<u>AUTOREFERAT</u>

kandydata do tytułu profesora

dr hab. Stanisław Spodzieja prof. nadzwyczajny UŁ

Spis treści

Życiorys naukowy

Urodziłem się 17 marca 1961 roku w miejscowości Gana w gminie Praszka, w województwie Łódzkim.

Studia na kierunku Matematyka, na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego ukończyłem w 1986 roku.

Stopień doktora nauk matematycznych uzyskałem 28 czerwca 1994 r. na Wydziale Matematyki Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego, na podstawie rozprawy pod tytułem

Odwzorowania algebraiczne wieloznaczne a faktoryzacja wielomianów,

przygotowanej pod kierunkiem prof. dr. hab. Jacka Chądzyńskiego z Uniwersytetu Łódzkiego. Recenzentami byli:

prof. dr hab. Arkadiusz Płoski z Politechniki Świętokrzyskiej,

prof. dr hab. Tadeusz Winiarski z Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Stopień doktora habilitowanego uzyskałem 29 marca 2006 r. na Wydziale Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego, na podstawie rozprawy na temat

Lokalne i globalne własności odwzorowań i zbiorów analitycznych w kontekście wykładnika Łojasiewicza.

Recenzentami byli:

prof. dr hab. Jacek Chądzyński z Uniwersytet Łódzkiego,

prof. dr hab. Tadeusz Mostowski z Uniwersytetu Warszawskiego,

prof. dr hab. Piotr Tworzewski z Uniwersytetu Jagiellońskiego.

Nadanie stopnia zostało zatwierdzone przez Centralną Komisję do Spraw Stopni i Tytułów.

Na Uniwersytecie Łódzkim pracuję nieprzerwanie od 15 grudnia 1985 roku. Od 2006 roku zajmuję stanowisko profesora nadzwyczajnego Uniwersytetu Łódzkiego w Katedrze Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych na Wydziale Matematyki i Informatyki.

Osiągnięcia naukowe

Opis osiągnięć naukowych rozpocznę od umiejscowienia ich na tle badań innych autorów. Najpierw omówię wyniki przed habilitacją, a następnie po habilitacji. Najważniejsze wyniki sformułuję w postaci **twierdzeń** (12 przed habilitacją oraz 20 po habilitacji – o numerach od 13 do 32).

Prace autorskie i współautorskie oznaczam kolejnymi liczbami w nawiasach kwadratowych. Cytowane prace oznaczam początkowymi literami z nazwiska lub nazwisk autorów umieszczonych również w nawiasach kwadratowych.

Badania naukowe sytuuję w geometrii analitycznej i algebraicznej rzeczywistej i zespolonej. Przed habilitacją wiązały się one bardziej z geometrią zespoloną, a po habilitacji – z geometrią rzeczywistą. Większość z nich skupia się na własnościach metrycznych zbiorów i odwzorowań wielomianowych i semialgebraicznych. Motywami przewodnimi tych badań są nierówności i wykładniki Łojasiewicza dla odwzorowań i zbiorów w otoczeniu punktu, otoczeniu nieskończoności oraz nierówności globalne.

Nierówności Łojasiewicza pojawiły się pod koniec lat pięćdziesiątych ubiegłego wieku jako główne narzędzie badawcze w rozwiązaniu problemu dzielenia dystrybucji przez funkcję, postawionego przez wybitnego matematyka francuskiego L. Schwartza (1957), a rozwiązanego przez szwedzkiego matematyka, laureata Medalu Fieldsa, L. Hörmandera [Hö] w przypadku dzielenia dystrybucji przez wielomiany rzeczywiste, oraz przez S. Łojasiewicza [$Ł_2, Ł_3, Ł_4$]), w ogólnym przypadku dzielenia dystrybucji przez rzeczywiste funkcje analityczne. Do rozwiązania tego problemu Łojasiewicz stworzył subtelną i trudną teorię zbiorów semianalitycznych. Teoria ta przyczyniła się do powstania geometrii subanalitycznej uprawianej przez tak wybitnych matematyków jak: A. M. Gabrielov [Ga_1], E. Bierstone i P.D. Milman [BM] oraz laureatów Medalu Fieldsa, H. Hironakę [Hir_1, Hir_2] i R. Thoma. Nierówności Łojasiewicza znalazły nietrywialne zastosowania w wielu gałęziach matematyki, na przykład w równaniach różniczkowych przez L. Simona [Sim], układach dynamicznych przez J. Bolte, A. Daniilidisa, O. Ley'a i L. Mazeta [BDLM] i teorii osobliwości przez K. Kurdykę, T. Mostowskiego i A. Parusińskiego [KMP]. Wersje ilościowe tych nierówności, obejmujące szacowanie i wyliczanie wykładników, badane były przez znanego matematyka francuskiego B. Teissiera [Te]. Odgrywają one ważną rolę w rzeczywistej i zespolonej geometrii algebraicznej. Ostatnio duże zapotrzebowanie na efektywne oszacowania wykładników Łojasiewicza pojawiło się w teorii optymalizacji (patrz prace M. Schweighofera [$Schw_3$] i piszącego, wspólną z K. Kurdyką [37], co opisujemy dokładniej w punkcie II. 4. c)), a także w oszacowaniach tzw. globalnych błędów w pracy G. Li'ego, B.S. Mordukhovicha, T.S. Phama [LMP].

Przypomnijmy teraz definicje i podstawowe fakty związane z tymi wykładnikami. Przy rozwiązaniu problemu dzielenia dystrybucji S. Łojasiewicz użył następującej, kluczowej również w wielu innych zagadnieniach teorii zbiorów semianalitycznych nierówność [$Ł_2, Ł_4$]: *Dla zbiorów semianalitycznych i domkniętych X, $Y \subset \mathbb{R}^n$ oraz punktu $x_0 \in X \cap Y$ istnieją otoczenie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punktu x_0 oraz stałe $C, \nu > 0$, że*

$$\text{(S)} \qquad \operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geqslant C \operatorname{dist}(x, X \cap Y)^\nu \quad \text{dla} \quad x \in \Omega,$$

gdzie $\operatorname{dist}(x, V)$ jest odległością punktu x od zbioru V ($\operatorname{dist}(x, V) = 1$, gdy $V = \emptyset$). Warunek ten, zwany *warunkiem separacji regularnej*, spełniają również zbiory subanalityczne ([Hir_2,$Ł_4$, $Ł_6$]). Najmniejszy wykładnik ν w nierówności (S) nazywany jest *wykładnikiem Łojasiewicza* *zbiorów* X, Y w punkcie x_0 i oznaczany $\mathcal{L}_{x_0}(X,Y)$. Wiadomo, że $\mathcal{L}_{x_0}(X,Y) \in \mathbb{Q}$ oraz, że nierówność (S) zachodzi dla $\nu = \mathcal{L}_{x_0}(X,Y)$, pewnej stałej $C > 0$ i otoczenia Ω punktu x_0. Dotyczy to również następnych, przypomnianych niżej, wykładników Łojasiewicza.

Niech $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}, 0)$ będzie rzeczywistą funkcją[1] analityczną (lub semialgebraiczną klasy C^1) zmiennych $x = (x_1, \ldots, x_n)$ i niech ∇f będzie gradientem funkcji f, tj. $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) : (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$. Wówczas istnieją stałe dodatnie C, ε oraz stała $\varrho \in [0,1)$ takie, że zachodzi następująca *nierówność Łojasiewicza z gradientem* (por. [Ł$_4$] lub [Ł$_5$]):

$$(\text{Ł}_1) \qquad |\nabla f(x)| \geqslant C|f(x)|^{\varrho} \quad \text{gdy} \quad |x - a| < \varepsilon.$$

Kres dolny wykładników ϱ w (Ł$_1$), oznaczany przez $\varrho_a(f)$, nazywany jest *wykładnikiem Łojasiewicza w nierówności z gradientem.* Nierówność (Ł$_1$) posłużyła Łojasiewiczowi do pokazania, że zbiór zer funkcji analitycznej w otoczeniu punktu jest retraktem deformacyjnym tego otoczenia [Ł$_5$]. Jest ona ściśle związana z hipotezą gradientową R. Thoma (patrz [KMP]) i zachodzi również dla funkcji holomorficznych $f : (\mathbb{C}^n, a) \to (\mathbb{C}, 0)$, patrz [L-JT]. Znając oszacowanie wykładnika $\varrho_a(f)$, można oszacować wykładnik Łojasiewicza funkcji f i gradientu funkcji f (patrz [35]).

Jeśli $F : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ jest odwzorowaniem analitycznym rzeczywistym lub semialgebraicznym ciągłym (określonym w pewnym otoczeniu $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu a), to istnieją stałe dodatnie C, η, ε takie, że zachodzi następująca *nierówność Łojasiewicza*:

$$(\text{Ł}_2) \qquad |F(x)| \geqslant C \operatorname{dist}(x, V(F))^{\eta} \quad \text{jeśli} \quad |x - a| < \varepsilon,$$

gdzie $V(F) = \{x \in U : F(x) = 0\}$. Kres dolny wykładników η w nierówności (Ł$_2$) nazywany jest *wykładnikiem Łojasiewicza* odwzorowania F w punkcie a i oznaczany przez $\mathcal{L}_a(F)$. Wykładnik $\mathcal{L}_a(F)$ jest istotnym niezmiennikiem i narzędziem w teorii osobliwości; związany jest on między innymi z wykładnikiem Noethera, krotnością odwzorowania i liczbą Milnora; znalazł też trwałe miejsce w równaniach różniczkowych (patrz na przykład [AK$_1$, AK$_2$, BŁ, BR, Cy$_3$, Ga$_2$, Gw, Ko$_1$, Ko$_2$, Ko$_3$, Kui, Kuo$_1$, Kuo$_2$, KMP, KP, L-JT, Pł$_2$, Te, 19]).

Wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowania $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, oznaczanym symbolem $\mathcal{L}_\infty(F)$, nazywany jest kres górny wykładników $\eta \in \mathbb{R}$ spełniających następującą *nierówność Łojasiewicza w nieskończoności*:

$$|F(x)| \geqslant C|x|^{\eta} \quad \text{dla } |x| > R \text{ dla pewnych stałych } C > 0 \text{ i } R > 0.$$

Jeśli F jest ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym, to $\mathcal{L}_\infty(F) \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty\}$ oraz $\mathcal{L}_\infty(F) > -\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór $F^{-1}(0)$ jest zwarty. Wykładnik ten w przypadku zespolonym, był rozważany przez wielu autorów w kontekście efektywnego Nullstellensatz, w przypadku rzeczywistym i zespolonym do badania właściwości odwzorowań i zbioru punktów bifurkacyjnych wielomianu (patrz na przykład [Brow, Ch, CK$_3$, CK$_5$, CK$_7$, Cy$_3$, CyKT, Ha, J$_4$, J$_5$, JK1, JKS, Ko$_1$, Ko$_2$, Ko$_3$, Pa$_2$, Pł$_1$, Sk, Shif, Lo$_1$, Lo$_2$, Te, 18, 19, 26, 28]). Najgłębszym wynikiem w tym kierunku jest nierówność Chądzyńskiego–Kollára (patrz [Ch, Ko$_1$, Ko$_2$, Ko$_3$, CyKT, J$_5$]):

Dla dowolnego odwzorowania wielomianowego $F = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ takiego, że[2] *$\#F^{-1}(0) < \infty$, zachodzi*

$$(1) \qquad \mathcal{L}_\infty(F) \geqslant d_m - B(n; d_1, \ldots, d_m),$$

[1] Przez $F : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}^m, b)$, gdzie $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, oznaczamy odwzorowanie określone w pewnym otoczeniu $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu a o wartościach w $\mathbb{R}^m$ takie, że $F(a) = b$.

[2] $\#A$ oznacza ilość elementów zbioru A.

gdzie $d_j = \deg f_j$ *dla* $j = 1, \ldots, m$, $d_1 \geqslant \cdots \geqslant d_m > 0$ *oraz*

$$B(n; d_1, \ldots, d_m) = \begin{cases} d_1 \cdots d_m & \text{jeśli } m \leqslant n, \\ d_1 \cdots d_{n-1} d_m & \text{jeśli } m > n. \end{cases}$$

Centralne miejsce w moich badaniach naukowych zajmują poszukiwania metod ilościowych i efektywnych dotyczących wyliczania wykładników Łojasiewicza (prace [11–13, 15, 16, 18, 19, 23] przed habilitacją oraz [26, 27, 30, 39, 45, 47, 48] po habilitacji), szacowania tych wykładników (prace [35, 38] po habilitacji) oraz zastosowania ich do klasyfikacji osobliwości i charakteryzacji punktów bifurkacyjnych wielomianów (prace [28, 29, 40] po habilitacji). Za najważniejsze wyniki dorobku naukowego uważam zastosowanie wykładnika Łojasiewicza do minimalizacji wielomianów na zbiorach semialgebraicznych (praca [37] oraz prace [33, 36] po habilitacji).

Osiągnięcia przed habilitacją

Przed habilitacją badania prowadziłem w zakresie geometrii algebraicznej i analitycznej zespolonej. Można je podzielić na następujące grupy tematyczne:

1. ***Wykładnik Łojasiewicza***
2. ***Faktoryzacja wielomianów***
3. ***Automorfizmy i hipoteza jakobianowa***

1. Wykładnik Łojasiewicza. ([8,11,13,18,21,23] oraz [12,15,16,19] wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej). Prace te leżą w kręgu badań nad wykładnikiem Łojasiewicza w punkcie odwzorowań holomorficznych i subanalitycznych oraz nad wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności odwzorowań wielomianowych.

a) ***Wykładnik Łojasiewicza w punkcie.*** W pracy [12] sprowadzono badania wykładnika Łojasiewicza i krotności dla odwzorowań holomorficznych $f = (f_1, ..., f_m) : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$, gdzie $m > n$, o izolowanym zerze w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, do dobrze zbadanego przypadku, gdy $m = n$. Przez $i_0(f)$ oznaczamy krotność odwzorowania f w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, tj., krotność przecięcia niewłaściwego wykresu funkcji f i przestrzeni $\mathbb{C}^n \times \{0\}$ w punkcie $(0, 0)$ w sensie R. Achillesa, P. Tworzewskiego i T. Winiarskiego [ATW] lub inaczej krotność Hilberta-Samuela ideału wyznaczonego przez współrzędne F. Jeśli $m = n$, to $i_0(f)$ jest kowymiarem ideału $(f_1, ..., f_n)\mathcal{O}$, gdzie $\mathcal{O}$ jest pierścieniem kiełków funkcji holomorficznych w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$. Dla odwzorowania holomorficznego f o izolowanym zerze w zerze, mamy

Twierdzenie 1 ([12], Theorems 1.1 i 1.2). *Dla generycznego*[3] *odwzorowania liniowego* $L : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ *zachodzi* $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}_0(L \circ f)$ *oraz* $i_0(f) = i_0(L \circ f)$.

Po habilitacji zostało ono przeniesione, w zakresie wykładnika $\mathcal{L}_0(f)$, na przypadek rzeczywisty w pracy [30] i zastosowane w pracy [38]. Twierdzenie 1 pozwala przenieść wiele własności wykładnika Łojasiewicza i krotności na przypadek $m > n$, na przykład: $k_n \leqslant \mathcal{L}_0(f) \leqslant i_0(f) + k_n - \prod_{i=1}^n k_i$, gdzie $k_j = \operatorname{ord} f_j$, $k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_m$ ([Ch] dla $m = n = 2$, [Pł$_4$] dla $m = n$). Sprowadza również badania krotności i wykładnika Łojasiewicza odwzorowań holomorficznych do przypadku odwzorowań wielomianowych, bowiem mamy

[3] to znaczy z każdego poza ewentualnie właściwym podzbiorem algebraicznym danego zbioru.

Twierdzenie 2 ([Pł$_4$] dla $m = n$, [12] dla $m > n$) *Jeśli $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ jest odwzorowaniem wielomianowym takim, że* $\operatorname{ord}(f - g) > \mathcal{L}_0(f)$*, to* $\mathcal{L}_0(f) = \mathcal{L}_0(g)$ *oraz* $i_0(f) = i_0(g)$.

W erracie [12a] do pracy [12], usunięto błąd w sformułowaniu [12, Proposition 1.2].

W pracy [19] rozwiązano problem osiągania wykładnika Łojasiewicza na krzywej analitycznej. Wiąże się to z następującym twierdzeniem udowodnionym, przy pomocy lematu o wyborze krzywej, przez J. Bochnaka i J.J. Rislera [BR]: *Jeśli $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ są domkniętymi zbiorami subanalitycznymi, to dla każdego względnie zwartego otoczenia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ punktu $x_0 \in X \cap Y$, liczba*

$$\mathcal{L}_\Omega(X, Y) := \inf\{\nu \in \mathbb{R} : \exists_{C>0}\ \forall_{x\in\Omega} \quad \operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geqslant C \operatorname{dist}(x, X \cap Y)^\nu\}$$

jest wymierna.

