taki układ warunków, aby - z jednej strony - nie były one "zbyt słabe" (tj., by nie tracić jednoznaczności rozwiązań) i aby - z drugiej strony - nie były zbyt "silne" (tj., by nie tracić istnienia rozwiązań). Naszym celem jest również podanie układu możliwie kompletnego tak, aby znane warunki brzegowe od razu się tam znajdowały lub, by można je było otrzymać po nieistotnej dla badania problemu brzegowego korekcie. Oczywiście korekta ta nie powinna zaburzać samosprzężoności.

Kolejnym krokiem jest zastąpienie (na brzegu) działania grupy $SO(n)$ działaniem jej podgrupy $SO(n-1)$ traktowanej jako podgrupa tych przekształceń z $SO(n)$, które zachowują wektor normalny, zewnętrzny. Pod działaniem $SO(n-1)$, nasza wiązka, dotąd nierozkładalna ze względu na działanie $SO(n)$ teraz rozpadnie się (na brzegu) zgodnie z regułą rozgałęzienia (patrz [20]) na sumę prostą niezmienniczych i nierozkładanych i w dodatku wzajemnie ortogonalnych subwiązek. Liczbę tych subwiązek oznaczmy literą s.

Oznaczmy przez $p_1,\dots,p_s$ rzutowania wyznaczone przez tę sumę prostą.

Rozłóżmy α oraz $i_\nu G\alpha$ na wzajemnie ortogonalne składniki:

$$\alpha=p_1\alpha+\cdots+p_s\alpha$$

oraz

$$i_\nu G\alpha=p_1i_\nu G\alpha+\cdots+p_si_\nu G\alpha$$

Analogiczne rozkłady dostajemy zamieniając α na β.

W rezultacie dostajemy następujący rozkład iloczynu skalarnego znajdującego się pod całką w (23):

$$\begin{aligned}\langle\alpha,i_\nu G\beta\rangle = &\\ &+\langle p_1\alpha,p_1i_\nu G\beta\rangle\\ &+\langle p_2\alpha,p_2i_\nu G\beta\rangle\\ &\dots\\ &+\langle p_s\alpha,p_si_\nu G\beta\rangle\,.\end{aligned}$$

Prawej stronie ostatniej równości można przyporządkować macierz o dwu kolumnach:

$$\begin{bmatrix} p_1\alpha & p_1 i_\nu G\beta \\ p_2\alpha & p_2 i_\nu G\beta \\ \vdots & \vdots \\ p_s\alpha & p_s i_\nu G\beta \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Poszczególny warunek brzegowy powstanie teraz poprzez żądanie aby:
dokładnie jeden z wyrazów w każdym wierszu macierzy (24) *był równy zeru.*

Wyczerpując wszystkie takie możliwości, a jest ich 2^s, dostajemy układ 2^s naturalnych warunków brzegowych (SNBC)

Te 2^s warunków jest we wzajemnie jednoznacznej odpowiedniości z 2^s macierzami postaci:

$$\begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & * \\ \vdots & \vdots \\ 0 & * \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & * \\ * & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & * \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} * & 0 \\ * & 0 \\ \vdots & \vdots \\ * & 0 \end{bmatrix}$$

Popatrzmy na dwa krańcowe przypadki. Pierwsza macierz definiuje warunek typu Dirichleta:

$p_1\alpha = 0$, $p_2\alpha = 0$, $\dots, p_s\alpha = 0$ na ∂M lub równoważnie $\alpha = 0$ on ∂M.

Ostatnia macierz definiuje warunek typu Neumanna:

$p_1 i_\nu G\alpha = 0$, $p_2 i_\nu G\alpha = 0$, $\dots$,$p_s i_\nu G\alpha = 0$ na ∂M lub równoważnie $i_\nu G\alpha = 0$ na ∂M.

Te dwa warunki wraz z pozostałymi $2^s - 2$ warunkami pośrednimi tworzą układ naturalnych warunków brzegowych (SNBC).

Przykład 2.6. *Rozważmy najprostszy przypadek zwykłego operatora gradientu działającego na funkcjach określonych na M traktowanych jako cięcia wiązki trywialnej $M \times \mathbb{R} \to TM$. Wówczas mamy*

$$\mathrm{grad} : M \times \mathbb{R} \to TM. \tag{25}$$

Obie wiązki $M \times \mathbb{R}$ TM są $SO(n)$-nieredukowalne, więc operator (25) *jest gradientem w naszym sensie. Operatorem formalnie do niego sprzężonym jest, z dokładnością do znaku, operator dywergencji:*

$$(\mathrm{grad})^* = -\mathrm{div}$$

Złożenie tych dwu operatorów, czyli operator rzędu drugiego postaci: -div grad *jest (z dokładnością do znaku) klasycznym operatorem Laplace Δ na funkcjach. Ze wzoru Stokesa otrzymujemy, że*

$$\int_M \Delta\ f\ g\ \Omega_M - \int_M f\ \Delta\ g = -\int_{\partial M} (f\ \nabla_\nu g - \nabla_\nu f\ g)\Omega_{\partial M}.$$

Ponieważ wiązka $M \otimes R$ jest $SO(n-1)$-nierozkładalna na ∂M, więc dostajemy macierz złożoną z jednego wiersza:

$$\begin{bmatrix} * & * \end{bmatrix}.$$

Zatem naturalne warunki brzegowe przyjmują postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & * \end{bmatrix} \text{lub} \begin{bmatrix} * & 0 \end{bmatrix},$$

lub dokładniej

$$f = 0 \ \text{ na } \ \partial M \ \text{ lub } \ \nabla_\nu f = 0 \ \text{ na } \ \partial M.$$

W ten sposób otrzymaliśmy dobrze znane warunki brzegowe: Dirichleta lub Neumanna.

Wracając do przypadku ogólnego możemy powiedzieć, że właśnie skonstruowany układ warunków brzegowych jest w sensie intuicyjnym naturalny i zupełny. Jego naturalność wiąże się z tym, że w konstrukcji zastosowane zostały reprezentacje grupy $SO(n)$, naturalnie związanej z orientowalną strukturą riemannowską. Zupełność natomiast wiąże się z tym, że rozważane reprezentacje rozkładają się tu "zupełnie", tj, na pełną sumę ich nierozkładalnych podreprezentacji nieredukowalnych.

Jeszcze bardziej interesujący jest problem eliptyczności zaproponowanych warunków brzegowych (SNBC). Naszą nieudowodnioną dotąd hipotezą jest, że

Dla dowolnego gradientu eliptycznego układ (SNBC) *jest układem eliptycznych warunków brzegowych.*

W przypadku wiązki tensorów (form) skośnie-symetrycznych i $SO(n)$-gradientów lista (SNBC) zawiera cztery naturalne warunki brzegowe. Przedstawimy je poniżej. Trzy pierwsze znane są geometrom i w przypadku obszarów ograniczonych z brzegiem w przestrzeni euklidesowej w $\mathbb{R}^3$ były badane już przez H. Weyla w jego pracy [51] z 1915. Czwarty jest nowy i dopełnia listę trzech poprzednich.

Żeby opisać układ naturalnych warunków brzegowych dla wiązki Λ^k form skośnych dowolnego stopnia k przypomnijmy, że dla $0 < k < n$, dowolna forma $\omega \in \Lambda^k$ rozkłada się na brzegu na dwa składniki: część styczną i normalną:

$$\omega = \omega^T + \omega^N \quad \text{na} \quad \partial M, \tag{26}$$

gdzie część styczna nie zawiera w swoim rozwinięciu kowektora normalnego do brzegu a część normalna zawiera ten kowektor. Zauważmy, że w pewnych przypadkach szczególnych rozkład redukuje się w istocie do jednego składnika. Dokładniej, $\omega^N = 0$ dla $k = 0$ oraz $\omega^T = 0$ dla $k = n$. W konsekwencji, przy tej samej konwencji dla przypadków $k = 0$ lub $k = n$, wiązka form skośnych stopnia k rozpada się na brzegu na sumę prostą dwóch subiązek $SO(n-1)$-nieredukowalnych

$$\Lambda^k = \Lambda^{k^T} \oplus \Lambda^{k^N} \quad \text{na} \quad \partial M \tag{27}$$

Zatem $s = 2$ i mamy (2^2) naturalne warunki brzegowe postaci:

Warunek brzegowy *Dirichleta* ($\mathcal{D}$):

$$\omega^T = 0 \quad \text{oraz} \quad \omega^N = 0 \quad \text{na} \quad \partial M.$$

Absolutny warunek brzegowy ($\mathcal{A}$):

$$\omega^N = 0 \quad \text{oraz} \quad (d\omega)^N = 0 \quad \text{na} \quad \partial M.$$

Relatywny warunek brzegowy ($\mathcal{R}$):

$$(\delta\omega)^T = 0 \quad \text{oraz} \quad \omega^T = 0 \quad \text{na} \quad \partial M.$$

Warunek brzegowy *Neumanna* ($\mathcal{N}$):

$$(\delta\omega)^T = 0 \quad \text{oraz} \quad (d\omega)^N = 0 \quad \text{na} \quad \partial M.$$

Zauważmy następującą symetrię w układzie $\{\mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{N}\}$ w odniesieniu do operatora zwanego $*$-Hodge'a.

Twierdzenie 9. **([30], [46])** *Każdy z warunków brzegowych $\mathcal{D}$, $\mathcal{N}$ jest $*$-niezmienniczy w takim sensie, że k-forma φ spełnia warunek wtedy i tylko wtedy, gdy $(n-k)$-forma $*\varphi$ też spełnia ten warunek. Zbiór warunków $\{\mathcal{A}, \mathcal{R}\}$ jest $*$-niezmienniczy w takim sensie, że k-forma φ spełnia któryś z tych warunków wtedy i tylko wtedy, gdy $(n-k)$-forma $*\varphi$ spełnia drugi z nich.*

Eliptyczność trzech analogicznych do $\{\mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{R}\}$ warunków została udowodniona przez B. Ørsteda i A. Pierzchalskiego pracy z roku 1996 a więc jeszcze zanim sformułowano (SNBC). Dowód ten w przypadku dowolnej zwartej rozmaitości riemannowskiej z gładkim brzegiem i wagowego operatora Laplace'a został opublikowany w [34]. Może być on powodzeniem rozszerzony na czwarty naturalny warunek $\mathcal{N}$. W konsekwencji rozszerzona wersja twierdzenia 4.2 z [34] może być sformułowana następująco:

Twierdzenie 10. **([34])** *Każdy z czterech naturalnych warunków brzegowych $\{\mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{N}\}$ jest eliptycznym warunkiem brzegowym dla laplasjanu wagowego*

$$L = \Delta_{ab} = ad^*d + bdd^*.$$

W szczególności, dla każdego warunku brzegowego, operator L ma zupełny ortonormalny układ złożony z form własnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, $L\alpha_k = \lambda_k \alpha_k$, gdzie α_k są klasy C^∞ i spełniają wspomniany warunek brzegowy. Ponadto wartości własne $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ rosną wykładniczo.

Eliptyczność naturalnych warunków brzegowych była również przedmiotem rozprawy doktorskiej A. Klekot [28]. Autorka zbadała tam operator różniczkowy drugiego rzędu divgrad w wiązce form skośnych dowolnego stopnia wprowadzony i badany przez przez H. Rummlera w [48] na rozmaitości riemannowskiej bez brzegu. A. Klekot wyprowadzała cztery naturalne warunki brzegowe dla tego operatora i udowodniła, że każdy z nich jest eliptyczny.

Przejdźmy do przypadku operatorów działających na wiązkach form symetrycznych dowolnego stopnia k. Przypadek ten jest trudniejszy niż poprzedni.

Pierwszą różnicą pomiędzy wiązkami form skośnie symetrycznych a form symetrycznych jest to, że wiązka form symetrycznych jest rzędu nieskończonego. Następną różnicą, bardziej istotną, gdy bada się problem brzegowy, jest fakt, że wiązka symetrycznych tensorów stopnia k rozpada się na brzegu ∂M się na $k+1$ składników. Zatem $s = k+1$ i w przeciwieństwie do przypadku skośnie-symetrycznego - liczba składników w rozkładzie zależy od stopnia badanych form. W związku z tym istnieje 2^{k+1} naturalnych warunków brzegowych dla wiązki form symetrycznych stopnia k. Dla dużych k daje to bardzo dużą liczbę warunków.

A. Kimaczyńska w swojej rozprawie doktorskiej [26] wprowadziła operator divgrad, będący odpowiednikiem operatora badanego przez Rummlera w przypadku wiązki form skośnie-symetrycznych na rozmaitości riemannowskiej. Operator ten został przez nią szczegółowo zbadany pod względem własności algebraicznych i geometrycznych wliczając w to ważny wzór Weitzenböcka dla wiązki form symetrycznych. Autorka wyznaczyła też postać wszystkich 2^{k+1} naturalnych warunków brzegowych. Ostatnia część jej dysertacji została rozszerzona do publikacji wspólnej A. Kimaczyńska i A. Pierzchalski [27]. Rozkład wiązki form symetrycznych stopnia k na 2^{k+1} subiązek na brzegu oraz dokładna konstrukcja (SNBC) jest opisany w tej publikacji.

Główny wynik stanowią dwa twierdzenia.

Twierdzenie 11. ([27]) *Każdy spośród* 2^{k+1} *naturalnych warunków brzegowych dla operatora eliptycznego* divgrad *w wiązce form symetrycznych stopnia k jest eliptycznym warunkiem brzegowym.*

Nasza oryginalna metoda dowodu, polega na konstrukcji specjalnej dodatkowej wiązki na brzegu ∂M. Ta wiązka pozwala opisać wszystkie warunki brzegowe jednocześnie w tym sensie, że każdy poszczególny warunek brzegowy wyznacza pewna jej subwiązkę - każdy inną. Dzięki temu udało się udowodnić eliptyczność wszystkich badanych warunków brzegowych jednocześnie. Wyróżnia to nasz dowód z innych, dotychczas znanych dowodów eliptyczności dla operatorów w różnych wiązkach, które są tam prowadzone dla każdego z warunków brzegowych oddzielnie.

Konsekwencją Twierdzenia 11 jest:

Twierdzenie 12. ([26]) *Dla każdego z rozważanych* 2^{k+1} *warunków brzegowych istnieje ciąg* (ϑ_n), $n = 1, \ldots$ *cięć gładkich wiązki form symetrycznych stopnia k na M taki, że:*

a) (ϑ_n) *jest układem zupełnym w* L^2, *złożonym z wektorów własnych operatora*

$$div\, grad\, \vartheta_n = \lambda_n \vartheta_n,$$

b) formy ϑ_n *spełniają warunek brzegowy,*
c) Wartości własne λ_n *są rzeczywiste oraz*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = -\infty.$$

Jeśli chodzi o badanie układu (SNBC), to w pewnych przypadkach szczególnych można pójść dalej i podać warunki konieczne i dostateczne istnienia i jednoznaczności rozwiązań czy, jeszcze dalej, i podać konstrukcję tych rozwiązań w konkretnych przypadkach. Omówmy teraz krótko tę część działalności.