Wiadomo, że $\mathcal{L}_{x_0}(X, Y) = \inf\{\mathcal{L}_\Omega(X, Y) : \Omega$ – względnie zwarte otoczenie punktu $x_0\}$. Jeśli $x_0 \notin \operatorname{Int} X \cap Y$, to z lematu o wyborze krzywej wynika, że dla każdego względnie zwartego otoczenia Ω punktu x_0, wykładnik $\mathcal{L}_\Omega(X, Y)$ jest osiągnięty na pewnej krzywej analitycznej $\varphi : [0, r) \to \Omega$ takiej, że $\varphi((0, r)) \subset \Omega \setminus (X \cap Y)$ oraz $\varphi(0) \in X \cap Y$, to znaczy zachodzi

$$\operatorname{dist}(\varphi(t), X) + \operatorname{dist}(\varphi(t), Y) \leqslant C' \operatorname{dist}(\varphi(t), X \cap Y)^\nu \quad \text{dla} \quad t \in [0, r), \tag{2}$$

gdzie $\nu = \mathcal{L}_\Omega(X, Y)$ oraz $C' > 0$ jest pewną stałą. Problem osiągania wykładnika Łojasiewicza wiąże się z pytaniem: *czy istnieje krzywa φ spełniająca* (2) *o początku $\varphi(0) = x_0$*? Odpowiedź na to pytanie jest negatywna, co wykazano w [19, Example 2.5]. Fakt ten był główną barierą w pokazaniu, że $\mathcal{L}_{x_0}(X, Y) \in \mathbb{Q}$. Trudność tę udało się pokonać w pracy [19] dzięki zastosowaniu stratyfikacji lipschitzowskich wprowadzonych przez T. Mostowskiego [Mos], które zapewniają lokalną bi-lipschitzowską trywializację zbiorów subanalitycznych (co udowodnił A. Parusiński [Pa$_1$]). Mianowicie udowodniono

Twierdzenie 3 ([19], Theorems 1.3, 1.4) *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ będą domkniętymi zbiorami subanalitycznymi oraz $x_0 \in X \cap Y$.*

(i) *Wówczas $\mathcal{L}_{x_0}(X, Y) \in \mathbb{Q}$ oraz nierówność* (S) *zachodzi dla $\nu = \mathcal{L}_{x_0}(X, Y)$, pewnego otoczenia Ω punktu x_0 oraz $C > 0$.*

(ii) *Jeśli $x_0 \notin \operatorname{Int} X \cap Y$, to $\mathcal{L}_{x_0}(X, Y)$ jest osiągnięty na krzywej analitycznej, tzn.* (2) *zachodzi dla $\nu = \mathcal{L}_{x_0}(X, Y)$.*

Dowód twierdzenia 3 przeprowadzono w nieco ogólniejszej sytuacji (patrz [19, Theorem 1.5]). Mianowicie, dla trzech domkniętych zbiorów subanalitycznych X, Y, Z takich, że $X \cap Y \subset Z$ oraz punktu $x_0 \in X \cap Y$ pokazano, że najmniejszy wykładnik $\nu \in \mathbb{R}$ spełniający nierówność

$$\operatorname{dist}(x, Y) \geqslant C \operatorname{dist}(x, Z)^\nu \qquad \text{dla} \qquad x \in \Omega \cap X$$

dla pewnych $C > 0$ i otoczenia Ω punktu x_0, jest liczbą wymierną oraz (przy założeniu, że $x_0 \notin \operatorname{Int} X \cap Y$) wykładnik ten jest osiągnięty na krzywej analitycznej. Ten najmniejszy wykładnik oznaczamy $\mathcal{L}_{x_0}(X; Y, Z)$. Stratyfikacja Lipschitzowska $X \cup Y \cup Z = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ zachowuje wykładnik Łojasiewicza, tzn. funkcja $X \cap Y \ni x \mapsto \mathcal{L}_x(X; Y, Z)$ jest stała na każdym płacie $S_\alpha \subset X \cap Y$ ([19, Corollary 2.6]), w szczególności zbiór $\{\mathcal{L}_x(X; Y, Z) : x \in$

$X \cap Y\}$ jest skończony (patrz [19, Corollary 2.7]). Główną przyczyną rozważania wykładnika $\mathcal{L}_{x_0}(X;Y,Z)$ zamiast $\mathcal{L}_{x_0}(X,Y)$ była następująca obserwacja ([19, Corollary 3.1]):

Jeśli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest domkniętym zbiorem subanalitycznym, to dla każdego odwzorowania subanalitycznego $f : (X, x_0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$,

$$\mathcal{L}_{x_0}(f) = \mathcal{L}_{(x_0,0)}(\Gamma(f); X \times \{0\}, V \times \mathbb{R}^m),$$

gdzie $\Gamma(f)$ jest wykresem odwzorowania f i $V = f^{-1}(0)$.

Z powyższego wynika, że dla ciągłego odwzorowania semialgebraicznego $f : X \to \mathbb{R}^m$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym, istnieje uniwersalny wykładnik $\mathcal{L}(f) \in \mathbb{Q}$ taki, że dla $\nu = \mathcal{L}(f)$, nierówność Łojasiewicza $|f(x)| \geqslant C \operatorname{dist}(x,V)^\nu$ zachodzi w otoczeniu każdego punktu zbioru V. Pozwala to przenieść nierówność S. Ji, J. Kollára i B. Shiffmana [JKS] na przypadek odwzorowań semialgebraicznych ([19, Theorem 3.5]):

$$\text{(JKS)} \qquad |f(x)|(1+|x|)^l \geqslant C \operatorname{dist}(x,V)^{\mathcal{L}(f)} \quad \text{w} \quad X$$

dla pewnych $l \in \mathbb{N}$ oraz $C > 0$. Nierówność (JKS) i wykładnik $\mathcal{L}_{x_0}(f)$ przenoszą się również na przypadek dwóch odwzorowań ([L-JT], [19, Corollary 4.1, Theorem 4.5]).

b) ***Wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności.*** Niech $f = (f_1, ..., f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. W pracy [21] pokazano, że badanie włókien odwzorowania f i wykładnika $\mathcal{L}_\infty(f)$ można sprowadzić do przypadku zbadanego, gdy $m = n$ ([Ch, Pł$_3$]), mianowicie pokazano, że

Twierdzenie 4 ([21], Theorem 1, Corollary 1) *Jeśli $m > n > 1$, to istnieje odwzorowanie wielomianowe $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ takie, że $f^{-1}(0)$ jest suma pewnych składowych nierozkładalnych włókna $g^{-1}(0)$. Jeśli dodatkowo $f^{-1}(0)$ jest zbiorem skończonym, to zbiór $g^{-1}(0)$ jest skończony i $\mathcal{L}_\infty(f) \geqslant \mathcal{L}_\infty(g)$.*

Twierdzenie to zostało wykorzystane w pracy [CyKT] do sprowadzenia dowodu nierówności typu Chądzyńskiego-Kollara (1) do przypadku odwzorowań wielomianowych, których wymiary dziedziny i przeciwdziedziny są równe.

W pracy [16] kontynuowano badania z [21] i podobnie jak w [12], sprowadzono badanie wykładnika $\mathcal{L}_\infty(f)$ odwzorowania wielomianowego $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $m > n$, do przypadku, gdy $m = n$, przez składanie f z odwzorowaniami liniowymi (patrz [16, Theorem 2.1]).

Wykładnik $\mathcal{L}_\infty(f)$ charakteryzuje właściwość odwzorowania wielomianowego f (patrz [Ch, Pł$_3$]), to znaczy odwzorowanie f jest właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{L}_\infty(f) > 0$. Opierając się na tej własności, w pracy [11] wspólnej z T. Rodakiem pokazano:

Twierdzenie 5 ([11]) *Każde odwzorowanie wielomianowe $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ domknięte w topologii Zariskiego jest właściwe.*

W pracy [13], wspólnej z T. Krasińskim, uogólniono powyższe twierdzenie na przypadek odwzorowań regularnych zespolonych. Wyniki te uogólnił Z. Jelonek [J$_2$] na przypadek dowolnych ciał algebraicznie domkniętych.

W badania punktów bifurkacyjnych[4] wielomianu $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, wpisują się, następujące globalne wersje nierówności Bochnaka i Łojasiewicza [BŁ] i nierówności z gradientem, uzyskane w pracy [15] oraz pracy [18] wspólnej z J. Gwoździewiczem:

Twierdzenie 6 ([15], Theorem 1 i [18], Theorem 3.1) *Istnieją stałe* $C, R, \varepsilon > 0$ *takie, że*

$$\begin{aligned} |f(z)| \geqslant R \quad &\Rightarrow \quad |z||\nabla f(z)| \geqslant C|f(z)|, \\ |f(z)| \leqslant \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad |z||\nabla f(z)| \geqslant C|f(z)|. \end{aligned}$$

Dla wielomianu dwóch zmiennych $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ udowodniono odpowiednik globalny nierówności Łojasiewicza z gradientem [$Ł_4$] (patrz [15, Corollary 4] i [18, Theorem 7.5]):

Jeśli $d = \deg f > 0$, *to istnieją stałe* $C, R, \varepsilon > 0$ *takie, że*

$$\begin{aligned} |f(z)| \geqslant R \quad &\Rightarrow \quad |\nabla f(z)| \geqslant C|f(z)|^{-(d-1)^2}, \\ |f(z)| \leqslant \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad |\nabla f(z)| \geqslant C|f(z)|^{(d-1)^2}. \end{aligned}$$

W przypadku wielowymiarowym powyższe nierówności zachodzą przy dodatkowym założeniu, że wielomian f spełniania tak zwany warunek Fedorjuka.

Zbiór punktów bifurkacyjnych w nieskończoności wielomianu f oznaczamy $B_\infty(f)$. Badania tego zbioru można znaleźć na przykład w [CK_8], [GwP], [Ha], [Pa_2], [Ve]. Z powyższych nierówności wynika znany fakt, że *zbiór* $B_\infty(f)$ *jest skończony* oraz

Twierdzenie 7 ([18], Corollary 6.1, por. [CK_4, GwP, Ha, 15]) *Jeśli* $d = \deg f > 2$, *to*

$$\lambda \in B_\infty(f) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_\infty(f - \lambda, \nabla f) \leqslant -\frac{1}{d-2}. \tag{3}$$

J. Chądzyński i T. Krasiński [CK_4] pokazali, że oszacowania $\mathcal{L}_\infty(f - \lambda, \operatorname{grad} f) \leqslant -\frac{1}{d-2}$ w (3) nie można poprawić. W pracy [18] bardzo przydatne było poniższe twierdzenie typu Charzyńskiego, Kozłowskiego oraz Smale'a, które jest konsekwencją twierdzenia Koebe'go o pokryciu (por. [23] i [CK_4, Proposition 2.3]).

Twierdzenie 8 ([18], Theorem 2.1) *Niech* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *będzie wielomianem stopnia* $d > 1$, $\varphi_1, ..., \varphi_d \in \mathbb{C}$ *oraz* $\xi_1, ..., \xi_{d-1} \in \mathbb{C}$ *odpowiednio wszystkimi pierwiastkami* P *oraz pochodnej* P'. *Wówczas*

$$\min_{1 \leqslant k \leqslant d-1} |P(\xi_k)| \ \leqslant \ 4 \min_{i \neq j} (|\varphi_i - \varphi_j||P'(\varphi_i)|).$$

W pracy [23], w oparciu o twierdzenie 8, podano nowe elementarne dowody znanych wzorów T. C. Kuo i Y. C. Lu [KLu] na wykładnik Łojasiewicza gradientu funkcji holomorficznej w zerze oraz wzoru H. V. Ha [Ha] na wykładnik Łojasiewicza gradientu wielomianu w nieskończoności.

Praca [8], wspólna z T. Krasińskim, poświęcona jest porównaniu zbiorów zespolonych i rzeczywistych punktów bifurkacyjnych wielomianu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

[4] Mówimy, że punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *typowy w nieskończoności* dla funkcji $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, gdy istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ i zbiór zwarty $K \subset \mathbb{C}^n$ taki, że $f : f^{-1}(U) \setminus K \to U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞. W przeciwnym razie, punkt λ nazywamy *bifurkacyjnym w nieskończonosci.* Analogicznie definiuje się punkty bifurkacyjne w nieskończoności funkcji rzeczywistych.

2. Faktoryzacja wielomianów. ([1, 5, 7, 9, 10, 17]). Prace te poświęcone są zagadnieniom rozkładalności wielomianów oraz przedstawialności ich w "prostszej" postaci. Podobne badania można znaleźć w pracach [BY, Cy_1, Fur, Nett, $\mathrm{Pł}_5$, $\mathrm{Pł}_6$, Sa] oraz w monografii [Schin].

W pracy [5] przedstawiono opis odwzorowań algebraicznych wieloznacznych, to znaczy zbiorów kiełków odwzorowań analitycznych powiązanych relacją przedłużenia wzdłuż krzywych, których współrzędne spełniają równania algebraiczne. Wyniki te posłużyły do skonstruowania w [7] ciała funkcji Nasha i pokazania, że jest to algebraiczne domknięcie ciała funkcji wymiernych wielu zmiennych. Główną trudnością było tam określenie filtracji przestrzeni $\mathbb{C}^n$ rodziną obszarów jednospójnych $\Omega_P \subset \mathbb{C}^n$, indeksowanych wielomianami $P \in \mathbb{C}[x]$, $x = (x_1, ..., x_n)$ takich, że $P(z) \neq 0$ dla $z \in \Omega_P$ oraz zamkniętą ze względu na przecięcie, tzn. $\Omega_{PQ} = \Omega_P \cap \Omega_Q$. W [7] podano również warunki nierozkładalności wielomianów o współczynnikach w ciele funkcji Nasha. Badania te były kontynuowane w pracy [32] po habilitacji.

Prace [9] i [10], wspólne z M. Frontczak i P. Skibińskim, dotyczą twierdzeń typu Bertiniego-Krulla o rozkładalności wielomianu (patrz [Cy_1, Fur, $\mathrm{Pł}_5$, Sa, Schin]). Niech R będzie pierścieniem funkcji holomorficznych w pewnym obszarze $G \subset \mathbb{C}^m$ lub $R = \mathbb{K}[\lambda]$, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki zero. Główne wyniki pracy [10] dotyczą warunków na to aby wielomian $F \in R[x]$ można było przedstawić w postaci $h(\lambda, Q(\lambda, x))$, gdzie $h \in R[z]$, $Q \in R[x]$ oraz $\deg Q < \deg P$. Warunkiem takim jest na przykład: rozkładalność wielomianu $P(\lambda, x) - \tau \in \mathbb{C}[x]$ przy ustalonych parametrach λ, τ ([10, Theorem 1, Corollary 6], patrz też [Cy_1, Fur, $\mathrm{Pł}_5$, Schin]). Kontynuacją [10] jest publikacja [9] dotycząca twierdzenia Salomona o oszacowaniu wymiaru przestrzeni rozpiętej na współczynnikach czynników rozkładu wielomianu. Główny rezultat pracy [9] można zapisać następująco:

Twierdzenie 9 ([9], Theorem 2) *Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym oraz $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$, $x = (x_1, ..., x_n)$ będą układami zmiennych. Jeśli wielomian $F \in \mathbb{K}[\lambda, x]$ jest nierozkładalny nad $\mathbb{K}(\lambda)$, to ilość liniowo niezależnych nad $\mathbb{K}$ współczynników każdego nierozkładalnego czynnika wielomianu F nad domknięciem rozdzielczym ciała $\mathbb{K}(\lambda)$ nie przekracza ilości punktów o współrzędnych całkowitych wielościanu Newtona wielomianu F.*

W przypadku $m = 1$ wynik ten daje twierdzeniem Salomona (patrz [Sa, Schin]).

Praca [17], wspólna z A. Nowickim, poświęcona jest rozkładowi wielomianu na tak zwane części urojone. Mianowicie, niech $L = k[\xi]$ będzie skończonym rozszerzeniem ciała k charakterystyki zero i niech $\varphi(t) = t^m - a_{m-1}t^{m-1} - \cdots - a_0$ będzie wielomianem minimalnym dla ξ. *Rozkładem urojonym* wielomianu $f \in L[z]$ zmiennej z nazywamy rozkład na sumę:

$$f(x_0 + \xi x_1 + \cdots + \xi^{m-1}x_{m-1}) = u_0 + \xi u_1 + \cdots + \xi^{m-1}u_{m-1},$$

gdzie $u_0, ..., u_{m-1} \in k[x]$, $x = (x_0, ..., x_{m-1})$. Ciąg $u = (u_0, ..., u_{m-1})$ nazywamy ciągiem *części urojonych* wielomianu f. Głównym wynikiem pracy jest

Twierdzenie 10 ([17], Theorem 3.8) *Ciąg $u = (u_0, ..., u_{m-1})$ jest ciągiem części urojonych pewnego wielomianu $f \in L[z]$ wtedy i tylko wtedy, gdy u spełnia następujące uogólnienie warunków Cauchy-Riemanna:*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_{i-1}}, \qquad i = 1, ..., m-1,$$

gdzie $\overline{u} = (\overline{u}_0, ..., \overline{u}_{m-1})$ jest określone wzorem $\overline{u}_i = a_i u_{m-1} + u_{i-1}$, przy czym $u_{-1} = 0$.

Ponadto pokazano, że części urojone wielomianu f są względnie pierwsze w $k[x]$ oraz podano ich zastosowanie do teorii liczb w przypadku $m = 2$.

W pracy [1] podano nowy elementarny dowód następującego twierdzenia:

Twierdzenie 11 ([1]) *Niech $F = (F_1, ..., F_n) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym jednorodnym, gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem charakterystyki zero. Jeśli odwzorowanie F ma nietrywialne zero, to jego jakobian należy do ideału wyznaczonego przez $F_1, ..., F_n$.*

Twierdzenie to jest znane z książki E. Netto [Nett, p. 142], jednak jego dowód nie spełniał obecnych wymogów precyzji. Ma ono duże znaczenie w oszacowaniu wykładnika Noethera (patrz [Pł$_6$]). Zachodzi ono również dla odwzorowań holomorficznych (patrz [BY]).

Do grupy tej można też zaliczyć część wyników pracy [14]. Ze względu na związki z automorfizmami została ona zaliczona do grupy 3.

3. Automorfizmy i hipoteza jakobianowa. ([2–4, 14, 24]). Prace te leżą w kręgu badań nad hipotezą jakobianową mówiącą, że odwzorowanie wielomianowe $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ o jakobianie $J(F)$ stałym różnym od zera jest automorfizmem pierścienia $\mathbb{C}[x]$, $x = (x_1, ..., x_n)$. Hipotezie tej poświęconych jest wiele prac, na przykład [BCW, CCS, Dr, E, Ka, Ru, RW, St, Wr].

Główne twierdzenie pracy [2] mówi, że składanie operatorów Whitneya

$$W_i(M) = J(M, F_1, ..., F_{i-1}, F_{i+1}, ..., F_n), \quad M \in \mathbb{C}[x], \quad i = 1, ..., n,$$

jest przemienne wtedy i tylko wtedy, gdy $J(F) = \text{const}$. Wynik ten jest uogólnieniem głównego wyniku Z. Charzyńskiego, J. Chądzyńskiego i P. Skibińskiego z pracy [CCS]. Operatory W_i posłużyły w pracy [4] wspólnej z T. Krasińskim, do podania kryterium na to aby odwzorowanie wielomianowe było automorfizmem pierścienia $\mathbb{C}[x]$. Kryterium to jest przeniesieniem dwuwymiarowego wyniku Y. Steina [St] ma przypadek wielowymiarowy.

Głównym rezultatem pracy [14] wspólnej z T. Krasińskim jest

Twierdzenie 12 ([14], Theorem 3) *Dla każdego otwartego odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, gdzie $m \geqslant 3$, istnieje nieosobliwa liniowa zamiana zmiennych $\alpha : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ taka, że każda współrzędna odwzorowania $\alpha \circ F$ jest całkowicie prymitywna, tzn. każde jej włókno jest nierozkładalne.*

Rezultat ten jest uogólnieniem wielowymiarowym wyniku Kalimana [Ka] dla $m = n = 2$, gdzie zakłada się dodatkowo $J(F) = 1$. Metoda dowodu twierdzenia 12 nie obejmuje przypadku dwuwymiarowego.

Wiadomo, że każdy $\mathbb{C}$-automorfizm pierścienia $\mathbb{C}[x, y]$ jest złożeniem skończonej ilości automorfizmów liniowych i trójkątnych. W 2003 r., I. P. Shestakov i U. U. Umirbaev [ShU] udowodnili, że automorfizm Nagaty [Na] pierścienia $\mathbb{C}[x, y, z]$ nie spełnia powyższej własności. W pracy [24] (i [20] opublikowanej po habilitacji) pokazano, że automorfizm Nagaty rozważany jako automorfizm pierścienia $\mathbb{K}[x, y, z, w]$, gdzie $\mathbb{K}$ jest dowolnym pierścieniem z jedynką, jest złożeniem skończonej ilości automorfizmów trójkątnych. Wynik ten w 1989 r. uzyskała M. K. Smith [Sm] przy założeniu, że $\mathbb{K}$ jest pierścieniem charakterystyki zero.

Osiągnięcia po habilitacji

Badania naukowe po habilitacji mieszczą się w geometrii algebraicznej i analitycznej rzeczywistej i zespolonej. Ostatnio skupiają się one na rzeczywistej geometrii algebraicznej. Można je podzielić na następujące grupy tematyczne:

1. Efektywne metody obliczania wykładnika Łojasiewicza

2. Efektywne metody szacowania wykładnika Łojasiewicza

3. Typy topologiczne odwzorowań

4. Sumy kwadratów i optymalizacja

5. Ciała rzeczywiste

Ważne miejsce w moich badaniach naukowych zajmują poszukiwania metod ilościowych i efektywnych dotyczących wyliczania wykładników Łojasiewicza (prace [26, 27, 30, 39, 45, 47, 48]). W pracach [26, 27, 30, 39] używamy metody geometrii algebraicznej i analitycznej oraz metody teorii przecięć niewłaściwych. Prace [45, 47, 48] mają charakter przeglądowy.

Wśród osiągnięć po habilitacji, łączących się z wykładnikiem Łojasiewicza, istotne miejsce zajmują jego zastosowania do klasyfikacji osobliwości (prace [28, 29, 40]): związki wykładnika Łojasiewicza gradientu wielomianu przy jego poziomicy z trywializacją tego wielomianu w otoczeniu tej poziomicy [28]; wpływ wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności funkcji Rabiera różniczki odwzorowania na izotopijność odwzorowań w otoczeniu nieskończoności [29]; wpływ wykładnika Łojasiewicza gradientu funkcji o nieizolowanej osobliwości na skończoną determinowalność dżetu tej funkcji [40]. W powyższych pracach istotną rolę odegrały metody geometrii różniczkowej, równań różniczkowych w zakresie własności potoków pól wektorowych, algebry obliczeniowej i geometrii algebraicznej, w tym stratyfikacji lipschitzowskich i zbiorów punktów niewłaściwości odwzorowań.

Za najważniejsze wyniki po habilitacji uważam zastosowanie wykładnika Łojasiewicza do minimalizacji wielomianu na zbiorze semialgebraicznym zwartym oraz podanie metody przybliżonego wyznaczania punktów krytycznych wielomianu na zbiorze semialgebraicznym wypukłym (praca [37], przy wykorzystaniu prac [35, 38] o oszacowaniu wykładników Łojasiewicza). Z tymi problemami wiążą się również prace [33] o wpływie punktów bifurkacyjnych wielomianu f na stabilność algebr wielomianów ograniczonych na zbiorach $f^{-1}((-\infty, a])$; efektywna wersja twierdzenia M. Putinara i F.-H. Vasilescu [PV$_2$] (praca [36]) oraz prace [31, 34] o rozszerzaniu odwzorowań regularnych do odwzorowań wielomianowych z zachowaniem wykładnika Łojasiewicza i rozszerzaniu do sum kwadratów wielomianów. Do uzyskania powyższych wyników zastosowano metody równań różniczkowych w zakresie potoków pól gradientowych [KMP] (w [35]), geometrii różniczkowej, geometrii algebraicznej i semialgebraicznej oraz analizy wypukłej.

Na koniec autoreferatu przedstawimy uniwersalny geometryczny model ciała rzeczywiście domkniętego, w szczególności podamy pewną charakteryzację ciał archimedesowych w terminach tego modelu [32]. Pozwala on na interpretację różniczkowań w ciałach rzeczywistych. W powyższej pracy użyto metody geometrii semialgebraicznej w zakresie ciał rzeczywistych, w tym wyniki A. Tarskiego [Ta1, Ta2].

1. Efektywne metody obliczania wykładnika Łojasiewicza. Ten nurt badań poświęcony jest poszukiwaniu efektywnych metod obliczania wykładnika Łojasiewicza odwzorowań holomorficznych w izolowanym zerze i odwzorowań wielomianowych w nieskończoności. Jest to kontynuacja badań zapoczątkowanych przez J. Chądzyńskiego i T. Krasińskiego $[\mathrm{CK}_1, \mathrm{CK}_2, \mathrm{CK}_3, \mathrm{CK}_4, \mathrm{CK}_5, \mathrm{CK}_6, \mathrm{CK}_7, \mathrm{CK}_8]$.

a) ***Wykładnik Łojasiewicza w punkcie.*** Temu tematowi poświęcone są prace [27], wspólna z T. Rodakiem i [39], wspólna z T. Rodakiem i A. Różyckim, oraz częściowo prace [30, 35], które omówimy dalej.

W pracy [27] podajemy efektywny wzór na wykładnik Łojasiewicza odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, $m \geqslant n$, o izolowanym zerze w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$. Weźmy odwzorowania

$$H_{L,M}(z) = L(F(z), M(z)) + (z_1^{d^n+1}, \dots, z_n^{d^n+1}),$$
$$\Phi_q(L, M, N, z) = \big(L, M, N, H_{L,M}(z), N(z)\big),$$

gdzie $d = \deg F$ oraz $M \in \mathbb{L}(n, q)$, $L \in \mathbb{L}(m + q, n)$, $N \in \mathbb{L}(n, 1)$, $q \in \{0, \dots, n\}$, a $\mathbb{L}(m, n)$ oznacza zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$. Wykorzystując metody algebry obliczeniowej i geometrii algebraiczne możemy efektywnie wyliczyć wielomian $P_q \in \mathbb{C}[L, M, N, y, t]$ postaci

$$P_q(L, M, N, y, t) = \sum_{j=0}^{p} P_{q,j}(L, M, N, y)t^j,$$

taki, że $P_{q,p} \neq 0$, opisujący zbiór wartości odwzorowania Φ_q, gdzie w powyższym wzorze L, M, N oznaczają odpowiednie macierze zmiennych. Głównym wynikiem pracy [27] jest

Twierdzenie 13 ([27], Theorem 7) *Niech $F(0) = 0$ i niech $V = F^{-1}(0)$. Wówczas istnieje r, $0 \leqslant r < p$ takie, że $\operatorname{ord}_y P_{q,j} > 0$ dla $j = 0, \dots, r$ oraz $\operatorname{ord}_y P_{q,r+1} = 0$. Połóżmy*

$$\Delta'(P_q) = \min_{j=0}^{r} \frac{\operatorname{ord}_y P_{q,j}}{r + 1 - j}.$$

1. *Jeśli* $\dim_0 V \geqslant q + 1$, *to* $1/\Delta'(P_q) \geqslant d^n + 1$.
2. *Jeśli* $\dim_0 V < q + 1$, *to* $\mathcal{L}_0(F, M) = 1/\Delta'(P_q) < d^n + 1$.

Jest to uogólnienie wyniku A. Płoskiego $[\mathrm{Pł}_4]$ dla odwzorowań o izolowanych zerach w zerze takich, że $m = n$ oraz J. Chądzyńskiego i T, Krasińskiego $[\mathrm{CK}_4]$ dla $n = m = 2$. Z powyższego twierdzenia wynika również (patrz [27, Corolary 8]), że

$$\dim_0 V = \min \left\{ q : 1/\Delta'(P_q) < d^n + 1 \right\},$$

tj. otrzymujemy efektywny wzór na wymiar kiełka zbioru algebraicznego w zerze.

Praca [39] poświęcona jest badaniu własności wykładnika Łojasiewicza deformacji danego odwzorowania holomorficznego. Pokazujemy w niej, że dla deformacji $(f_s)_{s\in S}$ funkcji f istnieje stratyfikacja zbioru parametrów S taka, że funkcja $s \mapsto \mathcal{L}_0(f_s)$ jest stała na płatach tej stratyfikacji. Przy oznaczeniach twierdzenia 13 otrzymujemy następujacy efektywny wzór na krotność $i_0(F)$ odwzorowania wielomianowego F w izolowanym zerze.

Twierdzenie 14 ([39], Theorem 4) *Jeśli odwzorowanie F ma izolowane zero w zerze, to*

$$i_0(F) = \min\{j \in \mathbb{Z} : \operatorname{ord}_y P_{0,j} = 0\}.$$

b) ***Wykładnik Łojasiewicza w nieskończoności.*** Wykładnikowi temu poświęcone są prace [26], wspólna z T. Rodakiem i [30], wspólna z A. Szlachcińską, oraz częściowo prace [28, 29, 35], które omówimy dalej.

W pracy [26] podajemy efektywną procedurę wyliczania wykładnika Łojasiewicza odwzorowania wielomianowego w nieskończoności. Podajemy najpierw wzór na ten wykładnik dla odwzorowań właściwych [26, Theorem 2] (w podobnych terminach jak w pracy [27]), a następnie stosując nierówność Chądzyńskiego-Kollára (1), sprowadzamy liczenie wykładnika dla dowolnych odwzorowań, do przypadku odwzorowań właściwych.

W dowodach twierdzeń 13 i [26, Theorem 2] użyto metody obliczania wykładnika Łojasiewicza w punkcie i w nieskończoności odwzorowania nadokreślonego, tj. $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, gdy $m > n$, przez sprowadzenie do przypadku, gdy $m = n$, w wyniku złożenia tego odwzorowania z generycznym odwzorowaniem liniowym $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ (na podstawie prac [12, 16] uzyskanych przed habilitacją). Metodę tę uogólniono na przypadek odwzorowań rzeczywistych w pracy [30].

2. Efektywne metody szacowania wykładnika Łojasiewicza. Poszukiwania oszacowań wykładników Łojasiewicza w punkcie i w nieskończoności łączą się z problemami klasyfikacji osobliwości lokalnych i globalnych oraz z problemami optymalizacyjnymi, które opisujemy dalej. W pracach [35], wspólnej z K. Kurdyką i [38], wspólnej z K. Kurdyką i A. Szlachcińską, uzyskujemy efektywne oszacowania tych wykładników dla odwzorowań wielomianowych, regularnych i semialgebraicznych. W szczególności podajemy uogólnienie nierówności Chądzyńskiego-Kollara (1). Podajemy też oszacowania wykładnika Łojasiewicza dla lokalnej i globalnej separacji regularnej zbiorów algebraicznych i semialgebraicznych. Punktem wyjścia jest efektywne oszacowanie D. D'Acunto i K. Kurdyki [AK_1, AK_2] i niezależnie A. Gabrielova [Ga_2], wykładnika Łojasiewicza w nierówności z gradientem dla wielomianów. W przypadku odwzorowań o izolowanym zerze efektywne oszacowanie w tym zakresie podał J. Gwoździewicz [Gw] oraz J. Kollár [Ko_2].

a) ***Nierówność Łojasiewicza z gradientem.*** W przypadku funkcji analitycznej $f : (\mathbb{R}^n, a) \to (\mathbb{R}, 0)$ o izolowanym zerze w punkcie a, J. Gwoździewicz [Gw] (por. [Te] dla funkcji zespolonych oraz [Ph_1] dla funkcji subanalitycznych) udowodnił, że zachodzą następujące związki wykładnika Łojasiewicza w nierówności z gradientem $\varrho_a(f)$ oraz wykładnikami Łojasiewicza $\mathcal{L}_a(f)$ funkcji f i jej gradientu ∇f:

$$\text{(G1)} \qquad \mathcal{L}_a(f) = \frac{1}{1 - \varrho_a(f)} = \mathcal{L}_a(\nabla f) + 1.$$

Ten wynik nie jest prawdziwy w ogólnym przypadku, nawet gdy założymy, że f ma izolowaną osobliwość w punkcie a.

W pracy [35] bez żadnych założeń o zbiorze zer funkcji f pokazujemy, że zachodzi nierówność (patrz [35, Corollary 1])

$$\text{(4)} \qquad \mathcal{L}_a(f) \leqslant \frac{1}{1 - \varrho_a(f)}.$$

Jeśli dodatkowo f ma izolowaną osobliwość w punkcie a, to (patrz [35, Corollary 3])

$$\frac{1}{1-\varrho_a(f)} \leqslant \mathcal{L}_a(\nabla f)+1. \tag{5}$$

Z (G1) widać, że oszacowań (4) oraz (5) nie można poprawić w terminach wykładnika $\varrho_a(f)$. Powyższe nierówności dowodzimy techniką równań różniczkowych, a dokładniej potoków pola gradientowego. Wynikają one z następującego twierdzenia [35, Theorem 1] (por. [KMP]):

Załóżmy, że funkcja f spełnia nierówność (Ł$_1$) w otoczeniu U punktu a i niech $\gamma : [0,s) \to U \setminus V$ będzie rozwiązaniem integralnym prawostronnym równania $x' = H(x)$, gdzie

$$H(x) = -\operatorname{sign} f(x) \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} \quad \text{dla } x \in U \setminus V$$

oraz $V = V(f)$. Jeśli punkt $\gamma(0)$ jest dostatecznie blisko punktu a, to

$$\operatorname{dist}(\gamma(0), V(f)) \leqslant \operatorname{length}\gamma \leqslant \frac{1}{(1-\varrho)C}|f(\gamma(0))|^{1-\varrho}.$$

Uwzględniając nierówność D. D'Acunto i K. Kurdyki [AK$_2$] (lub A. Gabrielova [Ga$_2$])

$$\varrho_a(f) \leqslant 1 - \frac{1}{d(3d-3)^{n-1}} \tag{D-K}$$

dla wielomianu $f \in \mathbb{R}[x]$ stopnia $d \geqslant 2$ takiego, że $f(a) = 0$, z powyższego twierdzenia dostajemy: $\mathcal{L}_a(f) \leqslant d(3d-3)^{n-1}$ (patrz [35, Corollary 5]) oraz $\mathcal{L}_a(\nabla f) \leqslant (d-1)(6d-9)^{n-1}$ (patrz [35, Remark 4]). Dla odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stopnia d, mamy

$$\mathcal{L}_a(F) \leqslant d(6d-3)^{n-1}$$

(patrz [35, Corollary 6]). W przypadku, gdy wielomian f ma izolowane zero w punkcie a, J. Gwoździewicz [Gw] udowodnił, że $\mathcal{L}_a(f) \leqslant (d-1)^n + 1$.

b) *Regularna separacja zbiorów algebraicznych i semialgebraicznych.* Dla zbiorów algebraicznych zespolonych $X, Y \subset \mathbb{C}^n$ (czystych wymiarów) oraz punktu $x_0 \in X \cap Y$, jako wykładnik ν w nierówności (S), można przyjąć $\deg_{x_0} X \cdot \deg_{x_0} Y$. Jest to, w szczególności, rezultat prac E. Cygan [Cy$_3$], E. Cygan, T. Krasińskiego i P. Tworzewskiego [CyKT] oraz S. Ji, J. Kollára i B. Shiffmana [JKS].

W pracy [35] przenosimy powyższe wyniki na przypadek rzeczywistych zbiorów algebraicznych i odwzorowań regularnych, a w pracy [38] – na przypadek zbiorów i odwzorowań semialgebraicznych. W przypadku rzeczywistych zbiorów algebraicznych $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ (odpowiednio odwzorowań regularnych $F|_X$), do tych oszacowań wystarczy uwzględnić stopnie wielomianów opisujących zbiory algebraiczne X i Y (odpowiednio stopnie wielomianów opisujących dziedzinę X odwzorowania i stopień $\deg F$). W przypadku zbiorów i funkcji semialgebraicznych, używamy do tego celu dwóch parametrów, opisanych niżej, charakteryzujących złożoność funkcji i zbiorów semialgebraicznych.

Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie domkniętym zbiorem semialgebraicznym. Wówczas istnieje rozkład

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_k \tag{6}$$

na sumę domkniętyh zbiorów semialgebraicznych bazowych $X_1, \ldots, X_k$, postaci

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : g_{i,1}(x) \geqslant 0, \ldots, g_{i,r_i}(x) \geqslant 0,\ h_{i,1}(x) = \cdots = h_{i,l_i}(x) = 0\}, \tag{7}$$

$i = 1, \dots k$ (patrz [BCRo]), gdzie $g_{i,1}, \dots, g_{i,r_i}, h_{i,1}, \dots, h_{i,l_i} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$. Załóżmy, że r_i jest najmniejszą możliwą liczbą nierówności $g_{i,j}(x) \geqslant 0$ w definicji zbioru X_i, dla $i = 1, \dots, k$ oraz niech $r(X)$ będzie najmniejszą z liczb $\max\{r_1, \dots, r_k\}$, po wszystkich możliwych rozkładach postaci (6) zbioru X na sumy zbiorów postaci (7). L. Bröcker [Bröc$_3$] (por. [Bröc$_2$, Sche$_1$]) udowodnił, że

$$r(X) \leqslant n(n+1)/2. \tag{8}$$

Oznaczmy przez $\kappa(X)$, najmniejszą z liczb $\max\{\deg g_{1,1}, \dots, \deg g_{k,r_k}, \deg h_{1,1}, \dots, \deg h_{k,l_k}\}$, po wszystkich rozkładach zbioru X na sumy (6), zbiorów postaci (7), przy założeniu, że $r_i \leqslant r(X)$ dla $i = 1, \dots, k$.

Liczby $r(X)$ i $\kappa(X)$ charakteryzują złożoność zbioru X (por. na przykład [BPR, BCRo, RV]). Oczywiście $r(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór X jest algebraiczny.

Dla lokalnego wykładnika Łojasiewicza, głównym wynikiem pracy [38] jest

Twierdzenie 15 ([38], Theorem 2.1) *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ będą domkniętymi zbiorami semialgebraicznymi. Załóżmy, że $0 \in X \cap Y$. Połóżmy $r = r(X) + r(Y)$ oraz $d = \max\{\kappa(X), \kappa(Y)\}$. Wówczas istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{R}^n$ punktu 0 oraz dodatnia stała C takie, że*

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geqslant C \operatorname{dist}(x, X \cap Y)^{d(6d-3)^{n+r-1}} \quad \textit{dla } x \in U. \tag{9}$$

Wykorzystując wyniki J. Gwoździewicza w [Gw], dostajemy również wersję twierdzenia 15 w przypadku, gdy punkt 0 jest punktem izolowanym zbioru $X \cap Y$ z wykładnikiem równym $[(2d-1)^{n+r} + 1]/2$.

W przypadku, gdy X i Y są zbiorami algebraicznymi, nierówność (9) zachodzi z wykładnikiem $d(6d-3)^{n-1}$ (patrz [35, Corollary 8]).

Z twierdzenia 15 dostajemy następujące oszacowanie lokalnego wykładnika Łojasiewicza.

Twierdzenie 16 ([38], Corollary 2.2) *Niech $F : X \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym i załóżmy, że $0 \in X$ oraz $F(0) = 0$. Połóżmy $r = r(X) + r(\operatorname{graph} F)$ oraz $d = \max\{\kappa(X), \kappa(\operatorname{graph} F)\}$. Wówczas*

$$\mathcal{L}_0(F|X) \leqslant d(6d-3)^{n+m+r-1}. \tag{10}$$

Nierówność (10) jest kluczowa w oszacowaniu “szybkości” zbieżności algorytmu (opartego na tzw. semi-definite programming) minimalizacji wielomianu na zbiorze semialgebraicznym bazowym. Umożliwiła ona w pracy [37] sprowadzenie problemu minimalizacji wielomianu na zwartym zbiorze semialgebraicznym do minimalizacji wielomianu na kuli, czyli do problemu o wiele prostszego (patrz [Schw$_2$]). Opisujemy to w punkcie 4.