Niech M będzie n-wymiarową rozmaitością riemannowską z niepustym brzegiem ∂M. Niech g będzie metryką riemannowską na rozmaitości M i niech ∇ będzie pochodną kowariantną Levi-Civita względem metryki g naturalnie rozszerzoną na całą wiązkę tensorową. W przypadku form skośnie-symetrycznych dowolnego stopnia $k = 1, \ldots, n$ na rozmaitości M jedyny eliptyczny gradient - oznaczany również przez S - złożony ze swoim sprzężeniem daje silnie eliptyczny operator drugiego rzędu S^*S. W przypadku $k = 1$ operator ten zwany jest laplasjanem Ahlforsa.

Stosując formułę Weitzenböcka otrzymujemy bardzo ważną z punktu widzenia geometrii operatora S^*S formułę.

$$S^*S = \frac{1}{2}d^*d + \frac{n-1}{n}dd^* - \text{ric}, \tag{28}$$

gdzie ric jest operatorem rzędu zerowego: działaniem operatora Ricciego na jednoformach: $(\text{ric}\alpha)_i = \text{ric}_i^j \alpha_j$ Dwie wersje tej formuły: dla form i dla pól wektorowych można znaleźć, np. w mojej pracy o deformacjach quasikonforemnych ([43] Twierdzenie 2), ale formuła znana był geometrom już wcześniej.

Znaczenie wzoru (28) polega na tym, że łączy on wszystkie trzy gradienty z rozkładu (8) z tensorem Ricciego, reprezentującym geometrię rozmaitości M. Wzór pozwala także wyznaczyć spektrum laplasjanu Ahlforsa S^*S w wielu przypadkach szczególnych, np. dla rozmaitości Einsteina, a także oszacować stałą quasikonforemności dowolnej deformacji na M w zależności od tensora Ricciego. Wyniki badań w tym zakresie zawarłem w mojej publikacji w "manuscripta mathematica" [44].

Jeszcze jedną ważną zaletą wzoru jest to, że pokazuje on, iż - z dokładnością do składnika rzędu zerowego (ostatniego w rozkładzie (28) - laplasjan Ahlforsa S^*S jest przypadkiem szczególnym *laplasjanu wagowego*, tj. operatora postaci

$$\Delta_{ab} = ad^*d + bdd^*, \tag{29}$$

gdzie a, b są dodatnimi liczbami nazywanymi *wagami*.

W dodatku ten ostatni operator jest dobrze określony na formach skośnych dowolnego stopnia k.

Dla $k = 1$, obszaru ograniczonego w $\mathbb{R}^3$, zachowanie na brzegu dla takiego operatora było badane przez H. Weyla na początku XX wieku, w szczególnym przypadku wag: $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{2}{3}$. Weyl badał ten problem u dla trzech fizycznie naturalnych warunków brzegowych. Wyznaczył również rozkład wartości własnych operatora eliptycznego $\Delta_{\frac{1}{2}\frac{2}{3}}$ dla każdego z tych warunków (por. [51]).

Dla k=1, obszaru ograniczonego w $\mathbb{R}^n$ oraz wag postaci $a = \frac{1}{n}$ i $b = \frac{n-1}{n}$, operator $\Delta_{\frac{1}{n}\frac{n-1}{n}}$ był badany przez L. V. Ahlforsa w serii jego prac z lat siedemdziesiątych XX wieku [1],[2],[3]. W szczególności Ahlfors rozwiązał problem brzegowy dla warunku brzegowego Dirichleta i analogicznego operatora w kuli hiperbolicznej w $\mathbb{R}^n$. Genialnie wykorzystał własność niezmienniczości konforemnej rozważanego operatora oraz fakt, że grupa odwzorowań konforemnych kuli działa tranzytywnie i jest grupą izometrii względem metryki hiperbolicznej. Wystarczyło następnie wyznaczyć za pomocą wzoru typu Poissona wartość poszukiwanego rozwiązania w środku kuli i "przenieść" ją do dowolnego punktu za pomocą odpowiedniej izometrii. Problem Dirichleta dla kuli euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ był trudniejszy. Nie można było zastosować metody Ahlforsa, bo grupa izometrii euklidesowych kuli nie działa tranzytywnie. Jednak H. Reimann, w pracy [47], w analogii do klasycznej procedury dla problemu Dirichleta i operatora Laplace'a na funkcjach, polegającej na rozwinięciu funkcji na sferze w szereg harmonik sferycznych, rozłożył - za pomocą teorii reprezentacji - przestrzeń pól wektorowych (lub, co na jedno wychodzi przestrzeń form stopnia pierwszego) na odpowiednio wybrane podprzestrzenie $SO(n)$-niezmiennicze, a następnie znalazł w każdej z nich nich dogodną bazę. Bazy te pozwoliły mu następnie skonstruować rozwiązanie.

Dla k, kuli euklidesowej w $\mathbb{R}^n$ i laplasjanu wagowego (29) o dowolnych wagach $a, b > 0$ działającego na wiązkę form skośnych dowolnego stopnia, o współczynnikach wielomianowych, zagadnienia brzegowe były przedmiotem wspólnych badań W. Kozłowskiego i moich [30]. Zbadano wszystkie zagadnienia brzegowe, z pełnej listy warunków brzegowych z układu (SNBC). Układ zawiera tym przypadku cztery omówione wyżej warunki brzegowe: Dirichleta, absolutny, relatywny i warunek typu Neumanna $\{\mathcal{D}, \mathcal{A}, \mathcal{R}, \mathcal{N}\}$. Trzy pierwsze warunki brzegowe pojawiały się w geometrii różniczkowej już wcześniej pod tymi właśnie nazwami, np. przy badaniu asymptotycznych rozwinięć jądra ciepła dla operatora Laplace'a (patrz np. [14] czy [15]). Czwarty warunek brzegowy jest nowy i był badany po raz pierwszy. Warunek brzegowy Dirichleta $\{\mathcal{D}\}$ został zbadany wcześniej, w pracy doktorskiej W. Kozłowskiego [29]. Dla warunku Dirichleta i form dowolnego stopnia k twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zachodzi bez żadnych ograniczeń na obłożenie brzegowe. Dla pary warunków relatywnego i absolutnego zachodzi z wyłączeniem pewnych, wyjątkowych przypadków szczególnych. W każdym z tych przypadków szczególnych podane zostały warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązań i omówiony został problem ich jednoznaczności. Najciekawszy jest warunek czwarty $\mathcal{N}$. Istnienie rozwiązań wymaga przyjęcia dodatkowych założeń na obłożenie brzegowe. Również i w tym przypadku podane zostały warunki konieczne i dostateczne istnienia rozwiązań. Dla każdego z czterech warunków brzegowych i wielomianowego obłożenia brzegowego podana została konstrukcja rozwiązań. Przytoczmy tu kilka wybranych z pracy [30] twierdzeń dla warunków brzegowych $\mathcal{R}$, $\mathcal{A}$ i $\mathcal{N}$. Przypomnijmy, że dowolna forma rozkłada się na brzegu - zgodnie ze wzorem 26 - na swoją część styczną i normalną. Formę nazywamy *styczną*, gdy jej część normalna jest równa zeru oraz *normalną*, gdy jej część styczna jest równa zeru. Kulę jednostkową w $\mathbb{R}^n$ oznaczamy literą B a jej brzeg, czyli sferę jednostkową literą Σ. Rozważane formy są formami na $\mathbb{R}^n$ o współczynnikach wielomianowych.