Wiadomo, że dla ciągłych funkcji semialgebraicznych $f, g : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest domkniętym zbiorem semialgebraicznym i $0 \in X$, spełniających warunek $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0)$, istnieją stałe dodatnie C, η, ε takie, że zachodzi następująca *nierówność Łojasiewicza* (patrz na przykład [BCRo]):

$$|f(x)| \geqslant C|g(x)|^\eta \quad \text{dla } x \in X,\ |x| < \varepsilon. \tag{11}$$

Kres dolny wykładników η w (11) nazywany jest *wykładnikiem Łojasiewicza* pary funkcji (f, g) *na zbiorze X w punkcie* 0 i oznaczany $\mathcal{L}_0(f, g|X)$. Wiadomo (patrz [BR, 19]), że $\mathcal{L}_0(f, g|X)$

jest w ogólnym przypadku liczbą wymierną oraz nierówność (11) zachodzi dla $\eta = \mathcal{L}_0(f,g|X)$ i pewnych $\varepsilon, C > 0$. Asymptotyczne oszacowanie wykładnika $\mathcal{L}_0(f,g|X)$, bazujące na efektywnym twierdzeniu Tarskiego i Seidenberga [He], podał P. Solernó [So]:

$$(\mathrm{S}_a) \qquad \mathcal{L}_0(f,g|X) \leqslant D^{M^{ca}},$$

gdzie D jest ograniczeniem stopni wielomianów występujących w formułach opisujących f, g oraz X; M jest liczbą zmiennych w tych formułach (na ogół $M \geqslant n$); a jest "liczbą ciągów kwantyfikatorów ogólnych i szczegółowych" w tych formułach; a c jest stałą uniwersalną.

W twierdzeniu 16, funkcja $g(x) = \operatorname{dist}(x, X \cap F^{-1}(0))$ jest określona przy pomocy formuły z kwantyfikatorem ogólnym i szczegółowym, więc $a = 2$. Zatem oszacowanie Solernó przyjmuje postać $\mathcal{L}_0(f,g|X) \leqslant d^{(n+2)^{2c}}$, która jest asymptotycznie porównywalna z oszacowaniem (10), bo $r(X) \leqslant n(n+1)/2$, wobec (8). Oszacowanie (10) jest jednak jednoznaczne, niezależne od stałej c, która prawdopodobnie jest większa od 1.

c) *Globalna regularna separacja zbiorów algebraicznych i semialgebraicznych.* W przypadku zespolonych zbiorów algebraicznych $X, Y \subset \mathbb{C}^n$, E. Cygan w [$\mathrm{Cy}_3$] (por. [Brow], [JKS], [$\mathrm{Ko}_1$,$\mathrm{Ko}_2$,$\mathrm{Ko}_3$]) udowodniła następującą globalną nierówność typu Hörmandera-Łojasiewicza [Hö]:

$$(\mathrm{C}) \qquad \operatorname{dist}(z,X) + \operatorname{dist}(z,Y) \geqslant C\left(\frac{\operatorname{dist}(z, X\cap Y)}{1+|z|^2}\right)^{\deg X\cdot\deg Y} \quad \text{dla} \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

gdzie C jest pewną stałą dodatnią. Nierówność ta jest ściśle związana z efektywnym Nullstellensatz uzyskanym przez J. Kollára [Ko_1].

Dla rzeczywistych zbiorów algebraicznych mamy następującą wersję nierówności (C).

Twierdzenie 17 ([35], Theorem 2, Corollary 10) *Jeśli g, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ są odwzorowaniami wielomianowymi, $X = V(g)$, $Y = V(h)$ oraz $d = \max\{\deg g, \deg h\}$, to dla pewnej stałej $C > 0$,*

$$(12) \qquad \operatorname{dist}(x,X) + \operatorname{dist}(x,Y) \geqslant C\left(\frac{\operatorname{dist}(x, X\cap Y)}{1+|x|^2}\right)^{d(6d-3)^{n-1}} \quad \textit{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

W szczególności dla odwzorowania wielomianowego $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stopnia d, istnieje $C > 0$ takie, że

$$|F(x)| \geqslant C\left(\frac{\operatorname{dist}(x, V(F))}{1+|x|^2}\right)^{d(6d-3)^{n-1}} \quad \textit{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n$$

W przypadku, gdy zbiór zer odwzorowania F jest zwarty, twierdzenie 17 daje oszacowanie typu Chądzyńskiego-Kollára (1) w przypadku rzeczywistym (patrz [35, Corollary 11]):

$$\mathcal{L}_\infty(F) \geqslant -d(6d-3)^{n-1},$$

gdzie $d = \deg F$.

Używając metody E. Cygan [Cy_3] oraz nierówność (12), dostajemy następującą wersję nierówności (C) dla zbiorów semialgebraicznych.

Twierdzenie 18 ([38], Theorem 3.2) *Niech $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ będą domkniętymi zbiorami semialgebraicznymi. Połóżmy $r = r(X) + r(Y)$ oraz $d = \max\{\kappa(X), \kappa(Y)\}$. Wówczas istnieje stała dodatnia C taka, że*

$$\operatorname{dist}(x, X) + \operatorname{dist}(x, Y) \geqslant C\left(\frac{\operatorname{dist}(x, X \cap Y)}{1 + |x|^d}\right)^{d(6d-3)^{n+r-1}} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenie 18 implikuje następujące oszacowanie globalnego wykładnika Łojasiewicza w nierówności Ji, Kollára i Shiffmana [JKS] dla odwzorowań semialgebraicznych.

Twierdzenie 19 ([38], Corollary 3.3) *Niech $F : X \to \mathbb{R}^m$ będzie ciągłym odwzorowaniem semialgebraicznym, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem domkniętym. Jeśli $d = \max\{\kappa(X), \kappa(Y)\}$ oraz $r = r(X) + r(Y)$, gdzie $Y = \operatorname{graph} F$, to istnieje dodatnia stała C taka, że*

$$|F(x)| \geqslant C\left(\frac{\operatorname{dist}(x, F^{-1}(0) \cap X)}{1 + |x|^d}\right)^{d(6d-3)^{n+m+r-1}} \qquad \text{dla } x \in X.$$

W szczególności, jeśli zbiór X jest nieograniczony, a $F^{-1}(0) \cap X$ jest zwarty, to

$$\mathcal{L}_\infty^{\mathbb{R}}(F|X) \geqslant (1-d)d(6d-3)^{n+m+r-1}.$$

W pracy [35] użyto metod stosowanych przez K. Kurdykę, T. Mostowskiego i A. Parusińskiego przy rozwiązaniu hipotezy gradientowej R. Thoma w [KMP]. Wyniki pracy [38] są kontynuacją pracy [35], przy zastosowaniu metod geometrii semialgebraicznej.

3. Typy topologiczne odwzorowań. Z tym tematem związane są prace [29], wspólna z T. Rodakiem, [40], wspólna z P. Migusem i T. Rodakiem, artykuły przeglądowe [45] i [48], wspólny z B. Osińską-Ulrych i G. Skalskim, oraz częściowo praca [28], wspólna z T. Rodakiem, którą omówimy w punkcie poświęconym trywializacji wielomianów.

Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. René Thom w pracy [Th] postawiła hipotezę, że w zbiorze wielomianów $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ stopnia $\deg f \leqslant k$, istnieje skończona liczba typów topologicznych, tj., klas abstrakcji następującej relacji: $f \sim g$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ \varphi = \psi \circ g$ dla pewnych homeomorfizmów $\psi : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ oraz $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Hipotezę tę rozwiązał pozytywnie T. Fukuda w [Fuk]. W przypadku lokalnym nawiązuje ona do problemu C^0-determinowalności dżetów. Przez k-dżet w klasie C^l rozumiemy rodzinę wszystkich funkcji klasy C^l określonych w otoczeniach punktu $0 \in \mathbb{R}^n$, zwanych *C^l-realizacjami* tego dżetu, które mają ten sam wielomian Taylora stopnia k w 0. k-dżet nazywany jest C^r-determinowanym w klasie C^l, jeśli dla każdych dwóch C^l-realizacji f i g tego dżetu, istnieje C^r dyfeomorfizm φ otoczeń punktu 0, taki, że $f \circ \varphi = g$ w pewnym otoczeniu punktu 0 (R. Thom [Th]). N. H. Kuiper [Kui] oraz T. C. Kuo [Kuo_1, Kuo_2] udowodnili następujące kryterium:

Jeśli wykładnik Łojasiewicza w punkcie 0 gradientu ∇f funkcji f klasy C^k jest mniejszy lub równy $k-1$, to k-dżet wyznaczony przez f jest C^0-determinowalny w klasie C^k.

J. Bochnak i S. Łojasiewicz [BŁ] udowodnili, że przy założeniu $f(0) = 0$, prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne do powyższego. Szczegółowo opisujemy to w pracach przeglądowych [45, 48]. Analogiczny wynik do powyższego w przypadku zespolonym udowodnili S. H. Chang i Y. C. Lu [CL], B. Teissier [Te] oraz J. Bochnak i W. Kucharz [BK].

Powyższy wynik był inspiracją dla wielu autorów do zajmowania się wykładnikiem Łojasiewicza i klasyfikacją osobliwości funkcji, na przykład F. Acquistapace, F. Broglia, M. Shiota [ABS], J. Bochnak, J. J. Risler, [BR], J. Chądzyński, T. Krasiński [CK_4, CK_5], E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski, [CyKT], J. Gwoździewicz [Gw], J. Kollár [Ko_2,Ko_3], M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier [L-JT], B. Lichtin [Li], A. Melle-Hernndez [M-H], M. Merle [Mer], A. Płoski [$\mathrm{Pł}_1$, $\mathrm{Pł}_2$, $\mathrm{Pł}_4$, $\mathrm{Pł}_7$], B. Teissier [Te]).

a) ***Izotopijność odwzorowań w punkcie.*** Powyższe twierdzenie Kuipera, Kuo oraz Bochnaka i Łojasiewicza dotyczy izolowanej osobliwości funkcji f w 0, tj., gdy 0 jest izolowanym zerem gradientu ∇f. Przypadek nieizolowanej osobliwości również jest badany przez wielu autorów. Dla funkcji rzeczywistych rozważali go na przykład J. Damon i T. Gaffney [DG], T. Fukui i E. Yoshinaga [FY], V. Grandjean [Gr], L. Kushner [Kush], Xu Xu [Xu], a dla funkcji zespolonych – D. Siersma [Sie_1, Sie_2] i R. Pellikaan [Pe].

Celem pracy [40] jest uogólnienie powyższych wyników na przypadek odwzorowań klasy C^k o nieizolowanej osobliwości w otoczeniu zera.

Zbiór odwzorowań $(\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^m$ klasy C^k oznaczamy przez $\mathcal{C}^k_a(n,m)$. Przez $j^k f(a)$ oznaczamy k-dżet w punkcie a (w klasie C^k) wyznaczony przez funkcję $f \in \mathcal{C}^k_a(n,1)$. Dla odwzorowania $F = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{C}^k_a(n,m)$, kładziemy

$$j^k F(a) = (j^k f_1(a), \ldots, j^k f_m(a)).$$

Weźmy zbiór $Z \subset \mathbb{R}^n$ taki, że $0 \in Z$ i niech $k \in \mathbb{Z}$, $k > 0$. Przez *k-Z-dżet w klasie* $\mathcal{C}^k_0(n,m)$ lub krótko *k-Z-dżet*, rozumiemy klasę równoważności $w \subset \mathcal{C}^k_0(n,m)$ następującej relacji równoważności $\sim$: $F \sim G$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego otoczenia zera $U \subset \mathbb{R}^n$, zachodzi $j^k F(a) = j^k G(a)$ dla $a \in Z \cap U$ (por. [Xu]). Odwzorowanie $F \in w$ nazywamy *C^k-Z-realizacją dżetu* w i piszemy $w = j^k_Z F$. Zbiór wszystkich dżetów $j^k_Z F$ oznaczamy przez $J^k_Z(n,m)$.

k-Z-dżet $w \in J^k_Z(n,m)$ nazywamy *C^r-Z-determinowalnym* (odpowiednio *Z-v-determinowalnym*) w klasie C^k, jeśli dla dowolnych jego C^k-Z-realizacji f i g, istnieją dostatecznie małe otoczenia $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ punktu 0 oraz dyfeomorfizm $\varphi : U_1 \to U_2$ klasy C^r, takie, że $f \circ \varphi = g$ w U_1 (odpowiednio istnieje homeomorfizm $\varphi : [f^{-1}(0) \cup Z] \cap U_1 \to [g^{-1}(0) \cup Z] \cap U_2$), przy czym $\varphi(0) = 0$ oraz $\varphi(Z \cap U_1) = Z \cap U_2$.

Xu Xu [Xu] udowodnił następujący odpowiednik kryterium Kuipera i Kuo:

Niech $Z \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem domkniętym takim, że $0 \in Z$. Jeśli $f \in \mathcal{C}^k(n,1)$ spełnia warunki $V(\nabla f) \subset Z$ oraz

$$|\nabla f(x)| \geqslant C \operatorname{dist}(x,Z)^{k-1}, \text{ gdy } x \to 0 \text{ dla pewnej stałej } C > 0, \tag{13}$$

to k-Z-dżet funkcji f jest C^0-Z-determinowalny.

W pracy [40] pokazujemy, że powyższe twierdzenie zachodzi również dla odwzorowań. Zacznijmy od oznaczeń i definicji. Jeśli X, Y są przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{K}$, to przez $L(X,Y)$ oznaczamy przestrzeń Banacha ciągłych odwzorowań liniowych z przestrzeni X do Y. Jeśli $A \in L(X,Y)$, to przez $A^* \in L(Y', X')$ oznaczamy operator sprzężony do A, gdzie X', Y' są przestrzeniami dualnymi do X, Y odpowiednio. Zamiast normy różniczki odwzorowania f, rozważamy funkcję Rabiera [Ra], mianowicie dla $A \in L(X,Y)$, kładziemy

$$\nu(A) = \inf\{\|A^*\varphi\| : \varphi \in Y', \|\varphi\| = 1\}, \tag{14}$$

gdzie $\|A\|$ oznacza normę odwzorowania liniowego A. W przypadku, gdy $f \in \mathcal{C}_0^k(n,1)$, mamy $\nu(df) = |\nabla f|$, gdzie df oznacza różniczkę odwzorowania f.

Twierdzenie 20 ([40], Theorem 3) *Niech $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$, gdzie $m \leqslant n$, będzie C^k-Z-realizacją k-Z-dżetu $w \in J_Z^k(n,m)$, gdzie $k > 1$, i niech $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : \nu(df(x)) = 0\}$, $0 \in Z$. Załóżmy, że*

$$\nu(df(x)) \geqslant C \operatorname{dist}(x, Z)^{k-1}, \quad \textit{gdy } x \to 0, \textit{ dla pewnej stałej } C > 0.$$

Wówczas dżet w jest C^0-Z-determinowalny w klasie C^k.

W twierdzeniu [40, Theorem 3] pokazujemy więcej, że dla dowolnych C^k-Z-realizacji f_1, f_2 dżetu w, deformacja $f_1 + t(f_2 - f_1)$, $t \in \mathbb{R}$ jest topologicznie trywialna wzdłuż $[0,1]$ (por. [DG]). W szczególności odwzorowania f_1 i f_2 są izotopijne w zerze. Pokazujemy również, że twierdzenie 20 zachodzi dla odwzorowań holomorficznych.

Nie jest jasne, czy zachodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia 20. Uzyskaliśmy natomiast twierdzenie typu Bochnaka-Łojasiewicza dla funkcji, które w pewnym sensie jest twierdzeniem odwrotnym do twierdzenia Xu Xu.

Twierdzenie 21 ([40], Theorem 4) *Niech $Z \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, będzie zbiorem takim, że $0 \in Z$, niech w będzie k-Z-dżetem, $k > 1$, i niech f będzie jego C^k-Z-realizacją. Jeśli w jest Z-v-determinowalny w klasie C^k oraz $f(0) = 0$ i $V(\nabla f) \subset Z$, to zachodzi nierówność* (13).

W przypadku, gdy Z jest zbiorem analitycznym, pewne algebraiczne warunki na skończoną determinowalności k-Z-dżetu podali L. Kushner [Kush] oraz L. Kushner i B. Terra Leme [KLe], gdzie Autorzy stosują idee J. Mathera [Mat] oraz J. C. Tougerona [To].

b) ***Izotopijność odwzorowań w nieskończoności.*** Badania równoważności wielomianów zespolonych w otoczeniu nieskończoności w przypadku 2-wymiarowym prowadzili P. Cassou-Noguès and H.V. Ha [CH] a w przypadku wielowymiarowym – L. Fourrier [Fo] oraz G, Skalski [Sk]. W pracy [29] przenosimy te wyniki na przypadek odwzorowań klasy C^2 określonych w otoczeniu nieskończoności, a analityczną równoważność rozważaną przez autorów zastępujemy izotopijnością. Zacznijmy od oznaczeń i definicji.

Niech $f\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}^m$, $g\colon \Omega_2 \to \mathbb{R}^m$, gdzie $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ są otoczeniami nieskończoności, tj., dopełnienia tych zbiorów są zbiorami zwartymi w $\mathbb{R}^n$. Odwzorowania f, g nazywamy *izotopijnymi w nieskończoności*, gdy istnieje otoczenie nieskończoności $\Omega \subset \Omega_2$ oraz odwzorowanie ciągłe $H\colon \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ takie, że

(a) $H_0(x) = x$, $x \in \Omega$,

(b) dla każdego $t \in [0,1]$ odwzorowanie H_t jest dyfeomorfizmem klasy C^1 oraz $\lim_{x\to\infty} |H_t(x)| = \infty$,

(c) $f(H_1(x)) = g(x)$, $x \in \Omega$

gdzie $H_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ jest określone wzorem $H_t(x) = H(x,t)$ dla $x \in \Omega$, $t \in [0,1]$. Odwzorowanie H nazywamy również *izotopią*.

Przez $\mathcal{P}_{k,\varepsilon}$, gdzie $k \in \mathbb{R}$ oraz $\varepsilon > 0$, oznaczamy zbiór odwzorowań $P\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ klasy C^2 dla których istnieje $R > 0$ takie, że

$$|P(x)| \leqslant \varepsilon |x|^k \text{ oraz } \|dP(x)\| \leqslant \varepsilon |x|^{k-1} \text{ dla każdego } |x| \geqslant R,$$

gdzie dP oznacza różniczkę odwzorowania P, a $dP(x)$ – różniczkę P w punkcie $x \in \mathbb{K}^n$.

Głównym wynikiem pracy [29] jest następujące

Twierdzenie 22 ([29], Theorem 1) *Niech $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, gdzie $m \leqslant n$, będzie odwzorowaniem klasy C^2 (holomorficznym, gdy $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Jeśli istnieją $k \in \mathbb{R}$ oraz dodatnie stałe C, R takie, że*

$$\nu(df(x)) \geqslant C|x|^{k-1}, \quad |x| \geqslant R,$$

gdzie ν jest funkcją Rabiera, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdego odwzorowania $P \in \mathcal{P}_{k,\varepsilon}$, odwzorowania f i $f + P$ są izotopijne w nieskończoności.

G. Skalski [Sk] pokazał, że, twierdzenie odwrotne do powyższego nie zachodzi nawet dla funkcji. Wobec tego sytuacja w nieskończoności jest inna niż dla dżetów.

Warto zauważyć, że w przypadku zespolonych odwzorowań wielomianowych $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, wykładnik $\mathcal{L}_\infty(\nu(df))$ jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy jakobian odwzorowania f jest niezerową stałą.

c) *Trywializacja wielomianu w otoczeniu poziomicy.* Prace [28] oraz przeglądowa [47] poświęcone są warunkom na trywializację wielomianu w otoczeniu poziomicy wielomianu.

Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością typową wielomianu $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, gdy istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ takie, że funkcja $f : f^{-1}(U) \to U$ jest trywialną wiązką klasy C^∞. W przeciwnym razie punkt λ nazywany jest punktem bifurkacyjnym funkcji f. Zbiór punktów bifurkacyjnych wielomianu f oznaczamy $B(f)$. J. L. Verdier [Ve] udowodnił, że zbiór punktów bifurkacyjnych odwzorowań regularnych zawiera się we właściwym podzbiorze algebraicznym przeciwdziedziny. W przypadku wielomianu, oznacza to, że zbiór $B(f)$ jest skończony. Oczywiście $B_\infty(f) \subset B(f)$, gdzie $B_\infty(f)$ jest zbiorem punktów bifurkacyjnych funkcji f w nieskończoności określonym wcześniej. Wiadomo, że $B(f) = B_\infty(f) \cup C(f)$, gdzie $C(f)$ oznacza zbiór wartości krytycznych funkcji f. Dla funkcji rzeczywistych $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pojęcie zbioru punktów bifurkacyjnych wprowadza się w analogiczny sposób.

Problem trywializacji wielomianu leży w kręgu zainteresowań wielu matematyków, między innymi J. Chądzyńskiego [Ch], J. Chądzyńskiego i T. Krasińskiego [CK$_4$], T. Krasińskiego [Kra$_1$], J. Gwoździewicza i A. Płoskiego [GwP], H. V. Ha [Ha], Z. Jelonka [J$_3$], Z. Jelonka i K. Kurdyki [JK2], Z. Jelonka i M. Tibăra [JT], K. Kurdyki, P. Orro i S. Simona [KOS], A. Némethiego i A. Zaharii [NZ], A. Parusińskiego [Pa$_2$], A. N. Varchenki [Va].

Jednym z warunków metrycznych prowadzących do trywializacji wielomianu w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(\lambda)$ w nieskończoności jest *warunek Malgrange'a*:

$$\text{(M)} \qquad |\nabla f(z)| \geqslant \delta |z|^{-1} \qquad \text{dla} \qquad |z| \geqslant R, \quad |f(z) - \lambda| \leqslant \varepsilon,$$

gdzie R, ε, $\delta > 0$. Warunek ten implikuje trywializację wielomianu (por. [Pa$_2$]), mianowicie:

Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Jeśli zachodzi warunek (M)*, to istnieje trywializacja w nieskończoności wielomianu f nad $U = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| < \varepsilon\}$.*

Păunescu i Zaharia [PZ] pokazali, że powyższego twierdzenia nie można odwrócić. W pracy przeglądowej [47] omawiamy szczegółowo związek warunku Malgrange'a w otoczeniu poziomicy i trywializacją wielomianu nad otoczeniem punktu.

Powyższe twierdzenie i warunek (M) prowadzą do pojęcia uogólnionych wartości krytycznych wielomianu oraz kolejnej definicji wykładnika Łojasiewicza badanych w pracy [28].

Niech M, N, L będą skończenie wymiarowymi rzeczywistymi przestrzeniami wektorowymi, niech $X \subset M$ będzie domkniętym zbiorem semialgebraicznym, $g : X \to N$ oraz $f : X \to L$ – ciągłymi odwzorowaniami semialgebraicznymi (patrz [BR,BCRo]) i niech $\lambda \in L$. *Wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności funkcji g w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(\lambda)$*, nazywany jest kres górny zbioru wykładników θ dla których zachodzi następująca *nierówność Łojasiewicza*

$$|g(x)| \geqslant C|x|^{\theta}, \quad \text{gdy} \quad x \in X, \quad |x| \to \infty \quad \text{oraz} \quad f(x) \to \lambda$$

dla pewnej stałej $C > 0$ (por. [Ł$_3$,Ł$_4$], [Ro$_2$]) i oznaczany symbolem $\mathcal{L}_{\infty,f\to\lambda}(g)$.

Głównym wynikiem pracy [28] jest następujące

Twierdzenie 23 ([28], Theorem 1.2) *Niech $g : X \to N$ oraz $f : X \to L$ będą ciągłymi odwzorowaniami semialgebraicznymi.*

(i) *Dla każdego $\lambda \in L$, zachodzi $\mathcal{L}_{\infty,f\to\lambda}(g) \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

(ii) *Funkcja*

$$\vartheta_{g/f} : L \ni \lambda \mapsto \mathcal{L}_{\infty,f\to\lambda}(g)$$

jest półciągła z góry. Ponadto istnieje semialgebraiczna stratyfikacja $L = S_1 \cup \cdots \cup S_j$ taka, że funkcja $\vartheta_{g/f}$ jest stała na każdym płacie S_i, $i = 1, \ldots, j$.

Kluczowymi narzędziami w dowodzie powyższego twierdzenia były stratyfikacje lipschoitzowskie wprowadzone przez T. Mostowskiego [Mos] (patrz też [Pa$_1$]) oraz zbiory punktów niewłaściwości odwzorowań rozważane przez Z. Jelonka [J$_1$].

Dla odwzorowania $f : M \to L$ semialgebraicznego klasy C^1, definiujemy *wykładnik Łojasiewicza różniczki df przy poziomicy $f^{-1}(\lambda)$* następującym wzorem

$$\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) = \mathcal{L}_{\infty,f\to\lambda}(\nu(df)),$$

gdzie ν jest funkcją Rabiera (14). Pojęcie to wprowadził H. V. Ha [Ha] dla wielomianów zespolonych dwóch zmiennych. Dla wielomianów funkcja Rabiera $\nu(df)$ pokrywa się z normą gradientu $|\nabla f|$ funkcji f. W tym przypadku pojęcie to zostało dokładnie zbadane przez J. Chądzyńskiego i T. Krasińskiego (patrz na przykład [CK$_8$]) oraz J. Gwoździewicza i A. Płoskiego (patrz na przykład [GwP]).

Wykładnik $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f)$ jest silnie związany ze zbiorem punktów bifurkacyjnych odwzorowania f. Przy jego pomocy można określić *zbiór uogólnionych wartości krytycznych* odwzorowania f, wzorem

$$K_\infty(f) = \{\lambda \in L : \mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) < -1\}.$$

Jest to zbiór domknięty i semialgebraiczny. Z twierdzenia 23 wynika, że odwzorowanie $L \ni \lambda \mapsto \mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f)$ ma skończoną liczbę wartości, więc istnieje $\alpha > 0$ taka, że

$$K_\infty(f) = \{\lambda \in L : \mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) < -1 - \alpha\}.$$

Wiadomo, że jeśli $f : M \to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy C^2, to $B_\infty(f) \subset K_\infty(f)$, gdzie $B_\infty(f)$ jest zbiorem punktów bifurkacyjnych w nieskończoności funkcji f (definiujemy go analogicznie jak dla wielomianu zespolonego). W przypadku wielomianów, $K_\infty(f)$ jest zawsze zbiorem skończonym (patrz na przykład [Ph$_2$, Ra, KOS, Wa, Va, Ve, Ha, Pa$_2$]). Oszacowanie liczby punktów tego zbioru w terminach stopnia wielomianu podali Z. Jelonek, K. Kurdyka [JK1, JK2]. Dla wielomianów zespolonych o skończonej liczbie punktów osobliwych w nieskończoności zachodzi $B_\infty(f) = K_\infty(f)$ (patrz [Ha] w przypadku dwuwymiarowym oraz [Pa$_2$] w przypadku ogólnym).

Chądzyński i Krasiński w pracy [CK$_8$] udowodnili, że dla wielomianu zespolonego f dwóch zmiennych, dodatniego stopnia, istnieje $c_f \in \mathbb{Q}$, $c_f \geqslant 0$ takie, że

$$\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) = c_f \text{ dla } \lambda \notin K_\infty(f) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) < -1 \text{ dla } \lambda \in K_\infty(f).$$

Zadali Oni również pytanie, czy funkcja $\lambda \mapsto \mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f)$ zachowuje się podobnie w ogólnym przypadku. Oczywiście w przypadku wielowymiarowym nie możemy żądać aby $c_f \geqslant 0$. Na przykład dla wielomianu $f(z_1, z_2, z_3) = (z_1z_2 - 1)z_2z_3$ ([Ra]) mamy $c_f = -1$ (patrz [CK$_8$]).

Jako wniosek z twierdzenia 23, uzyskujemy częściową odpowiedź na powyższe pytanie. Mianowicie dla każdego wielomianu dodatniego stopnia $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ istnieje zbiór skończony $S \subset \mathbb{C}$ zawierający zbiór $K_\infty(f)$ oraz liczba $c_f \geqslant -1$ takie, że $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) = c_f$ dla $\lambda \in \mathbb{C} \setminus S$ oraz $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) < -1$ dla $\lambda \in S$ ([28, Corollary 1.7]).

4. Sumy kwadratów i optymalizacja. W pracy [37], wspólnej z K. Kurdyką, studiujemy dwa typy problemów związanych z wielomianami dodatnimi (lub nieujemnymi) na podzbiorach przestrzeni $\mathbb{R}^n$. W pierwszej części dowodzimy pewnej efektywnej wersji znanego faktu o aproksymacji i przedstawieniu wielomianu przy pomocy sum kwadratów wielomianów. Podajemy również ilościową wersję tych wyników i ich zastosowania do tzw. półokreślonej optymalizacji (semidefinite optimization). W drugiej części dowodzimy twierdzenia o uwypuklaniu wielomianów, tj., uzyskiwaniu wielomianu wypukłego z danego wielomianu f ściśle dodatniego na zbiorze domkniętym i wypukłym X, w wyniku pomnożenia go przez $(1+|x|^2)^N$ dla dostatecznie dużego $N \in \mathbb{N}$ (wymagane są dodatkowe założenia, jeśli X nie jest zbiorem zwartym). Podajemy dokładne oszacowanie wykładnika N w terminach stopnia wielomianu f, modułów współczynników wielomianu f oraz ograniczenia dolnego wielomianu f na X. Jako zastosowanie tej metody, w przypadku, gdy X jest zbiorem zwartym, wypukłym i semialgebraicznym, podajemy algorytm wyznaczania ciągu punktów o dowolnym pierwszym wyrazie, który jest zbieżny do pewnego punktu krytycznego dolnego wielomianu f na X.

a) *Sumy kwadratów i aproksymacja.* Pierścień wielomianów rzeczywistych n-zmiennych $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ oznaczamy przez $\mathbb{R}[x]$. Istotnymi problemami w rzeczywistej geometrii algebraicznej są przedstawienia wielomianów nieujemnych na domkniętych zbiorach semialgebraicznych w terminach sum kwadratów. Przypomnijmy siedemnasty problem Hilberta (rozwiązany przez E. Artina [Ar]): *jeśli $f \in \mathbb{R}[x]$ jest wielomianem nieujemnym w $\mathbb{R}^n$, to*

$$\text{(AH)} \qquad fh^2 = h_1^2 + \cdots + h_m^2 \quad \text{dla pewnych } h, h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{R}[x],\ h \neq 0,$$

tj., f jest sumą kwadratów funkcji wymiernych. D. Hilbert [Hil] udowodnił, że dla $n \geqslant 2$ istnieją wielomiany nieujemne na $\mathbb{R}^n$, które nie są sumami kwadratów wielomianów. Dopiero w 1967 roku T. S. Motzkin podał przykład takiego wielomianu. Był to wielomian $\mathfrak{m}(x, y) =$

$1 + x^2y^2(y^2 + x^2 - 3)$. W pewnych przypadkach wiadomo jakiej postaci są funkcje h oraz h_j w (AH). Na przykład B. Reznick [Re$_1$, Theorem 3.12] udowodnił następujące twierdzenie:

Jeśli f jest wielomianem jednorodnym i $f(x) > 0$ dla $x \neq 0$, to istnieje liczba całkowita nieujemna r_0 taka, że dla każdej liczby całkowitej $N \geqslant r_0$, wielomian $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^N f(x)$ jest sumą parzystych potęg funkcji liniowych. Reznick podał efektywne oszacowanie liczby r_0.

Niech $X \subset \mathbb{R}^n$ będzie *domkniętym bazowym zbiorem semialgebraicznym* określonym przez $g_1, \ldots, g_r \in \mathbb{R}[x]$, tj.,

$$X := \{x \in \mathbb{R}^n : g_1(x) \geqslant 0, \ldots, g_r(x) \geqslant 0\}. \tag{15}$$

Praporządkiem wyznaczonym przez wielomiany $g_1, \ldots, g_r$ nazywany jest zbiór

$$T(g_1, \ldots, g_r) := \Big\{ \sum_{e=(e_1,\ldots,e_r)\in\{0,1\}^r} \sigma_e g_1^{e_1} \cdots g_r^{e_r} : \sigma_e \in \sum \mathbb{R}[x]^2 \text{ for } e \in \{0,1\}^r \Big\},$$

gdzie $\sum \mathbb{R}[x]^2$ oznacza zbiór sum kwadratów wielomianów z $\mathbb{R}[x]$. Naturalnymi uogólnieniami powyższego twierdzenia Artina są Stellensätze: J.-L. Krivine [Kri], D. W. Dubois [Du$_2$], and J.-J. Rislera [Ri] (patrz też [BCRo, Sche$_5$, Mar$_2$, PD]). W przypadku, gdy zbiór X jest zwarty, bardzo ważny wynik w tym zakresie uzyskał K. Schmüdgen (patrz [Schm$_1$, CMN]):

Każdy wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ ściśle dodatni na zbiorze X należy do praporządku $T(g_1, \ldots, g_r)$.

Przy założeniu, że praporządek $T(g_1, \ldots, g_r)$ jest archimedesowy, M. Putinar [Pu] udowodnił, że:

Każdy wielomian f ściśle dodatni na zbiorze X należy do tzw. modułu kwadratowego

$$P(g_1, \ldots, g_r) := \Big\{ \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \cdots + \sigma_r g_r : \sigma_i \in \sum \mathbb{R}[x]^2,\ i = 0, \ldots, r \Big\}.$$

Od kilkunastu lat prowadzone są intensywne badania nad wykorzystaniem tych faktów do minimalizacji wielomianów na zbiorach semialgebraicznych. Jedną z barier w tym zakresie jest trudność w efektywnym oszacowaniu stopni wielomianów w przedstawieniu Schmüdgena

$$f = \sum_{e\in\{0,1\}^r} \sigma_e g_1^{e_1} \cdots g_r^{e_r} \in T(g_1, \ldots, g_r). \tag{16}$$

M. Schweighofer [Schw$_2$] uzyskał oszacowanie (z góry) stopni $\deg \sigma_e g_1^{e_1} \cdots g_r^{e_r}$ w terminach $\deg f$, $f^* := \min\{f(x) : x \in X\}$ oraz współczynników wielomianu f, przy założeniu, że $f^* > 0$. Oszacowanie tych stopni, z pominięciem f^*, pozwoliłoby sprowadzić problem minimalizacji wielomianu do skończenie wymiarowej przestrzeni wielomianów. Jest to zagadnienie dotychczas nierozwiązane, a w niektórych przypadkach wiadomo, że nie istnieje. Jak pokazał C. Scheiderer [Sche$_4$], *oszacowanie takie nie istnieje w terminach* $\deg f$, *jeśli* $\dim(X) > 1$.

Powyższe wyniki Schmüdgena i Putinara dotyczyły wielomianów ściśle dodatnich (na X). W przypadku wielomianów nieujemnych C. Berg, J. P. R. Christensen i P. Ressel [BCRo] oraz J. B. Lasserre and T. Netzer [LN] udowodnili, że:

Dowolny wielomian f nieujemny na kostce $[-1, 1]^n$ może być aproksymowany w normie l_1 przez sumy kwadratów wielomianów.

l_1-normą wielomianu nazywana jest suma modułów jego współczynników. W tym przypadku, J. B. Lasserre [La$_4$] (patrz też [La$_3$, La$_2$]) udowodnił, że:

Jeśli $g_1, \dots, g_r$ są wielomianami wklęsłymi i $\operatorname{Int} X \neq \emptyset$, to każdy wielomian nieujemny na X oraz wypukły w $\mathbb{R}^n$ może być aproksymowany w normie l_1 przez wielomiany należące do stożka

$$L_c(g_1, \dots, g_r) := \Big\{\sigma_0 + \lambda_1^2 g_1 + \cdots + \lambda_r^2 g_r : \sigma_0 \in \sum \mathbb{R}[x]^2 \text{ jest wypukły, } \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}\Big\}.$$

W pracy [37] dowodzimy twierdzenia podobnego do powyższych wyników Schmüdgena i Putinara dla następującego stożka:

$$\mathcal{S}(g_1, \dots, g_r) = \{\sigma_0 + \varphi(g_1)g_1 + \cdots + \varphi(g_r)g_r : \sigma_0 \in \sum \mathbb{R}[x]^2,\ \varphi \in \sum \mathbb{R}[t]^2\},$$

gdzie t jest pojedynczą zmienną. Oczywiście $\mathcal{S}(g_1, \dots, g_r) \subset P(g_1, \dots, g_r)$. Mianowicie, mamy

Twierdzenie 24 ([37], Theorem 2.1) *Niech wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie nieujemny na zbiorze X. Wówczas istnieje ciąg $f_\nu \in P(g_1, \dots, g_r)$, $\nu \in \mathbb{N}$, który jest zbieżny jednostajnie na zbiorach zwartych do f. Ponadto f_ν można wybrać ze zbioru $\mathcal{S}(g_1, \dots, g_r)$. W szczególności ciąg f_ν jest zbieżny do f w normie l_1.*

Pokazujemy też, że przy aproksymacji funkcji f wielomianami ze stożka $\mathcal{S}(g_1, \dots, g_r)$, wystarczy brać funkcje φ postaci $\varphi(t) = (at + b)^{2N}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Rozważmy kolejny stożek dodatni:

$$\mathcal{K}(g, g_1, \dots, g_r) := \Big\{\sigma_0 + \sigma_1 g + \varphi(g_1)g_1 + \cdots + \varphi(g_r)g_r : \sigma_0, \sigma_1 \in \sum \mathbb{R}[x]^2,\ \varphi \in \sum \mathbb{R}[t]^2\Big\},$$

gdzie $g \in \mathbb{R}[x]$. Kładąc

$$\Phi(g_1, \dots, g_r) := \Big\{\varphi(g_1)g_1 + \cdots + \varphi(g_r)g_r : \varphi \in \sum \mathbb{R}[t]^2\Big\},$$

mamy $\mathcal{K}(g, g_1, \dots, g_r) = T(g) + \Phi(g_1, \dots, g_r)$.