Twierdzenie 13. **(**[30] Relatywny warunek brzegowy $\mathcal{R}$**)** *Załóżmy, że $0 \leqslant k < n$. Dla dowolnych form stycznych ω stopnia $k-1$ i η stopnia k istnieje jedyna forma $\varphi \in \Lambda^k$ taka, że $\Delta_{ab}\varphi = 0$ w B oraz*

$$(d^*\varphi)^{\mathrm{T}} = \omega \quad \varphi^{\mathrm{T}} = \eta \quad na \quad \Sigma.$$

Twierdzenie 14. **(**[30] Absolutny warunek brzegowy $\mathcal{A}$**)** *Załóżmy, że $0 < k \leqslant n$. Dla dowolnych form normalnych ω stopnia $k+1$ i η stopnia k istnieje jedyna forma $\varphi \in \Lambda^k$ taka, że $L\varphi = 0$ i*

$$(d\varphi)^{\mathrm{N}} = \omega \quad \varphi^{\mathrm{N}} = \eta \quad na \quad \Sigma.$$

W pracy podano również warunki konieczne i dostateczne jakie w przypadku stopni: $k = n$, dla warunku $\mathcal{R}$, czy $k = 0$, dla warunku $\mathcal{A}$, mają spełniać formy ω i η, by zagwarantować istnienie rozwiązań.

Zauważmy, że badanie pary warunków $\{\mathcal{AR}\}$ można sprowadzić do badania któregokolwiek z nich dzięki następującej własności, która ma miejsce nie tylko w przypadku kuli euklidesowej, ale - ogólnie - w przypadku dowolnej rozmaitości riemannowskiej M z gładkim brzegiem ∂M.

Twierdzenie 15. **(**[30]**)** *Załóżmy, że ω i η są dwiema formami stycznymi odpowiednio stopnia $k-1$ i k na ∂M. Wówczas, dla dowolnej formy $\varphi \in \Lambda^k(M)$ mamy:*

φ jest rozwiązaniem relatywnego problemu brzegowego $\mathcal{R}$, tj.

$$\Delta_{ab}\varphi = 0 \text{ na } M \text{ oraz } (d^*\varphi)^T = \omega,\ \varphi^T = \eta \text{ na } \partial M$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $*\varphi$ jest rozwiązaniem absolutnego problemu brzegowego $\mathcal{A}$, tj.

$$\Delta_{ba}(*\varphi) = 0 \text{ na } M \text{ oraz } (d(*\varphi))^N = *\omega,\ (*\varphi)^N = *\eta \text{ na } \partial M.$$

Ciekawy jest przypadek czwartego naturalnego warunku brzegowego Neumanna $\mathcal{N}$

$$\Delta_{ab}\varphi = 0 \text{ na } B \text{ oraz } (d^*\varphi)^T = \omega,\ (d\varphi)^N = \eta \text{ na } \partial M.$$

Warunek ten jest badany w naszej pracy po raz pierwszy. Jest eliptycznym warunkiem brzegowym, ale dla istnienia rozwiązań formy ω i η muszą spełniać pewne dodatkowe warunki. Warunki te są warunkami koniecznymi i dostatecznymi istnienia rozwiązań i zostały sformułowane w twierdzeniu 4.10 z pracy [30]. Trudno byłoby podać je w tym miejscu, gdyż mają raczej charakter techniczny i precyzyjne ich sformułowanie wymagałoby wprowadzenia wielu pojęć, praktycznie na potrzeby tylko tego jednego twierdzenia.

Dowody wszystkich twierdzeń o istnieniu rozwiązań z pracy [30] mają charakter konstrukcyjny, a zatem umożliwiają konstrukcję konkretnego rozwiązania dla każdego z czterech rozważanych zagadnień brzegowych, przy zadanym obłożeniu brzegowym.

Na zakończenie wróćmy jeszcze do układu naturalnych warunków brzegowych (SNBC) Hipoteza, że dla dowolnego gradientu eliptycznego układ (SNBC) zawiera wyłącznie eliptyczne warunki wydaje się bardzo odważna, ale nie ma kontrprzykładów, a znane przypadki szczególne ją potwierdza ją, Dowód ogólnego przypadku jest raczej trudny. Jednak opisane powyżej wyniki wspólnych prac autora z B. Ørstedem, poźniej z W. Kozłowskim i niedawne z A. Kimczyńską potwierdzają hipotezę w trzech ważnych przypadkach szczególnych.

2.6. Geometria gradientów

H. Weyl w swojej pracy o elastyczności ([51]) badał trzy warunki brzegowe o naturalnej interpretacji fizycznej. Jednym z nich jest warunek orzekający, że zarówno dywergencja jak i składowa styczna pola wektorowego zerują się na brzegu obszaru w $\mathbb{R}^3$. W mojej pracy wspólnej z B. Ørstedem o brzegowych własnościach Laplasjanu-Ahlforsa i jego uogólnienia: wagowego laplasjanu Δ_{ab}, $a, b > 0$, zdefiniowanego wzorem (29) rozważamy trzy różne warunki brzegowe o nazwach $\mathcal{D}$, $\mathcal{N}$ i $\mathcal{E}$, analogiczne do tych, które rozważał Weyl. Jeden z nich, a mianowicie warunek $\mathcal{E}$, jest dokładną kopią warunku Weyla o elastyczności, wyrażonego jednak w dużo ogólniejszej sytuacji: rozmaitość, zamiast obszaru w $\mathbb{R}^3$ i operator działający na formy różniczkowe stopnia dowolnego zamiast operatora działającego na pola wektorowe. Operator Weyla jest tam szczególną wersją laplasjanu wagowego o wagach $a = \frac{2}{3}$ i $b = \frac{1}{2}$. Warunek $\mathcal{E}$ był później nazywany przez geometrów relatywnym $\mathcal{R}$ i pod taką też nazwą pojawia się w (SNBC) oraz w Twierdzeniu 10 powyżej.

Załóżmy, że $L = \Delta_{ab}$. Wtedy jedną z konsekwencji Twierdzenia 10 jest istnienie ortonormalnego układu zupełnego $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ $L\alpha_k = \lambda_k \alpha_k$, form własnych α_k spełniających warunek brzegowy $\mathcal{R}$.

Możemy zatem rozważać półgrupę exp(−tL) dla operatora ciepła. Operator ten ma gładkie jądro

$$H(t, x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} \alpha_i(x) \otimes \alpha_i(y) \tag{30}$$

i ślad równy

$$tr\ exp(-tL) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-t\lambda_i} = \int_M H(t, x, x)\Omega_M. \tag{31}$$

Z ogólnej teorii wynika, zobacz np. [18], że ślad (31) ma rozwinięcie asymptotyczne postaci

$$tr\ exp(-tL) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{i-n} 2, \quad t \searrow 0.$$

Wspólnie z B. Ørstedem wyznaczyliśmy pierwsze dwa współczynniki tego rozwinięcia.

Twierdzenie 16. **([34])** *Załóżmy, że* $L = \Delta_{ab}$ *jest laplasjanem wagowym z warunkiem brzegowym* $\mathcal{R}$ *na rozmaitości riemannowskiej* M. *Wtedy pierwsze dwa współczynniki rozwinięcia asymptotycznego jądra ciepła mają postać*

$$
\begin{aligned}
tr\ exp(-tL) \sim & (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \cdot vol(M) \cdot [(n-1)a^{-\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}})] \\
& -\frac{1}{4}(4\pi t)^{-\frac{(n-1)}{2}} \cdot vol(\partial M) \cdot [(n-3)a^{-\frac{n-1}{2}} + b^{-\frac{n-1}{2}}].
\end{aligned} \tag{32}
$$

Stosując następnie twierdzenie Taubera możemy wyprowadzić asymptotyczny rozkład wartości własnych operatora, otrzymując w ten sposób uogólnienie i wzmocnienie wyniku otrzymanego przez Weyl'a:

Twierdzenie 17. **([34])** *Załóżmy, że* $N(\lambda)$ *oznacza liczbę wartości własnych operatora* L *mniejszych niż* λ. *Wtedy, dla naszego warunku brzegowego* $\mathcal{R}$ *pierwszy wyraz rozwinięcia asymptotycznego dla* $N(\lambda)$ *jest równy*

$$
N(\lambda) \sim \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot vol(M) \cdot [(n-1)a^{-\frac{n}{2}} + b^{-\frac{n}{2}}] \cdot \lambda^{\frac{n}{2}}.
$$

Gdy $n = 3$, $a = \frac{2}{3}$ i $b = \frac{1}{2}$, dla współczynnika $(4\pi)^{-\frac{3}{2}}/\Gamma(\frac{3}{2}+1)$ otrzymujemy dokładnie wartość podaną przez Weyla $\frac{\pi^{-2}}{6}$.