Z twierdzenia 24 oraz twierdzenia Schmüdgena dostajemy następującą wersję wyników Schmüdgena i Putinara.

Twierdzenie 25 ([37], Corollary 3.1) *Załóżmy, że X jest zbiorem zwartym. Niech $R > 0$ będzie taką liczbą, że wielomian $g_0(x) = R^2 - |x|^2$ jest nieujemny na X. Jeśli wielomian $f \in \mathbb{R}[x]$ jest ściśle dodatni na zbiorze X, to $f \in \mathcal{K}(g_0, \dots, g_r)$.*

Podobnie jak w twierdzeniu 24, do przedstawiania funkcji f jako elementu $\mathcal{K}(g_0, \dots, g_r)$ wystarczy brać pod uwagę wielomiany φ, postaci $\varphi(t) = (at + b)^{2N}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. W świetle tego, twierdzenie 25 pokazuje, jaką postać mają sumy kwadratów występujących w przedstawieniu Schmüdgena (16) i upraszcza procedurę wyznaczania tego przedstawienia.

Badania nad Positivstellensatz dla stożka dodatniego zbioru algebraicznego nieograniczonego, zapoczątkowaliśmy w pracy [34] wspólnej z K. Kurdyką, B. Osińska-Ulrych i G. Skalskim. W tej pracy podaliśmy konstruktywny dowód twierdzenia C. Scheiderera [Sche$_2$] o rozszerzaniu wielomianu dodatniego na nieograniczonym zbiorze algebraicznym $V \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, do wielomianu dodatniego na całej przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Dokładniej:

Jeśli zbiór $V \subset \mathbb{R}^n$ określony jest przez układ równań wielomianowych $h_1(x) = \cdots = h_r(x) = 0$ oraz wielomian $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest dodatni na zbiorze V, to istnieje wielomian postaci $h(x) = \sum_{i=1}^r h_i^2(x)\sigma_i(x)$, gdzie $\sigma_i \in \sum \mathbb{R}[x]^2$, że $f(x) + h(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n$.

Podajemy też postać wielomianów σ_i oraz efektywne oszacowanie ich stopni w terminach stopni f, h_i oraz wykładnika Łojasiewicza $\mathcal{L}_\infty(f|V)$ ([34, Theorem 4.1]).

b) *Półokreślona optymalizacja.* Niech X będzie zbiorem zwartym postaci (15). W [La$_1$] Lasserre podaje metodę minimalizacji wielomianu f na zbiorze X w terminach stożka $P(g_1,\dots,g_r)$. Niech

$$f^* := \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

Wówczas $f^* = \sup\{a \in \mathbb{R} : f(x) - a > 0 \text{ dla } x \in X\}$, więc z wyniku Putinara [Pu], mamy

$$f^* = \sup\{a \in \mathbb{R} : f - a \in P(g_1,\dots,g_r)\},$$

oraz $f^* = \inf\{L(f) : L : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R} \text{ jest liniowe}, L(1) = 1, L(P(g_1,\dots,g_r)) \subset [0,\infty)\}$. Ponieważ stożek $P(g_1,\dots,g_r)$ jest zawarty w nieskończenie wymiarowej przestrzeni liniowej $\mathbb{R}[x]$ nad $\mathbb{R}$, więc trudno tak postawione zadania rozwiązać. Lasserre zaproponował metodę redukcji tego wymiaru (Lasserre relaxation) przez zastosowanie następujących stożków

$$P_k(g_1,\dots,g_r) := \Big\{\sigma_0 g_0 + \dots + \sigma_r g_r \in P(g_1,\dots,g_r) : \deg \sigma_i g_i \leqslant k,\ i = 0,\dots,r\Big\},$$

gdzie przyjmujemy $g_0 = 1$, i sprowadzenie zadań do obliczania ciągów

$$\begin{aligned} a_k^* &:= \sup\{a \in \mathbb{R} : f - a \in P_k(g_1,\dots,g_r)\},\\ l_k^* &:= \inf\{L(f) : L : \mathbb{R}[x]_k \to \mathbb{R} \text{ liniowe},\ L(1) = 1,\ L(P_k(g_1,\dots,g_r)) \subset [0,\infty)\}, \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$, gdzie $\mathbb{R}[x]_k$ jest przestrzenią liniową wielomianów $h \in \mathbb{R}[x]$ takich, że $\deg h \leqslant k$. Lasserre udowodnił, że

(a_k^*), (l_k^*) są ciągam rosnącymi i zbieżnymi do f^*, ponadto $a_k^* \leqslant l_k^* \leqslant f^*$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 25 pozwala na zastosowanie algorytmu Lasserre przy użyciu stożków

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_k(g,g_1,\dots,g_r) := \{\sigma_0 + \sigma_1 g + \varphi(g_1)g_1 + \dots + \varphi(g_r)g_r \in \mathcal{K}(g,g_1,\dots,g_r) :\\ \deg \sigma_0,\ \deg \sigma_1 g,\ \deg g_i\varphi(g_i) \leqslant k\}, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

zamiast $P_k(g,g_1,\dots,g_r)$. Mianowicie mamy

Twierdzenie 26 ([37], Remark 3.2) *Niech*

$$\begin{aligned} u_k^* &:= \sup\{a \in \mathbb{R} : f - a \in \mathcal{K}_k(g,g_1,\dots,g_r)\},\\ v_k^* &:= \inf\{L(f) : L : \mathbb{R}[x]_k \to \mathbb{R} \textit{ is linear},\ L(1) = 1,\ L(\mathcal{K}_k(g,g_1,\dots,g_r)) \subset [0,\infty)\}, \end{aligned}$$

dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$. Wówczas (u_k^*), (v_k^*) są ciągami rosnącymi i zbieżnymi do f^*, ponadto $u_k^* \leqslant v_k^* \leqslant f^*$ dla $k \in \mathbb{N}$.

Rozważanie stożków $\mathcal{K}_k(g,g_1,\dots,g_r)$, potencjalnie upraszcza problem minimalizacji wielomianu na zbiorze X, ponieważ są one właściwymi podzbiorami stożków $P_k(g,g_1,\dots,g_r)$ i w konsekwencji $a_k^* \leqslant u_k^*$ oraz $l_k^* \leqslant v_k^*$ dla dostatecznie dużych $k \in \mathbb{N}$.

c) *Aproksymacja wielomianów na zbiorach semialgebraicznych zwartych.* W pracy [37] podajemy pewną metodę przybliżonej minimalizacji wielomianu f na zwartym zbiorze semialgebraicznym bazowym X, powiedzmy $X \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant R\}$, przez sprowadzeniu problemu do przypadku, gdy $X = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leqslant R\}$. Mianowicie, w [37, Proposition 3.3]:

Dla każdego $\varepsilon > 0$, podajemy efektywną procedurę wyliczania wielomianu $h \in \Phi(g_1, \dots, g_r)$ takiego, że

$$f^* - \varepsilon \leqslant \inf\{f(y) - h(y) : |y| \leqslant R\} \leqslant f^* + \varepsilon,$$

gdzie $f^* := \inf\{f(x) : x \in X\}$, przy czym do wyznaczenia wielomianu h wystarczy brać wielomian φ postaci jak w twierdzeniu 25.

Tym samym problem przybliżonej minimalizacji wielomianu f, efektywnie sprowadza się do przypadku, gdy zbiór X jest opisany przez jedną nierówność $R^2 - |x|^2 \geqslant 0$. W takim przypadku M. Schweighofer [Schw$_2$] podał oszacowanie "szybkości zbieżności" ciągu

$$a_k^{**} := \sup\{a \in \mathbb{R} : f - h - a \in P_k(R^2 - |y|^2)\} \to f^{**}, \quad \text{gdy } k \to \infty,$$

gdzie $f^{**} := \inf\{f(y) - h(y) : |y| \leqslant R\}$, wzorem:

$$f^{**} - a_k^{**} \leqslant \frac{c}{\sqrt[D]{k}}$$

dla pewnych stałych $c \in \mathbb{N}$ zależnej od f i $R^2 - |y|^2$ oraz stałej $D \in \mathbb{N}$ zależnej od $R^2 - |y|^2$. Stałe te zależą od wykładnika i stałej C w nierówności Łojasiewicza (Ł$_2$). To oszacowanie jest istotne z punktu widzenia informatycznej implementacji tego algorytmu.

Przy konstrukcji wielomianu h, w omawianej wyżej aproksymacji, podstawową rolę odgrywa oszacowanie odległości punktu x od zbioru zer X funkcji semialgebraicznej $G(x) = \max\{0, -g_1(x), \dots, -g_r(x)\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, przy zadanej wartości $G(x)$. Problem ten można rozwiązać przy użyciu oszacowania wykładnika Łojasiewicza $\mathcal{L}$ i stałej $C > 0$ w następującej nierówności

$$G(x) \geqslant C\left(\frac{\operatorname{dist}(x, X)}{1 + |x|^d}\right)^{\mathcal{L}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mianowicie, w [38, Corollary 10] pokazaliśmy, że

$$\mathcal{L} \leqslant d(6d-3)^{n+r-1},$$

gdzie $d = \max\{\deg g_1, \dots, \deg g_r\}$, a r jest liczbą nierówności potrzebnych do określenia zbioru X. Wobec oszacowania Bröckera (8), zawsze można założyć, że $r \leqslant n(n+1)/2$. Oszacowania wykładnika Łojasiewicza i stałej w nierówności Łojasiewicza odgrywają również podstawową rolę w podobnych badaniach prowadzonych przez M. Schweighofera [Schw$_2$, Schw$_3$].

d) ***Uwypuklanie wielomianów.*** Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ i niech

$$\varphi_N(x) = (1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^N f(x), \quad N \in \mathbb{N}.$$

Jednym z głównych wyników pracy [37] jest następujące twierdzenie o uwypuklaniu wielomianów dodatnich na zbiorach wypukłych i zwartych.

Twierdzenie 27 ([37], Theorem 5.1) *Załóżmy, że wielomian f jest ściśle dodatni na zwartym i wypukłym zbiorze $X \subset \mathbb{R}^n$ zawierającym co najmniej dwa punkty. Połóżmy $R = \max\{|x| : x \in X\}$ oraz niech*

$$0 < m \leqslant \min\{f(x) : x \in X\}. \tag{17}$$

Wówczas istnieje jednoznacznie wyznaczona liczba naturalna $\mathcal{N}$, zależna od modułów współczynników wielomianów $f, g_1, \dots, g_r$ oraz liczb R i m taka, że dla każdej liczby naturalnej $N \geqslant \mathcal{N}$, wielomian φ_N jest silnie wypukły w X.

Dowodzimy również podobnego twierdzenia do twierdzenia 27 dla zbiorów nieograniczonych (patrz [37, Theorem 6.5]). Pokazujemy też, że twierdzenie Reznicka [Re_1, Theorem 3.12], o którym była mowa wcześniej, można w pewnym sensie odwrócić (patrz [37, Corollary 6.8]).

Z twierdzenia 27 wynika, że istnieje liczba naturalna N taka, że wszystkie funkcje postaci $\varphi_{N,\xi}(x) := (1+|x-\xi|^2)^N f(x)$, $\xi \in X$, są silnie wypukłe w X. Ponadto można sprowadzić zagadnienie do przypadku, gdy $N = 6$ (patrz [37, wzór (4.2)]).

Powyższa obserwacja pozwala na zastosowanie twierdzenia 27 do ważnego zagadnienia w optymalizacji, dotyczącego wyznaczania punktów krytycznych funkcji. Pozwala ono na podanie algorytmu wyznaczania ciągu punktów zbioru semialgebraicznego, wypukłego i zwartego X, którego granica jest dolnym punktem krytycznym wielomianu f na zbiorze X. Przytoczmy najpierw dwie definicje i wprowadźmy oznaczenia.

Wiadomo, że dla każdej funkcji ściśle wypukłej i w szczególności silnie wypukłej φ w zwartym zbiorze wypukłym X, istnieje dokładnie jeden punkt, w którym φ przyjmuje najmniejszą wartość w X. Punkt ten oznaczamy $\operatorname{argmin}_X \varphi$.

Wybierzmy dowolny punkt $a_0 \in X$ i indukcyjnie, połóżmy

$$a_\nu := \operatorname{argmin}_X \varphi_{N,a_{\nu-1}}. \tag{18}$$

Niech f będzie funkcją klasy C^1 w pewnym otoczeniu zbioru domkniętego $X \subset \mathbb{R}^n$. Punkt $a \in X$ nazywany jest *dolnym punktem krytycznym funkcji f w zbiorze X*, gdy

$$\langle \nabla f(a), x-a\rangle \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in X \quad \text{z pewnego otoczenia punktu } a.$$

Twierdzenie 28 ([37], Theorem 7.5) *Jeśli $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zwartym i wypukłym zbiorem semialgebraicznym, a f – wielomianem ściśle dodatnim na X, to ciąg określony wzorem* (18) *jest zbieżny do pewnego dolnego punktu krytycznego funkcji f w zbiorze X.*

W powyższym twierdzeniu, założenie ścisłej dodatniości wielomianu f na zbiorze X można zawsze uzyskać przez dodanie do wielomianu f odpowiedniej stałej, którą można efektywnie wskazać. Warto również zauważyć, że nie stracimy zbieżności ciągu a_ν do dolnego punktu krytycznego funkcji f, jeśli będziemy wyznaczać ten ciąg w sposób przybliżony.

e) ***Wielomiany jednorodne i sumy kwadratów.*** Z poprzednim punktem wiąże się również praca [36] wspólna z A. Galą-Jaskórzyńską, K. Kurdyką i K. Kutą, gdzie podajemy jawną postać przedstawienia wielomianu w Positivstellensatz M. Putinara i F. Vasilescu (patrz [PV_1, PV_2], por., [Pu]). Przytoczmy najpierw Positivstellensatz Putinara i Vasilescu, gdzie przyjęliśmy oznaczenia zgodne z pozostałymi w autoreferacie.

Niech $(g_1,\dots,g_r)$ będzie ciągiem r wyrazowym wielomianów z pierścienia $\mathbb{R}[x]$, gdzie $x = (x_1,\dots,x_n)$. Niech $f \in \mathbb{R}[x]$. Załóżmy, że stopnie wielomianów g_j oraz f są liczbami parzystymi. Niech $G_1,\dots,G_r$, $F \in \mathbb{R}[x_0,\dots,x_n]$ będą ujednorodnieniami odpowiednio wielomianów $g_1,\dots,g_r,f$ i załóżmy, że

$$F(y) > 0 \text{ dla } y \in \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : G_i(y) \geqslant 0,\, i = 1,\dots,r\},\ y \neq 0. \tag{19}$$

Wówczas istnieje liczba całkowita $b \geqslant 0$ oraz skończona rodzina wielomianów rzeczywistych $q_l, q_{kl}, l \in L, k = 1,\dots,m$, takie, że

$$f(x) = (1+|x|^2)^{-2b}\left(\sum_{l\in L} q_l(x)^2 + \sum_{k=1}^{m}\sum_{l\in L} g_k(x) q_{kl}(x)^2\right), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{20}$$

Twierdzenie to jest wzmocnieniem twierdzenia Schmüdgena [Schm$_1$] oraz Putinara [Pu] na przypadek, gdy zbiór X określony wzorem (15) nie jest zwarty. Samo założenie ścisłej dodatniości wielomianu f na zbiorze X nie wystarcza do uzyskania założenia (19). Założenie to jest równoważne temu, że $f(x) > 0$ dla $x \in X$ oraz, że forma wiodąca $\widehat{f}(x) := F(0, x_1, \dots, x_n)$ wielomianu f przyjmuje wartości dodatnie na części zbioru X leżącej na hiperpłaszczyźnie w nieskończoności, tj. na zbiorze $\widehat{X} = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : \widehat{g}_i(x) \geqslant 0,\ i = 1, \dots, r\}$.

Celem pracy [36] jest uproszczenie tezy (20) oraz podanie jawnej postaci przedstawienia (20). W tym celu dowodzimy najpierw twierdzenia 29 dla wielomianów jednorodnych. Przez $Q_{n,k}$ oznaczamy zbiór skończonych sum k-tych potęg funkcji liniowych.

Twierdzenie 29 ([36], Theorem 3) *Niech $f \in \mathbb{R}[x]$ będzie wielomianem jednorodnym parzystego dodatniego stopnia d, niech $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{R}[x]$ będą wielomianami jednorodnymi parzystych stopni i niech X będzie zbiorem określonym wzorem* (15). *Jeśli $f(x) > 0$ dla $x \in X \setminus \{0\}$, to istnieją liczby parzyste dodatnie D, N, wielomian $q \in Q_{n,D}$ oraz liczby $a, b \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$f(x) = |x|^{-D+d} \left(q + \sum_{i=1}^{r} |x|^{\alpha_i} (a g_i(x) + b|x|^{\deg g_i})^N g_i(x) \right),$$

gdzie $\alpha_i = D - (N+1) \deg g_i$ dla $i = 1, \dots, r$ są liczbami parzystymi nieujemnymi.

W dowodzie powyższego twierdzenia stosujemy metodę aproksymacji wielomianu wypracowaną w [37] i twierdzenie B. Reznicka [Re$_1$, Theorem 3.12].

Jawną postać przedstawienia Putinara i Vasilescu podajemy w następującym twierdzeniu.

Twierdzenie 30 ([36], Corollary 1) *Przy założeniach i oznaczeniach Positivstellensatz Putinara i Vasilescu, istnieją liczby parzyste $b, D, N \geqslant 0$ takie, że $D - (N+1) \deg g_k \geqslant 0$ dla $k = 1, \dots, r$, oraz skończona rodzina wielomianów rzeczywistych q_l, $l \in L$, o stopniach $\deg q_l \leqslant 1$ oraz wielomiany $q_{k,1}$, $k = 1, \dots, r$, postaci*

$$q_{k,1}(x) = (1 + |x|^2)^{\alpha_k} \left(\xi g_k(x) + \eta (1 + |x|^2)^{\frac{\deg g_k}{2}} \right)^N$$

dla pewnych $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, gdzie $\alpha_k = \frac{D-(N+1)\deg g_k}{2}$ dla $k = 1, \dots, r$, takie, że

$$f(x) = (1 + |x|^2)^{-b} \left(\sum_{l \in L} q_l^D(x) + \sum_{k=1}^{r} g_k(x) q_{k,1} \right), \quad t \in \mathbb{R}^n.$$

Twierdzenia 29 i 30 niosą również dodatkową informację, o wpływie wielomianów opisujących zbiór semialgebraiczny X na wielomiany $q_{k,l}$ w przedstawieniu wielomianu f.

f) ***Stabilność algebr wielomianów ograniczonych.*** Temu tematowi poświęcona jest praca [33], wspólna z M. Michalską i K. Kurdyką. Przedstawiamy w niej związek między punktami bifurkacyjnymi wielomianu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a algebrą wielomianów ograniczonych na zbiorze $S_c = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant f(x) \leqslant c\}$, $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$.