Badanie rozkładów asymptotycznych dla operatorów typu Laplace'a prowadziłem również wspólnie z T. Bransonem, P. B. Gilkeyem i B. Ørstedem. Wyniki zawarte zostały w dwu pracach [14] oraz [15]. W obu pracach badany jest operator rzędu drugiego postaci

$$
P = ad^{*}d + bdd^{*} - \epsilon\rho, \tag{33}
$$

gdzie ρ jest dowolnym operatorem samosprzężonym stopnia zerowego. Operator P jest widocznym uogólnieniem laplasjanu Ahlforsa $S^{*}S$ (28) i jest operatorem eliptycznym i samosprzężonym. W pracach otrzymano pierwsze cztery współczynniki asymptotycznych rozwinięć równania ciepła dla tego operatora W pierwszej pracy, dla zwartej rozmaitości riemannowskiej bez brzegu. W drugiej, dla rozmaitości riemannowskiej z brzegiem i dla warunków brzegowych: relatywnego $\mathcal{R}$ i absolutnego $\mathcal{A}$. Współczynniki rozwinięcia asymptotycznego są fundamentalnym narzędziem teorii spektralnej operatorów różniczkowych, szczególnie tych, które są związane z geometrią rozmaitości. Współczynniki te odgrywają ważną rolę przy badaniu tzw. zwanego problemu odwrotnego geometrii spektralnej. W zagadnieniu tym chodzi chodzi o rekonstrukcję geometrii na podstawie informacji pochodzących z badania spektrów operatorów czy rozwinięć asymptotycznych jąder ciepła dla tych operatorów. Te ostatnie, w przypadku rozmaitości z brzegiem zawierają informacje zarówno o geometrii rozmaitości jak i geometrii brzegu. Metoda zastosowana w naszych pracach jest analogiczna do metody pochodzącej z z pracy T. Bransona, P. B.Gilkeya i Fulinga [13] i zupełnie inna od zastosowanej przeze mnie i B.Ørsteda w pracy [34] i w odróżnieniu od naszej metody nie obejmuje warunku Dirichleta $\mathcal{D}$.

Na zakończenie przytoczmy jeszcze kilka rezultatów z geometrii gradientów na rozmaitościach sfoliowanych

Rola i własność gradientów na rozmaitościach riemannowskich narzucały pytania dotyczące znaczenia gradientów do badania innych obiektów geometrycznych rozmaitości sfoliowanych. Okazało się, że również i w tych przypadkach zastosowanie gradientów prowadzi do interesujących wyników.

Zauważyliśmy, że klasa foliacji SL(q) zdefiniowana i badana przez Ph. Tondeura [49], w innym niż nasz kontekście, jest dobrą klasą z punktu widzenia teorii gradientów w tym sensie, że jest „zgodna" z operacją obcięcia. W dodatku jest dość obszerna (grupa Liego $SL(q)$ jest kowymiaru 1 w w pełnej grupie liniowej $GL(q)$) i wydaje najszerszą klasą foliacji na której można uprawiać spójną teorię gradientów bez utraty ich podstawowych własnośći geometrycznych. We wcześniejszych pracach innych autorów dotyczących zawężeń naturalnych operatorów różniczkowych do foliacji, standardowym założeniem (por. np. prace Alvareza Lopeza i Kordiukowa [4] czy [5]) była, riemannowskość foliacji. Założenie to jest - w stosunku do naszego - bardzo silne. A przecież tezy otrzymane przez nas są podobne, jako przykład niech posłuży wyprowadzone przez nas ważne twierdzenie: wzór Weitzenböcka dla foliacji, który stosuje się do form dowolnego stopnia k o wartościach w dowolnej wiązce Riemannowskiej z metryką h. Indeks górny $\mathcal{F}$ przy znaku (symbolu) reprezentującym oprator oznacza operator stosownie zawężony do liści foliacji.

Twierdzenie 18. **([9])** *Załóżmy, ze (M, g) jest rozmaitością riemannowską, (E, h)- wiązką riemannowską nad M i $\mathcal{F}$ - $SL(q)$-foliacją. Wtedy dla dowolnej formy $\sigma \in \Lambda^k T\mathcal{F}^* \otimes E$,*

$$\Delta^{\mathcal{F}}\sigma = -trace^{\mathcal{F}}\left(\nabla^{\mathcal{F}}\right)^2\sigma + S^{\mathcal{F}}(\sigma),$$

gdzie

$$S^{\mathcal{F}}(\sigma)(X_1,\ldots,X_k) = \sum_{s=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\left(R^{\mathcal{F}}(e_s,X_j)\,\sigma\right)\left(e_s,X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,X_k\right)$$

oraz

$$R^{\mathcal{F}}(e_s,X_j) = -\nabla^{\mathcal{F}}_{e_s}\nabla^{\mathcal{F}}_{X_j} + \nabla^{\mathcal{F}}_{X_j}\nabla^{\mathcal{F}}_{e_s} + \nabla^{\mathcal{F}}_{[e_s,X_j]},$$

dla $X_1,\ldots,X_k \in T\mathcal{F}$, i dowolmej (lokalnej bazy ortonormalnej) i dowolnej lolalnej bazy ortonormalnej $(e_1,\ldots,e_p)$ wektorów stycznych do liści foliacji.

We współpracy z A. Bartoszkiem i J. Kaliną dowiedliśmy ([9]), że na każdej $SL(q)$-foliacji można wskazać szczególny lokalny układ współrzędnych, dogodny ze względu na geometrię rozmaitości sfoliowanej. Układ ten stał się narzędziem, które pozwoliło wykazać wiele ciekawych własności geometrycznych gradientów, w szczególności, okazał się bardzo użyteczny w dowodzie ostatniego twierdzenia, ważnego z punktu widzenia geometrii riemnnowskiej i teorii operatorów wzoru Weitzenböcka.

Rok później w pracy ([10]) zbadaliśmy również gradienty i operator Diraca na $SL(q)$-foliacji. Kluczową obserwacją jest to, że operatory sprzężone do operatorów zawężonych do foliacji wyrażają się przez całki po pełnej rozmaitości M, a wyrażania podcałkowe mają standardową formę. Co więcej, kluczowe dla badania problemów brzegowch gradientów rozmaitości niesfoliowanej i opisane powyżej Twierdzenie 8, zachodzi tu w przypadku rozmaitości sfoliowanej w analogicznej wersji.

Załóżmy, że ξ_α i $\tilde{\xi}_\beta$ są subwiązkami nieredukowalnymi odpowiednio wiązek ξ i $\tilde{\xi}$ oraz $\nabla^{\mathcal{F}\alpha\beta} : \xi_\alpha \to \tilde{\xi}_\beta$, jest $\mathcal{F}$- gradientem.

Twierdzenie 19. **([10])** *dla dowolnych cięć $s \in \xi_\alpha$ i $u \in \tilde{\xi}_\beta$ o nośnikach zwartych mamy*

$$\int_M \left\langle \nabla^{\mathcal{F}\alpha\beta}s, u\right\rangle = \int_M \left\langle s, -\pi_\alpha tr^{\mathcal{F}}_{12}\nabla^{\mathcal{F}}\iota_\beta u\right\rangle.$$

Innymi słowy, operator $\nabla^{\mathcal{F}\alpha\beta^*}$, *formalnie sprzężony (na* M*) do gradientu* $\nabla^{\mathcal{F}\alpha\beta}$ *jest postaci.*

$$\nabla^{\mathcal{F}\alpha\beta *} = -\pi_\alpha tr_{12}^{\mathcal{F}} \nabla^{\mathcal{F}} \iota_\beta.$$

π_a *jest rzutowaniem na wiązkę* ξ.

In his paper on elasticity ([51]) H.Weyl used the boundary condition of vanishing divergence and vanishing tangential part of the v

Literatura

[1] **L. V. Ahlfors**, *Conditions for quasiconformal deformations in several variables, Contributions to Analysis*, A collection of papers dedicated to L. Bers, Academic press, New York, (1974), pp. 19-25.

[2] **L. V. Ahlfors**, *Invariant operators and integral representations in hyperbolic spaces*, Math. Scand., **36** (1975), 27–43.

[3] **L. V. Ahlfors**, *Quasiconformal deformations and mappings in* $\mathbb{R}^n$, J. Analyze Math., **30** (1976), 74–97.

[4] **J. A. Alvarez Lopez, Y. A. Kordyukov**, *Adiabatic limits and spectral sequences for Riemannian foliations*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 977–1027.

[5] **J. A. Alvarez Lopez, Y. A. Kordyukov**, *Long time behaviour of leafwise heat flow for Riemannian foliations*, Compositio Math. **125** (2001), 129–153.

[6] **B. Balcerzak, J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Weitzenböck formula on Lie algebroids.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **60** (2012), no. 2, 165—176.

[7] **B. Balcerzak, A. Pierzchalski**, *Generalized gradients on Lie algebroids*, Ann. Global. Anal. Geom. **44**, no. 3 (2013) 319–337.

[8] **B. Balcerzak, A. Pierzchalski**, *On Dirac operators on Lie algebroids*, Differential Geom. Appl. **35** (2014), suppl., 242–254.

[9] **A. Bartoszek, J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Weitzenböck formula for SL(q)-foliations.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **58** (2010), no. 2, 179–188.

[10] **A. Bartoszek, J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Gradients for* SL(q)*-foliations.* J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 12, 2410–2416.

[11] **S. Bochner** *Vector fields and and Ricci curvature*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776–797.

[12] **T.P. Branson**, *Stein-Weiss operators and ellipticity*, J. Funct. Anal. **151** (1997), 334–383.

[13] **T.P. Branson, S. Fulling, P.B. Gilkey**, *Heat equation asymptotics of nonminimal operators on differential forms*, J. Math. Phys. **32** (1991), 2089–2091.

[14] **T.P. Branson, P.B. Gilkey, B. Orsted, A. Pierzchalski**, *Heat equation asymptotics of a generalized Ahlfors Laplacian on a manifold with boundary*, in Operator Theory: Advances and Applications, **57**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1992, 1–13.

[15] **T.P. Branson, P.B. Gilkey, A. Pierzchalski**, *Heat equation asymptotics of elliptic operators with nonscalar leading symbol*, Math. Nachr. **166** (1994), 207–215.

[16] **M. Ciska, A. Pierzchalski**, *On modulus of level sets of conjugate submersions.* Differential Geom. Appl. **36** (2014), 90-–97.

[17] **H.D. Fegan**, *Conformally invariant first order differential operators*, Quart. J. Math. Oxford (2), **27** (1976), 371–378.

[18] **P.B. Gilkey**, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Publish or Perish, Wilmington, Delaware, 1984.

[19] **P.B. Gilkey, L. Smith**, *The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems*, Comm. Pure. Appl. Math. **98** (1976), 225–240

[20] **R. Goodman, N. Wallach**, *Represenrations and Invariants of the Classical Groups*, Encycloppedia Math. Appl, **68**, Cambridge, 1998.

[21] **K. Heil, A. Moroianu, U. Semmelmann**, *Killing and conformal Killing tensors.* J. Geom. Phys. **106** (2016), 383–400.

[22] **J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Some differential operators in real and complex geometry* in Deformations of Mathematical Structures, 1989, Kluwer Academic Publishers, 3-28.

[23] **J. Kalina, A. Pierzchalski, P. Walczak**, *Only one of the generalized gradients can be elliptic*, Ann. Polon. Math. **67** (1997), 111–120.

[24] **J. Kalina, B. Ørested, A. Pierzchalski, P. Walczak, G. Zang**, *Elliptic gradients and highest weights*, Bull. Polon. Acad. Sci. Ser. Math. **44** (1996), 511–519.

[25] **A. Kaźmierczak, A. Pierzchalski**, *On some criterion of conformality.* Balkan J. Geom. Appl. **21** (2016), no. 1, 51–57.

[26] **A. Kimaczyńska**, *The differential operators in the bundle of symmetric tensors on a Riemannian manifold*, PhD thesis, UŁ (2016).

[27] **A. Kimaczyńska, A. Pierzchalski**, *Elliptic operators in the bundle of symmetric tensors on a Riemannian manifold*, Banach Center Publications, Volume **113** (2017), 193–217.

[28] **A. Klekot**, *Gradient i dywergencja dla form o wartościach w wiązce* (in Polish), PhD thesis UŁ (2014).

[29] **W. Kozłowski**, *Laplace type operators: Dirichlet problem*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **IV** (2007), 53–80.

[30] **W. Kozłowski, A. Pierzchalski**, *Natural boundary value problems for weighted form Laplacians*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **VII** (2008), 343–367.

[31] **G.D. Mostow**, Quasiconformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **34** (1968), 53–104.

[32] **R. Narasimhan**, *Analysis on Real and Complex Manifolds.* Second Edition, North-Holland, 1985.

[33] **B. Ørsted, A. Pierzchalski**, *The Ahlfors Laplacian on a Riemannian manifold*, Constantin Caratheodory: An International Tribute, 2, World Scientific, Teaneck, NJ, 1991, pp. 1021–1049.

[34] **B. Ørsted, A. Pierzchalski**, *The Ahlfors Laplacian on a Riemannian manifold with boundary*, Michigan Math. J. **43** (1) (1996), 99–122.

[35] **A. Pierzchalski**, On relations between linking hypersurface families in Euclidean spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., XXI (1973), 977–981.

[36] **A. Pierzchalski**, Lebesgue measure on Riemannian differential spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., **XXII** (1974), 1015–1020.

[37] **A. Pierzchalski**, Algebraic criterion of quasiconformality for Riemannian differiential spaces, Bull. Acad. Polon. Sci.,**XXIII** (1975), 305–313 (rozprawa doktorska).

[38] **A. Pierzchalski**, *The k-module of level sets of differential mappings*, Scientific Communications of the Czechoslovakian-GDR-Polish School on Differential Geometry at Boszkowo (1978), Math. Inst. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1979, 180–185.

[39] **A. Pierzchalski**, A variation of the modulus of submanifold families (współautor: J. Kalina), Analytic Functions, Kozubnik, 1979, Lecture Notes in Math. 798, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 261–268.

[40] **A. Pierzchalski**, *On quasiconformal deformations on manifolds*, Romannian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Proceedings, Part 1, Lecture Notes in Math. 1013, Springer-Velag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983, 171–182.