Oznaczmy przez $\mathcal{A}(X)$ zbiór wielomianów pierścienia $\mathbb{R}[x, y]$, które są ograniczone na zbiorze $X \subset \mathbb{R}^2$. Głównym wynikiem tej pracy jest

Twierdzenie 31 ([33], Theorem 3.1) *Weźmy dowolny wielomian $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oraz liczby $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$ takie, że $0 < c < \tilde{c}$. Jeśli $[c, \tilde{c}] \cap B_\infty(f) = \emptyset$, to $\mathcal{A}(S_c) = \mathcal{A}(S_{\tilde{c}})$.*

Zamiast rozważać wielomian f, można rozważać wielomian $f - a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ i wtedy powyższy wynik przenosi się na przypadek algebr wielomianów ograniczonych na zbiorach postaci $\{x \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant f(x) \leqslant b\}$, gdzie $a \leqslant b$ oraz na zbiory postaci $\mathcal{A}(\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leqslant b\})$.

W powyższym twierdzeniu rozważamy wielomiany rzeczywiste, jednak zbiór $B_\infty(f)$ jest zbiorem punktów bifurkacyjnych tego wielomianu traktowanego jako wielomian zespolony. Nie zmienia to jednak faktu, że jest to zbiór skończony. Jak pokazali Z. Jelonek i K. Kurdyka [JK1], zbiór ten ma co najwyżej $d^{n-1} - 1$ punktów, gdzie d jest stopniem wielomianu, a n - liczbą zmiennych (w naszym przypadku $n = 2$). W związku z tym istnieje co najwyżej $2d - 1$ różnych algebr $\mathcal{A}(\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \leqslant b\}$ dla $b \in \mathbb{R}$, gdzie $d = \deg f$.

Istotnymi punktami w dowodzie twierdzenia 31 było twierdzenie Puiseux z parametrem autorstwa T. Krasińskiego [Kra_1, Kra_2] oraz porównywanie dwóch norm w przestrzeni wielomianów rzeczywistych jednej zmiennej.

Badania pierścieni wielomianów ograniczonych na zbiorach semialgebraicznych prowadzone są od niedawna. Były one studiowane na przykład przez E. Beckera i V. Powersa [BP], C. Scheiderera [Sche_3] M. Schweighofera [Schw_1] K. Schmüdgena [Schm_2], S. Kuhlmanna i M. Marshalla [KM]. Ważną inspiracją do tych badań był wynik K. Schmüdgena [Schm_2], który opisaliśmy wcześniej. Dotyczy on problemu momentu na zwartych zbiorach semialgebraicznych (patrz też wyniki S. Kuhlmanna i M. Marshalla [KM]) i pokazuje związek między algebrą wielomianami ograniczonymi i optymalizacją (patrz na przykład [Mar_2]).

5. Ciała rzeczywiste. W pracy [32] podajemy elementarną geometryczną konstrukcję dowolnego ciała rzeczywiście domkniętego w terminach ciała funkcji Nasha. Podajemy również charakteryzację ciał Archimedesowych w terminach ciał funkcji Nasha.

W badaniach dotyczących 17 problemu Hilberta podstawową rolę odgrywają porządki w ciałach rzeczywistych k (patrz [Al], [AGR], [Ar], [AS], [BE], [$\mathrm{Bröc}_1$], [Du_2], [Gu], [Mar_1], [PD]). Wobec twierdzenia Artina-Schreiera [AS], studiowanie porządków sprowadza się do studiowania rzeczywistych domknięć ciała k. W pracy [32] podano geometryczną uniwersalną konstrukcję dowolnego ciała rzeczywiście domkniętego. Sprowadza się ona do konstrukcji rzeczywistych domknięć ciała funkcji wymiernych $k = \mathbb{Q}(\Lambda_T)$, gdzie $\Lambda_T = (\Lambda_t : t \in T)$, $T \neq \emptyset$, jest układem dowolnej ilości zmiennych. To daje pełną informację na ten temat, ponieważ każde ciało rzeczywiście domknięte R jest izomorficzne (z zachowaniem porządku) z domknięciem rzeczywistym pewnego ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$. W pracy tej zakładamy lemat Kuratowskiego-Zorna, więc zbiór T może być uporządkowany liniowo, jeśli tylko $T \neq \emptyset$.

L. Bröcker [$\mathrm{Bröc}_1$] udowodnił tzw. Ultrafilter Theorem, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między rodziną ultrafiltrów i rodziną porządków w $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$, lub równoważnie z rodziną rzeczywistych domknięć ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$. W pracy [32] dowodzimy, że istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między rodziną porządków w ciele $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$ i rodziną tzw. filtrów prostych [32, Theorem 5.2, Proposition 2.4, Corollary 2.5]. Przez filtr prosty rozumiemy filtr Ω podzbiorów przestrzeni $\mathbb{R}^T$ określony warunkami:

1) dla każdego zbioru algebraicznego $V \subsetneq \mathbb{R}^T$, gdzie $V = P^{-1}(0)$, $P \in \mathbb{Q}[\Lambda_T]$, pewna składowa topologiczna zbioru $\mathbb{R}^T \setminus V$ należy do Ω i każdy zbiór $U \in \Omega$ jest taką składową,

2) dla każdych $U_1, U_2 \in \Omega$ istnieje $U_3 \in \Omega$ taki, że $U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

Odpowiedniość między porządkami i filtrami prostymi jest następująca: dla każdego porządku

$\succ$ ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$ istnieje jedyny filtr prosty Ω taki, że $f \succ 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f > 0$ na pewnym zbiorze $U \in \Omega$, gdzie $>$ jest zwykłym porządkiem w $\mathbb{R}$. Odwrotnie, każdy filtr prosty Ω wyznacza jedyny porządek $\succ$ ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$ w powyższy sposób.

Głównym wynikiem pracy jest [32, Theorem 5.2], gdzie podajemy konstrukcję dowolnego domknięcia rzeczywistego ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$ w terminach funkcji $\mathbb{Q}$-Nasha. Funkcję $f : U \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją $\mathbb{Q}$-Nasha, gdy zbiór U jest składową topologiczną pewnego zbioru $\mathbb{R}^T \setminus V$, gdzie $V = P^{-1}(0)$, $P \in \mathbb{Q}[\Lambda_T]$ oraz istnieje niezerowy wielomian $F \in \mathbb{Q}[\Lambda_T, Z]$ taki, że $F(\lambda, f(\lambda)) = 0$ dla $\lambda \in U$. Dla dowolnego filtra prostego Ω oraz dowolnego zbioru $U \in \Omega$, pierścień $\mathcal{N}(U)$ funkcji $\mathbb{Q}$-Nasha na zbiorze U jest dziedziną. W zbiorze $\bigcup_{U\in\Omega} \mathcal{N}(U)$ wprowadzamy relację równoważności "$\sim$": $(f_1 : U_1 \to \mathbb{R}) \sim (f_2 : U_2 \to \mathbb{R})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f_1|_{U_3} = f_2|_{U_3}$ dla pewnego zbioru $U_3 \in \Omega$. Wówczas zbiór $\mathcal{N}_\Omega$ klas równoważności relacji "$\sim$" z naturalnymi działaniami dodawania i mnożenia jest ciałem, które jest rzeczywistym domknięciem ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$.

W języku filtrów prostych mamy następującą charakteryzację porządków archimedesowych ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$:

Twierdzenie 32 ([32], Theorem 3.1) *Porządek $\succ$ ciała $\mathbb{Q}(\Lambda_T)$ jest archimedesowy, wtedy i tylko wtedy, gdy dla filtra prostego Ω wyznaczającego $\succ$, zbiór $\bigcap_{U\in\Omega} U$ jest niepusty.*

Powyższe wyniki nawiązują do geometrycznej konstrukcji algebraicznego domknięcia ciała funkcji wymiernych $\mathbb{C}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$ uzyskanego przed habilitacją w pracy [7].

W modelu tym, każde różniczkowanie $d : \mathcal{N}_\Omega \to \mathcal{N}_\Omega$ jest postaci $d(f) = \sum_{t\in T} g_t \frac{\partial f}{\partial x_t}$, gdzie $(g_t \in \mathcal{N}_\Omega : t \in T)$ jest dowolną rodziną elementów zbioru $\mathcal{N}_\Omega$. Konstrukcja ciała $\mathcal{N}_\Omega$ przenosi się również na dowolne ciała algebraicznie domknięte charakterystyki zero, a więc ciała różniczkowo domknięte muszą być takiej postaci. Trudno jednak stwierdzić jak dobrać różniczkowanie, aby uzyskać ciało różniczkowo domknięte.

Realizowane projekty badawcze

W 2007 roku kierowałem projektem promotorskim nr NN201 2600 33 pt: *Nierówność Łojasiewicza a analityczna równoważność funkcji w nieskończoności*, który przyczynił się do powstanie rozprawy doktorskiej G. Skalskiego.

W latach 2009-2010 byłem koordynatorem ze strony polskiej Grantu POLONIUM no 7862/R09/R10 pod tytułem: *Zbiory i odwzorowania semialgebraiczne w nieskończoności.* Koordynatorem ze strony francuskiej był K. Kurdyka. Wynikiem realizacji projektu były prace [27, 28]. Podczas realizacji projektu powstała koncepcja współpracy naukowej miedzy naszym Wydziałem i Laboratoire de Mathematiques de l' Universite de Savoie Mont Blanc (Francja).

Od 08.07.2013 kieruję realizacją grantu NCN (OPUS) UMO-2012/07/B/ST1/03293 pod tytułem *Sumy kwadratów a wykładnik Łojasiewicza.* W wyniku realizacji tego projektu powstało cykl prac naukowych [33, 34, 36–40] oraz prace innych autorów, których wyniki zaprezentowano na konferencjach naukowych krajowych i zagranicznych.

Spis Publikacji

PRACE OPUBLIKOWANE PRZED HABILITACJĄ

[1] S. Spodzieja, *On some property of the Jacobian of a homogeneous polynomial mapping.* Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 39 (1989), no. 5, 6 pp. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[2] S. Spodzieja, *On commutativity of the composition of Whitney operators.* Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 39 (1989), no. 13, 6 pp. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[3] S. Spodzieja, *Some criteria for the injectivity of holomorphic mappings.* Proceedings of the Tenth Conference on Analytic Functions (Szczyrk, 1990). Ann. Polon. Math. 55 (1991), 321–323. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[4] T. Krasiński, S. Spodzieja, *On linear differential operators related to the n-dimensional Jacobian conjecture.* Real algebraic geometry (Rennes, 1991), 308–315, Lecture Notes in Math., 1524, Springer, Berlin, 1992. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[5] S. Spodzieja, *On multi-valued algebraic mappings.* Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sr. Rech. Dform. 17 (1994), 95–109. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[6] T. Kałużny, S. Spodzieja, *On axiomatic definition of multiplicity.* Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sr. Rech. Dform. 17 (1994), 111–116. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[7] S. Spodzieja, *The field of Nash functions and factorization of polynomials.* Ann. Polon. Math. 65 (1996), no. 1, 81–94. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[8] T. Krasiński, S. Spodzieja, *Bifurcation points of real polynomials.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 44 (1996), no. 3, 333–339. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[9] M. Frontczak, P. Skibiński, S. Spodzieja, *On factorization of polynomials with holomorphic coefficients.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46 (1998), no. 1, 39–54. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[10] M. Frontczak, P. Skibiński, S. Spodzieja, *Salomon's theorem for polynomials with several parameters.* Colloq. Math. 80 (1999), no. 1, 107–114. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[11] T. Rodak, S. Spodzieja, *On some characterization of proper polynomial mappings.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48 (2000), no. 2, 157–164. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[12] S. Spodzieja, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent.* Ann. Polon. Math. 73 (2000), no. 3, 257–267. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[12a] S. Spodzieja, *Errata to "Multiplicity and the Łojasiewicz exponent" (Ann. Polon. Math. 73 (2000), 257267).* Ann. Polon. Math. 115 (2015), no. 1, 99–100. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[13] T. Krasiński, S. Spodzieja, *A characterization of proper regular mappings.* Polynomial automorphisms and related topics (Kraków, 1999). Ann. Polon. Math. 76 (2001), no. 1-2, 127–138. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[14] T. Krasiński, S. Spodzieja, *On the irreducibility of fibres of complex polynomial mappings.* Effective methods in algebraic and analytic geometry, 2000 (Kraków). Univ. Iagel. Acta Math. No. 39 (2001), 167–178. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[15] S. Spodzieja, *Łojasiewicz inequalities at infinity for the gradient of a polynomial.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 50 (2002), no. 3, 273–281. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[16] S. Spodzieja, *The Łojasiewicz exponent at infinity for overdetermined polynomial mappings.* Ann. Polon. Math. 78 (2002), no. 1, 1–10. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[17] A. Nowicki, S. Spodzieja, *Polynomial imaginary decompositions for finite extensions of fields of characteristic zero.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 51 (2003), no. 2, 157–168. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[18] J. Gwoździewicz, S. Spodzieja, *The Łojasiewicz gradient inequality in a neighbourhood of the fibre.* Ann. Polon. Math. 87 (2005), 151–163. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[19] S. Spodzieja, *The Łojasiewicz exponent of subanalytic sets.* Ann. Polon. Math. 87 (2005), 247–263. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[20] S. Spodzieja, *On the Nagata automorphism.* Univ. Iagel. Acta Math. No. 45 (2007), 131–136. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

Prace o charakterze przeglądowym opublikowane przed habilitacją

[21] S. Spodzieja, *O włóknach odwzorowań wielomianowych.* Materiały XIX Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (1998), 51–55 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[22] S. Spodzieja, *Generyczne przecięcia zbioru algebraicznego hiperpłaszczyznami.* Materiały XXII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (2001), 23–36 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[23] S. Spodzieja, *Twierdzenie Koebego o pokryciu a osobliwości funkcji holomorficznych.* Materiały XXIV Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (2003), 45–56 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[24] S. Spodzieja, *O automorfiźmie Nagaty.* Materiały XXVI Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (2005), 39–42 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

Podręcznik

[25] S. Spodzieja, *Wykład z analizy matematycznej 1 i 2.* Wersja internetowa http://www.math.uni.lodz.pl/~kfairr/analiza/.

PRACE OPUBLIKOWANE PO HABILITACJI

[26] T. Rodak, S. Spodzieja, *Effective formulas for the Łojasiewicz exponent at infinity.* J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), 1816–1822. (Journal Impact Factor 2011: 0,600, liczba cytowań 5)

[27] T. Rodak, S. Spodzieja, *Effective formulas for the local Łojasiewicz exponent.* Math. Z. 268 (2011), 37–44. (Journal Impact Factor 2011: 0,749, liczba cytowań 3)

[28] T. Rodak, S. Spodzieja, *Łojasiewicz exponent near the fibre of a mapping.* Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no. 4, 1201–1213. (Journal Impact Factor 2011: 0,611, liczba cytowań 3)

[29] T. Rodak, S. Spodzieja, *Equivalence of mappings at infinity.* Bull. Sci. Math. 136 (2012), no. 6, 679-686. (Journal Impact Factor 2012: 0,569, liczba cytowań 1)

[30] S. Spodzieja, A. Szlachcińska, *Łojasiewicz exponent of overdetermined mappings.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 61 (2013), no. 1, 27-34. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[31] B. Osińska-Ulrych, G. Skalski, S. Spodzieja, *Extensions of real regular mappings and the Łojasiewicz exponent at infinity.* Bull. Sci. Math. 137 (2013), no. 6, 718–729. (Journal Impact Factor 2013: 0,733, liczba cytowań 0)

[32] S. Spodzieja, *A geometric model of an arbitrary real closed field.* Pacific J. Math. 264 (2013), no. 2, 455–469. (Journal Impact Factor 2013: 0,451, liczba cytowań 1)

[33] K. Kurdyka, M. Michalska, S. Spodzieja, *Bifurcation values and stability of algebras of bounded polynomials.* Adv. Geom. 14 (2014), no. 4, 631–646. (Journal Impact Factor 2014: 0,500, liczba cytowań 0).

[34] K. Kurdyka, B. Osińska-Ulrych, G. Skalski, S. Spodzieja, *Sum of squares and the Łojasiewicz exponent at infinity.* Ann. Polon. Math. 112 (2014), no. 3, 223–237. (Journal Impact Factor 2014: - 0,469, liczba cytowań 0)

[35] K. Kurdyka, S. Spodzieja, *Separation of real algebraic sets and the Łojasiewicz exponent.* Proc. Amer. Math. Soc. 142 (2014), no. 9, 3089–3102. (Journal Impact Factor 2014: 0,681, liczba cytowań 6)

[36] A. Gala-Jaskórzynska, K. Kurdyka, K. Kuta, S. Spodzieja, *Positivstellensatz for homogeneous semialgebraic sets.* Arch. Math. (Basel) 105 (2015), 405–412. (Journal Impact Factor 2014: - 0,394, liczba cytowań 0)

[37] K. Kurdyka, S. Spodzieja, *Convexifying positive polynomials and sums of squares approximation.* SIAM J. Optim. 25 (2015), no. 4, 2512-2536. (Journal Impact Factor 2014: 1,829, liczba cytowań 0)

[38] K. Kurdyka, S. Spodzieja, A. Szlachcińska, *Metric properties of semialgebraic mappings.* Discrete Comput. Geom. 55 (2016), no. 4, 786–800. (Journal Impact Factor 2014: - 0,692, liczba cytowań 0)

[39] T. Rodak, A. Różycki, S. Spodzieja, *Multiplicity and semicontinuity of the Łojasiewicz exponent.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 7 pp. Online First version. DOI: 10.4064/ba8041-3-2016 (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[40] P. Migus, T. Rodak, S. Spodzieja, *Finite determinacy of non-isolated singularities.* Przyjęta do druku w Ann. Polon. Math. (Journal Impact Factor 2014: - 0,469, liczba cytowań 0)

Redakcja opracowań zbiorowych

[41] T. Krasiński, S. Spodzieja (eds.), *Analytic and algebraic geometry.* Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013, 205 pp. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[42] T. Krasiński, S. Spodzieja (eds.), *Zygmunt Charzyński, Selected Papers.* Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2015. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[43] A. Rogala, S. Spodzieja (eds.), *Konferencja matematyki ubezpieczeń i inwestycji.* Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ 2014, 114 pp. (po polsku).

[44] S. Spodzieja, (ed.) *Materiały XVIII - XXXVII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej*, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (1997 – 2016) (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

Prace o charakterze przeglądowym opublikowane po habilitacji

[45] S. Spodzieja, *O C^0-determinowalności dżetów.* Materiały XXVII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (2006), 63–81 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[46] S. Spodzieja, *O układach równań i nierówności wielomianowych.* Materiały XXVIII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (2007), 51–67 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[47] S. Spodzieja, *Trywializacja wielomianu w nieskończoności a warunek Malgrange'a.* Materiały XXVIII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Uniwersytet Łódzki, Wyd. UŁ (2007), 69–79 (po polsku). (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

[48] B. Osińska-Ulrych, G. Skalski, S. Spodzieja, *On C^0-sufficiency of jets*. Chapter in Analytic and algebraic geometry, 95–113, Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013. (Journal Impact Factor 0, liczba cytowań - brak danych w Web of Science)

Podręcznik

[49] S. Spodzieja, *Wykład z analizy matematycznej, funkcje jednej zmiennej.* Wersja internetowa http://www.math.uni.lodz.pl/~kfairr/analiza/ 2014, 416 pp.