[41] **A. Pierzchalski**, *On quasiconformal deformations of manifolds and hypersurfaces*, Ber. Univ. Jyvaskyla Math. Inst., **28** (1984), 79–94.

[42] **A. Pierzchalski**, *Quasiconformality of pseudo-conformal transformations and deformations of hyper-surfaces in* $\mathbb{C}^n$, Math. Scand., **59** (1986), 223–234.

[43] **A. Pierzchalski** *Some differential operators connected with quasiconformal deformations on manifolds*, Partial Differential Equations, Banach Center Publ. **19**, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1987, 205–212.

[44] **A. Pierzchalski**, *Ricci curvature and quasiconformal deformations of a Riemannian manifold*, manuscripta mathematica **66** (1989), 113–127.

[45] **A. Pierzchalski**, *Geometry of quasiconformal deformations of Riemannian manifolds*, (habilitation dissertation) Lodz University Press, 1997, 1–42.

[46] **A. Pierzchalski** *Gradients: the ellipticity and the elliptic boundary conditions - a jigsaw puzzle* Folia Mathematica, Acta Universitatis Lodziensis **19**, No. 1 (2017), 65–83.

[47] **H.M. Reimann**, *A rotation invariant differential equation for vector fields*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) **9** (1982), 159–174.

[48] **H. Rummler**, *Differential forms, Weitzenböck formulae and foliations.* Publ. Mat. **33** (1989), no. 3, 543–554.

[49] **Ph. Tondeur**, *Geometry of Foliations*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[50] **E. Stein, G. Weiss**, *Generalization of the Cauchy-Riemann equations and representations of the rotation group*, Amer. J. Math. 90 (1968), 163–196.

[51] **H. Weyl**, *Die asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalten elastischen Körpers*, Rendicoti di Circolo Mat. di Palermo **39** (1915), 1-49.

[52] **H. Weyl**, *The classical groups. Their invariants and representations*, fifteenth printing, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.

3. Życiorys naukowy

Dane personalne

- Antoni Pierzchalski
- data urodzenia: 12 lutego 1946
- miejsce urodzenia: Łódź, Polska

Wykształcenie

- 1975 Doktorat z matematyki w Instytucie Matematyki Polskiej Akademii Nauk, temat pracy doktorskiej *Algebraic criterion for quasiconformal equivalence of Riemannian manifolds*
- 1999 Habilitacja z matematyki (geometria różniczkowa), tytuł rozprawy *Geometry of quasiconformal deformations of Riemnnian manifolds* [45]

Przebieg pracy zawodowej

- 1971–1974 studia doktoranckie w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk,
- 1974–1975 asystent w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk,
- 1975–1984 adiunkt w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk,
- 1984–1990 adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego.
- 1991 visiting associate professor, Department of Mathematics, University of Iowa (dwa semestry)
- 1992–2000 adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego.
- 2001–2002 profesor nadzwyczajny na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego
- 2003–2004 visiting associate professor, Department of Mathematics, University of Iowa (trzy semestry)

- 2004– profesor nadzwyczajny na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego
- 2010–2016 pełniłem funkcję kierownika Katedry Analizy Matematycznej i Teorii Sterowania

Zainteresowania naukowe

- geometria różniczkowa
- analiza globalna
- geometria operatorów różniczkowych

Wybrane wizyty w ośrodkach akademickich

- Odense University, Dania (1984, 1987, 1988, 1989, 1990, 1994).
- Copenhagen University, Dania (1996, 1998).
- Cagliari University, Włochy (1998).
- University of Iowa, USA (1991-dwa semestry) visiting associate professor.
- Washington University in St. Louis, USA (1991).
- Oregon University, USA (1991).
- Odense University, Dania (2000), 2 tygodnie.
- University of Iowa, USA (2003-04 trzy semestry), visiting associate professor.
- Kazan State University, Rosja (2011) 1 tydzień.
- Aarhus University, Dania (2013, 2015, 2016, 2018), w sumie sześć tygodni.

Wybrane odczyty na seminariach

- 2007 Politechnika Częstochowska
- 2012 Uniwersytet Warmińsko-Mazurski
- 2012 Uniwersytet Jagielloński, Kraków
- 2015 Politechnika Białostocka
- 2015 Polska Akademia Nauk, Warszaw, Seminarium z Metod Geometrycznych Fizyki
- 2016 Uniwersytet Adama Mickiewicza, Poznań
- 2017 Uniwersytet Warszawski, Seminarium z Topologii Algebraicznej

Wybrane konferencje

- 2007 Midwest Geometry Conference at the University of Iowa, Iowa City, IA USA, 18 - 20 May 2007
- 2009 XV Conference On Analytic Functions And Related Topics, *Weitzenböck Formula for $SL(q)$-foliations*, Chełm, czerwiec 2009, wykład plenarny
- 2011 XVI Conference On Analytic Functions And Related Topics, *Gradients on leaves of a foliation*, Chełm, czerwiec 2011, wykład plenarny
- 2011 International Conference On Current Problems In Science And Art, Kazań, zaproszony wykładowca
- 2012 Differential Geometry, *Weitzenböck Formula on Lie algebroids*, Będlewo, czerwiec 2012
- 2013 Nonlinearities, *On conjugate submersions*, Małe Ciche, czerwiec 2013
- 2013 Differential Geometry And Applications, *Algebra and geometry of natural differential operators*, Brno, sierpień 2013
- 2013 Analiza i Topologia, *Laplacian in a symmetric bundle*, Gdańsk, wrzesień 2013

- 2013 Differential Geometry, *Gradients and Dirac operators on algebroids*, Kraków, listopad 2013
- 2014 Vector Distributions and Related Geometries, *Conjugate Submersions*, Warszawa, czerwiec 2014
- 2014 The Sixth Podlasie Conference on Mathematics, *Dirac operators on Lie algebroids*, Białystok, lipiec 2014; Organizator sesji *Operatory różniczkowe algebra, geometria, reprezentacje*
- 2015 Workshop on Dirac operators, quantum groups, and Lie algebroids Department of Mathematics Aarhus University, *Gradients and the Dirac operators on Lie algebroids*, Aarhus, marzec 2015, zaproszony wykładowca
- 2015 3rd Conference on Dynamical Systems and Applications, *On differential operators and geometric structures*, Łódź, kwiecień 2015, wykład plenarny
- 2016 Analysis Seminar, *Differential operators, geometry, boundary conditions*, Aarhus, maj 2016, zaproszony wykładowca
- 2017 Hyper-complex Seminar, *Elliptic boundary conditions for the operators of gradient and divergence in the bundle of symmetric tensors*, Będlewo, lipiec 2017
- 2018 XIX-th International Conference On Analytic Functions And Related Topics, *Geometry of Laplace type operators*, Rzeszów, czerwiec 2018
- 2018 Glances at Manifolds 2018 Kraków, *Differential operators in tensor bundles for different geometries*, czerwiec 2018
- 2018 Analysis Seminar, *The elliptic boundary conditions for different bundles and geometries*, Aarhus, listopad 2018, zaproszony wykładowca

Promotorstwo w zakończonych przewodach doktorskich

- Dorota Blachowska, Uniwersytet Łódzki (2003)
- Wojciech Kozłowski, Polska Akademia Nauk, Warszawa (2005)
- Szymon Walczak, Uniwersytet Łódzki (2005)
- Kamil Niedziałomski, Uniwersytet Łódzki (2008)
- Małgorzata Ciska, Uniwersytet Łódzki (2012)
- Anna Kaźmierczak, Uniwersytet Łódzki (2013)
- Agnieszka Klekot, Uniwersytet Łódzki (2015)
- Anna Kimaczyńska, Uniwersytet Łódzki (2017)

Promotorstwo w otwartych przewodach doktorskich

- Agnieszka Najberg, Uniwersytet Łódzki (od 2013)

Opieka naukowa nad doktorantami

- Marek Pietrzak, Uniwersytet Łódzki
- Magdalena Woźniakowska, Uniwersytet Łódzki

Recenzowane rozprawy doktorskie

1. Maciej Czarnecki, Uniwersytet Łódzki (2000)
2. Marek Badura, Uniwersytet Łódzki (2002)
3. Wojciech Kawa, Uniwersytet Łódzki (2005)
4. Agata Bezubik, Politechnika Warszawska (2010)
5. Magdalena Lużyńczyk, Uniwersytet Łódzki (2015)

6. Tomasz Zawadzki, Uniwersytet Łódzki (2015)
7. Tomasz Kostrzewa, Politechnika Warszawska (2019)

Osiągnięcia edukacyjne

- Byłem promotorem około kilkudziesięciu prac magisterskich.
- Byłem opiekunem naukowym 7 studentów indywidualnych. Czworo z nich zostało wyróżnionych nagrodą ministra.
- Wielu moich studentów otrzymało dyplom za chlubne studia.
- Od roku 2001 jestem opiekunem Studenckiego Koła Naukowego Fascynatów Matematyki

Lista publikacji

1) **A. Pierzchalski** On relations between linking hypersurface families in Euclidean spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., XXI (1973), 977-981.
2) **A. Pierzchalski** Lebesgue measure on Riemannian differential spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., **XXII** (1974), 1015-1020.
3) **A. Pierzchalski** Algebraic criterion of quasiconformality for Riemannian differiential spaces, Bull. Acad. Polon. Sci.,**XXIII** (1975), 305-313 (rozprawa doktorska).
4) **A. Pierzchalski**, *The k-module of level sets of differential mappings*, Scientific Communications of the Czechoslovakian-GDR-Polish School on Differential Geometry at Boszkowo (1978), Math. Inst. Polish Acad. Sci., Warsaw, 1979, 180-185.
5) **A. Pierzchalski** A variation of the modulus of submanifold families, Analytic Functions, Kozubnik, 1979, Lecture Notes in Math. 798, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980, 261-268.
6) **A. Pierzchalski**, *Przestrzenie kontaktowe*. Szkoła Letnia Funkcji Analitycznych, Błażejewko 1982, Uniwersytet Łódzki, 1982, 91-112.
7) **A. Pierzchalski**, *On quasiconformal deformations on manifolds*, Romannian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Proceedings, Part 1, Lecture Notes in Math. 1013, Springer-Velag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo, 1983, 171-182.
8) **A. Pierzchalski**, *On quasiconformal deformations of manifolds and hypersurfaces*, Ber. Univ. Jyvaskyla Math. Inst., **28** (1984), 79-94.
9) **A. Pierzchalski**, *Quasiconformality of pseudo-conformal transformations and deformations of hyper-surfaces in* $\mathbb{C}^n$, Math. Scand., **59** (1986), 223-234.
10) **A. Pierzchalski** *Some differential operators connected with quasiconformal deformations on manifolds*, Partial Differential Equations, Banach Center Publ. **19**, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1987, 205-212.
11) **A. Pierzchalski**, *Ricci curvature and quasiconformal deformations of a Riemannian manifold*, manuscripta mathematica **66** (1989), 113–127.
12) **J. Kalina, A. Pierzchalski** *Some differential operators in real and complex geometry* in Deformations of Mathematical Structures, 1989, Kluwer Academic Publishers, 3-28.
13) **B. Ørsted, A. Pierzchalski**, *The Ahlfors Laplacian on a Riemannian manifold*, Constantin Caratheodory: An International Tribute, 2, World Scientific, Teaneck, NJ, 1991, pp. 1021–1049.
14) **T.P. Branson, P.B. Gilkey, B. Ørsted, A. Pierzchalski**, *Heat equation asymptotics of a generalized Ahlfors Laplacian on a manifold with boundary*, in Operator Theory: Advances and Applications, **57**, Birkhauser Verlag, Basel, 1992, 1–13.

15) **A. Pierzchalski**, *Rachunek wariacyjny.* Leksykon Matematyczny, Wiedza Powszechna, Warszawa 1993.
16) **T.P. Branson, P.B. Gilkey, A. Pierzchalski**, *Heat equation asymptotics of elliptic operators with nonscalar leading symbol*, Math. Nachr. **166** (1994), 207–215.
17) **J. Kalina, B. Ørested, A. Pierzchalski, P. Walczak, G. Zang**, *Elliptic gradients and highest weights*, Bull. Polon. Acad. Sci. Ser. Math. **44** (1996), 511–519.
18) **B. Ørsted, A. Pierzchalski**, *The Ahlfors Laplacian on a Riemannian manifold with boundary*, Michigan Math. J. **43** (1) (1996), 99–122.
19) **A. Pierzchalski**, *Geometry of quasiconformal deformations of Riemannian manifolds*, (habilitation dissertation) Lodz University Press, 1997.
20) **J. Kalina, A. Pierzchalski, P. Walczak**, *Only one of the generalized gradients can be elliptic*, Ann. Polon. Math. **67** (1997), 111–120.
21) **T.P. Branson, A. Pierzchalski**, *Natural boundary conditions for gradients*, manuscript, 2004
22) **A. Pierzchalski, P. Walczak**, *Generalized gradients on foliated manifolds.* WMiI UŁ, preprint 2006/03.
23) **W. Kozłowski, A. Pierzchalski**, *Natural boundary value problems for weighted form Laplacians*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **VII** (2008), 343–367.
24) **A. Bartoszek, J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Weitzenböck formula for SL(q)-foliations.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **58** (2010), no. 2, 179–188.
25) **A. Bartoszek, J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Gradients for* SL(q)*–foliations.* J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 12, 2410–2416.
26) **A. Pierzchalski**, *Natural boundary value problems for Ahlfors-Laplacian.* Proceedings of International Conference "Current Problems of Art and Science I ", Kazan University Press, Kazań, 2011, 132-137.
27) **A. Klekot, A. Pierzchalski**, *Weitzenböeck formula for vector valued forms.* WMiI UŁ, preprint 2011/15.
28) **B. Balcerzak, J. Kalina, A. Pierzchalski**, *Weitzenböck formula on Lie algebroids.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **60** (2012), no. 2, 165–176.
29) **B. Balcerzak, A. Pierzchalski**, *Generalized gradients on Lie algebroids*, Ann. Global. Anal. Geom. **44**, no. 3 (2013) 319–337.
30) **B. Balcerzak, A. Pierzchalski**, *Derivatives of skew-symmetric and symmetric vector-valued tensors.* Works of The Mathematical Institute of the Ukrainian National Academy of Sciences. **10** (2013) pp. 35–55.
31) **B. Balcerzak, A. Pierzchalski**, *On Dirac operators on Lie algebroids.* Differential Geom. Appl. **35** (2014), suppl., 242–254.
32) **M. Ciska, A. Pierzchalski**, *On modulus of level sets of conjugate submersions.* Differential Geom. Appl. 36 (2014), 90–97.
33) **A. Kaźmierczak, A. Pierzchalski**, *On some criterion of conformality.* Balkan J. Geom. Appl. 21 (2016), no. 1, 51–57.
34) **A. Kimaczyńska, A. Pierzchalski**, *Elliptic operators in the bundle of symmetric tensors.* 50th Seminar "Sophus Lie", 193–218, Banach Center Publ., 113, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2017.
35) **A. Pierzchalski**, *Gradients: the ellipticity and the elliptic boundary conditions - a jigsaw puzzle* Folia Mathematica, Acta Universitatis Lodziensis Vol. 19, No. 1, pp. 65–83, 2017.