Dokładniejsze dane o cytowaniach powyższych prac zebrano w oddzielnym dokumencie *Wykaz cytowań prac naukowych.*

Prace cytowane w autoreferacie

[AR] R. Achilles, S. Rams, *Intersection numbers, Segre numbers and generalized Samuel multiplicities.* Arch. Math. (Basel) 77 (2001), no. 5, 391–398.

[ATW] R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski, *On improper isolated intersection in complex analytic geometry.* Ann. Polon. Math. 51 (1990), 21–36.

[ABS] F. Acquistapace, F. Broglia, M. Shiota, *The finiteness property and Łojasiewicz inequality for global semianalytic sets.* Adv. Geom. 5 (2005), no. 3, 377–390.

[AK_1] D. D'Acunto, K. Kurdyka, *Explicit bounds for the Łojasiewicz exponent in the gradient inequality for polynomials.* Ann. Polon. Math. 87 (2005), 51–61.

[AK_2] D. D'Acunto, K. Kurdyka, *Bounds for gradient trajectories and geodesic diameter of real algebraic sets.* Bull. London Math. Soc. 38 (2006), no. 6, 951–965.

[Al] M. E. Alonso, *A note on orderings on algebraic varieties.* Pacific J. Math. 123 (1986), no. 1, 1–7.

[AGR] M. E. Alonso, J. M. Gamboa and J. M. Ruiz, *Ordres sur les surfaces réelles.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 298 (1984), 17–19.

[Ar] E. Artin, *Über die Zerlegung definiter Functionen in Quadrate.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 100-115; Collected Papers, 273–288, Addison-Wesley, Reading, MA, 1965.

[AS] E. Artin, O. Schreier, *Algebraische Konstruktion reeller Körper; Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate; Eine Kennzeichnung der reell abgeschlossenen Körper.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 85-99; 100-115; 225–231.

[BPR] S. Basu, R. Pollack, M-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry.* Second edition. Algorithms and Computation in Mathematics, Vol. 10. Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BCW] H. Bass, E. H. Conel, D. Wright, *The Jacobian Conjecture: Reduction degree and formal expansion of the inverse.* Bull. Amer. Math. Soc. 7(2) (1982), 287–330.

[BP] E. Becker, V. Powers, *Sums of powers in rings and the real holomorphy ring*, J. reine angew. Math. 480, 71–103 (1996)

[BR] R. Benedetti, J.-J. Risler, *Real algebraic and semi-algebraic sets.* Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1990.

[BY] C. A. Berenstein, A. Yger, *Analytic residue theory in the non-complete intersection case.* J. Reine Angew. Math. 527 (2000), 203–235.

[BCRe] C. Berg, J. P. R. Christensen, P. Ressel, *Positive definite functions on abelian semigroups.* Math. Ann. 223 (1976), no. 3, 253–274.

[BM] E. Bierstone, P.D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 67 (1988), 5–42.

[Bl_1] G. Blekherman, *Convex forms that are not sums of squares.* arXiv:0910.0656 (2009).

[Bl_2] G. Blekherman, *Nonnegative polynomials and sums of squares.* Semidefinite optimization and convex algebraic geometry, 159–202, MOS-SIAM Ser. Optim., 13, SIAM, Philadelphia, PA, 2013.

[BCRo] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, *Real algebraic geometry.* E.M.G. vol. 36. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[BE] J. Bochnak, G. Efroymson, *Real algebraic geometry and the 17th Hilbert problem.* Math. Ann. 251 (1980), no. 3, 213–241.

[BK] J. Bochnak, W. Kucharz, *Sur les germes d'applications differentiables à singularités isolées.* Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 115–131.

[BŁ] J. Bochnak, S. Łojasiewicz, *A converse of the Kuiper-Kuo theorem.* Proc. of Liverpool Singularities—Symposium, I (1969/70), pp. 254–261, Lecture Notes in Math., Vol. 192. Springer, Berlin, 1971.

[BR] J. Bochnak, J. J. Risler, *Sur les exposants de Łojasiewicz.* Comment. Math. Helv. 50 (1975), 493–507.

[BDLM] J. Bolte, A. Daniilidis, O. Ley, L. Mazet, *Characterizations of Łojasiewicz inequalities: subgradient flows, talweg, convexity.* Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 6, 33193363.

[Bröc_1] L. Bröcker, *Real spectra and distributions of signatures.* Real algebraic geometry and quadratic forms (Rennes, 1981), 249–272, Lecture Notes in Math., 959, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[Bröc_2] L. Bröcker, *Minimale Erzeugung von Positivbereichen.* Geom. Dedicata 16 (1984), no. 3, 335–350.

[Bröc_3] L. Bröcker, *On basic semialgebraic sets.* Exposition. Math. 9 (1991), no. 4, 289-334.

[Brow] W. D. Brownawell, *Bounds for the degree in Nullstellensatz.* Ann. of Math. 126 (1987), 577–592.

[CL] S. H. Chang, Y. C. Lu, *On C^0-sufficiency of complex jets.* Canad. J. Math. 25 (1973), 874–880.

[CH] P. Cassou-Nogues, H. H. Vui, *Theoreme de Kuiper-Kuo-Bochnak-Lojasiewicz a l'infini.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 5 (1996), no. 3, 387–406.

[CCS] Z. Charzyński, J. Chądzyński, P. Skibiński, *A contribution to Keller's Jacobian conjecture. III.* Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 39 (1989), 1–8.

[Ch] J. Chądzyński, *On proper polynomial mappings.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 31 (1983), 115–120.

[CK_1] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Exponent of growth of polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$.* In: Singularities, S. Łojasiewicz (ed.), Banach Center Publ. 20, PWN, Warszawa, 1988, 147–160.

[CK_2] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Sur l'exposant de Łojasiewicz à l'infini pour les applications polynomiales de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ et les composantes des automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315 (1992), 1399–1402.

[CK_3] J. Chądzyński, T. Krasiński, *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial mappings of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ and components of polynomial automorphisms of $\mathbb{C}^2$.* Ann. Polon. Math. 57 (1992), 291–302.

[CK_4] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Resultant and the Łojasiewicz exponent.* Ann. Polon. Math. 61 (1995), 95–100.

[CK_5] J. Chądzyński, T. Krasiński, *A set on which the local Łojasiewicz exponent is attained.* Ann. Polon. Math. 67 (1997), no. 3, 297–301.

[CK_6] J. Chądzyński, T. Krasiński, *A set on which the Łojasierwicz exponent at infinity is attained.* Ann. Polon. Math. 67 (1997), 191–197.

[CK_7] J. Chądzyński, T. Krasiński, *On a Kollár's type estimation of polynomial mappings.* Univ. Iagel. Acta Math. 37 (1999), 69–74.

[CK_8] J. Chądzyński, T. Krasiński, *The gradient of a polynomial at infinity.* Kodai Math. J. 26 (2003), 317–339.

[CMN] J. Cimprič, M. Marshall, T. Netzer, *On the real multidimensional rational K-moment problem.* Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 11, 5773–5788.

[Cy_1] E. Cygan, *Factorization of polynomials.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 40 (1992), 45–52.

[Cy_2] E. Cygan, *Intersection theory and separation exponent in complex analytic geometry.* Ann. Polon. Math. 69 (1998), 287–299.

[Cy_3] E. Cygan, *A note on separation of algebraic sets and the Łojasiewicz exponent for polynomial mappings.* Bull. Sci. Math. 129 (2005), no. 2, 139–147.

[CyKT] E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski, *Separation of algebraic sets and the Łojasiewicz exponent of polynomial mappings.* Invent. Math. 136 (1999), no. 1, 75–87.

[DG] J. Damon, T. Gaffney, *Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations.* Invent. Math. 72 (1983), no. 3, 335–358.

[DM] L. van den Dries, C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures.* Duke Math. J. 84 (1996), 497–540.

[Dr] L. M. Drużkowski, *An effective approach to Keller's Jacobian conjecture.* Math. Ann. 264 (1983), no. 3, 303–313.

[Du_1] D. W. Dubois, *A Nullstellensatz for ordered fields.* Ark. Mat. 8 (1969), 11–114.

[Du_2] D. W. Dubois, *Second note on Artin's solution of Hilbert's 17th problem. Order spaces.* Pacific J. Math. 97 (1981), no. 2, 357–371.

[E] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian Conjecture.* Progress in Mathematics, 190, Birkhäuser-Verlag, Basel, 2000.

[Fo] L. Fourrier, *Topologie d'un polynme de deux variables complexes au voisinage de l'infini.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), no. 3, 645–687.

[Fuk] T. Fukuda, *Types topologiques des polynômes.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.,(46), 87–106, 1976.

[FY] T. Fukui, E. Yoshinaga, *The modified analytic trivialization of family of real analytic functions.* Invent. Math. 82 (1985), no. 3, 467–477.

[Fur] M. Furushima, *Finite groups of polynomial automorphisms in the complex affine plane. I.* Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 36 (1982), 85–105.

[Ga_1] A. Gabrielov *Projections of semianalytic sets.* Funkcional. Anal. i Prilozen. 2 1968 no. 4, 18–30.

[Ga_2] A. Gabrielov, *Multiplicities of Pfaffian intersection, and the Łojasiewicz inequality.* Selecta Math. (N.S.) 1 (1995), 113–127.

[Gr] V. Grandjean, *Finite determinacy relative to closed and finitely generated ideals.* Manuscripta Math. 103, no. 3, 313–328 (2000)

[Gu] Z. Guangxing, *Ordered fields satisfying Pólya's theorem.* Proc. Amer. Math. Soc. 133 (2005), no. 10, 2921–2926.

[Gw] J. Gwoździewicz, *The Łojasiewicz exponent of an analytic function at an isolated zero.* Comment. Math. Helv. 74 (1999), 364–375.

[GwP] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *Łojasiewicz exponents and singularities at infinity of polynomials in two complex variables.* Colloq. Math. 103 (2005), no. 1, 47–60.

[Ha] H. V. Ha, *Nombres de Łojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes.* C. R. Acad. Sci. Paris 311 (1990), 429–432.

[He] J. Heintz, M-F. Roy, P. Solernó, *Sur la complexité du principe de Tarski-Seidenberg.* Bull. Soc. Math. France 118 (1990), 101–126.

[Hil] D. Hilbert, *Über die Darstellung definiter Formen als Summe von Formenquadraten.* Math. Ann. 32 (1888), 342–350.

[Hir_1] H. Hironaka, *Subanalytic sets.* In Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra (Kinokuniya, Tokyo), 1973, volume in honor of Yasuo Akizuki, 453–493.

[Hir_2] H. Hironaka, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps.* Quaderni dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Istituto Matematico "L. Tonelli" dell'Universita di Pisa, Pisa, 1973.

[Hö] L. Hörmander, *On the division of distributions by polynomials.* Ark. Mat. 3 (1958), 555–568.

[J_1] Z. Jelonek, *The set of points at which a polynomial map is not proper.* Ann. Polon. Math. 58 (1993), no. 3, 259–266.

[J_2] Z. Jelonek, *Topological characterization of finite mappings.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 49 (2001), 279–283.

[J_3] Z. Jelonek, *On the generalized critical values of a polynomial mapping.* Manuscripta Math. 110 (2003), no. 2, 145–157.

[J_4] Z. Jelonek, *On the effective Nullstellensatz.* Invent. Math. 162 (2005), no. 1, 1–17.

[J_5] Z. Jelonek, *On the Łojasiewicz exponent.* Hokkaido Math. J. 35 (2006), no. 2, 471–485.

[JK1] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *On asymptotic critical values of a complex polynomial.* J. Reine Angew. Math. 565 (2003), 1–11.

[JK2] Z. Jelonek, K. Kurdyka, *Reaching generalized critical values of a polynomial.* Math. Z. 276 (2014), no. 1-2, 557–570.

[JT] Z. Jelonek, M. Tibăr *Bifurcation locus and branches at infinity of a polynomial* $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$. Math. Ann. 361 (2015), no. 3-4, 1049–1054.

[Ka] S. Kaliman, *On the Jacobian conjecture.* Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 45–51.

[JKS] S. Ji, J. Kollár, B. Shiffman, *A global Łojasiewicz inequality for algebraic varieties.* Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 813–818.

[Ko_1] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz.* J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 963–975.

[Ko_2] J. Kollár, *An effective Łojasiewicz inequality for real polynomials.* Period. Math. Hungar. 38 (1999), no. 3, 213–221.

[Ko_3] J. Kollr, *Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 1 (1999), no. 3, 313–337.

[Kra_1] T. Krasiński, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza jakobianowa.* Acta Universitatis Lodziensis, Wyd. UŁ, Łódź 1991

[Kra_2] T. Krasiński, *On branches at infinity of a pencil of polynomials in two complex variables.* Annales Polonici Matematici 55 (1991) 213–220.

[Kri] J.-L. Krivine, *Anneaux préordonnés.* J. Analyse Math. 12 (1964), 307–326.

[Krug] S. Krug, *Geometric interpretations of a counterexample to Hilbert's 14th problem, and rings of bounded polynomials on semialgebraic sets.* Preprint arXiv:1105.2029v2

[KM] S. Kuhlmann, M. Marshall, *Positivity, sums of squares and the multi-dimensional moment problem.* Transactions of the AMS, vol. 354, no. 11, 4285–4301 (2002).

[Kui] N. H. Kuiper, *C^1-equivalence of functions near isolated critical points.* Proc. Sym. in Infinite Dimensional Topology. (Baton Rouge, 1967), 199–218. Ann. of Math. Studies, 69, Princeton Univ. Press, Princeton N. J., 1972.

[Kuo_1] T. C. Kuo, *On C^0-sufficiency of jets of potential functions.* Topology 8 (1969) 167–171.

[Kuo$_2$] T. C. Kuo, *Computation of Łojasiewicz exponent of $f(x, y)$.* Comment. Math. Helv. 49 (1974), 201–213.

[KLu] T. C. Kuo, Y. C. Lu, *On analytic function germs of two complex variables.* Topology 16 (1977), no. 4, 299–310.

[Kurd] K. Kurdyka, *On gradients of functions definables in o-minimal structures.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 48 (1998), no. 3, 769–783.

[KMP] K. Kurdyka, T. Mostowski, A. Parusiński, *Proof of the gradient conjecture of R. Thom.* Ann. of Math. (2) 152 (2000), no. 3, 763–792.

[KOS] K. Kurdyka, P. Orro, S. Simon, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values.* J. Differential Geom. 56 (2000), 67–92.

[KP] K. Kurdyka, A. Parusiński, *w_f-stratification of subanalytic functions and the Łojasiewicz inequality.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 318 (1994), no. 2, 129–133.

[Kuro] S. Kuroda, *A counterexample to the fourteenth problem of Hilbert in dimension three.* Michigan Math. J. 53 (2005), no. 1, 123–132

[Kush] L. Kushner, *Finite determination on algebraic sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 331 (1992), no. 2, 553561.

[KLe] L. Kushner, B. Terra Leme *Finite relative determination and relative stability.* Pacific J. Math. 192 (2000), no. 2, 315–328.

[La$_1$] J. B. Lasserre, *Global optimization with polynomials and the problem of moments.* SIAM J. Optim. 11 (2001), no. 3, 796–817.

[La$_2$] J. B. Lasserre, *Sum of squares approximation of polynomials, nonnegative on a real algebraic set.* SIAM J. Optim. 16 (2005), no. 2, 610–628.

[La$_3$] J. B. Lasserre, *A sum of squares approximation of nonnegative polynomials.* SIAM J. Optim. 16 (2006), no. 3, 751–765.

[La$_4$] J. B. Lasserre, *Representation of nonnegative convex polynomials.* Arch. Math. 91 (2008), no. 2, 126–130.

[LN] J. B. Lasserre, T. Netzer, *SOS approximations of nonnegative polynomials via simple high degree perturbations.* Math. Z. 256 (2007), no. 1, 99–112.

[L-JT] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier, *Clôture intégrale des idéaux et équisingularité.* Centre de Mathématiques Ecole Polytechnique Palaiseau, 1974.

[LMP] G. Li, B.S. Mordukhovich, T.S. Pham, *New fractional error bounds for polynomial systems with applications to Hölderian stability in optimization and spectral theory of tensors.* Math. Program. 153 (2015), no. 2, Ser. A, 333–362.

[Li] B. Lichtin, *Estimation of Łojasiewicz exponents and Newton polygons.* Invent. Math. 64 (1981), no. 3, 417–429.

[Lo$_1$] T. L. Loi, *On the global Łojasiewicz inequalities for the class of analytic logarithmico-exponential functions.* C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 318 (1994), 543–548.

[Lo$_2$] T. L. Loi, *Łojasiewicz inequalities for sets definable in the structure $R_{\exp}$.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 4, 951–971.

[Ł$_1$] S. Łojasiewicz, *Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles*, C. R. Acad. Sci. Paris 246 (1958), 683–686.

[Ł$_2$] S. Łojasiewicz, *Sur le problème de la division.* Studia Math. 18 (1959), 81–136.

[Ł$_3$] S. Łojasiewicz, *Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels.* Les Equations aux Dérivées Partielles (Paris, 1962) pp. 87–89 Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris.

[Ł$_4$] S. Łojasiewicz, *Ensembles semi-analytiques.* preprint IHES, 1965.

[Ł$_5$] S. Łojasiewicz, *Sur les trajectoires du gradient d'une function analytique.* In: Geometry Seminars, 1982-1983, Univ. Stud. Bologna, Bologna 1984, 115–117.

[Ł$_6$] S. Łojasiewicz, *Sur la géométrie semi- et sous-analytique.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1993), no. 5, 1575–1595.

[Mar$_1$] M. Marshall, *$*$-orderings and $*$-valuations on algebras of finite Gelfand-Kirillov dimension.* J. Pure Appl. Algebra 179 (2003), no. 3, 255–271.

[Mar$_2$] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares.* Mathematical Surveys and Monographs, 146. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Mat] J. Mather, *Finitely determined map germs.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sei. 35 (1968), 127–156.

[M-H] A. Melle-Hernández, *On polar invariants of hypersurface singularities.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 9 (2000), no. 4, 671–688.

[Mer] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes.* Invent. Math. 41 (1977), no. 2, 103–111.

[Mich$_1$] M. Michalska, *Algebra of bounded polynomials on a set Zariski closed at infinity cannot be finitely generated.* Bull. Sci. Math. 137 (2013), no. 6, 705–715.

[Mich$_2$] M. Michalska, *Curves testing boundedness of polynomials on subsets of the real plane.* J. Symbolic Comput. 56 (2013), 107–124.

[Mos] T. Mostowski, *Lipschitz equisingularity.* Dissertationes Math. 243 (1985), 46 pp.

[Mot] T. S. Motzkin, *The arithmetic-geometric inequality.* In: Inequalities (Ed. O. Shisha) Academic Press (1967), 205–224.

[Na] M. Nagata, *On automorphism group of $k[x, y]$.* Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1972.

[NZ] A. Némethi, A. Zaharia, *Milnor fibration at infinity.* Indag. Mathem., N.S., 3 (3), (1992), 323–335

[Nett] E. Netto, *Vorlesungen über Algebra.* B. 2, Leipzig: Teubner 1900.

[Netz] T. Netzer, *Stability of quadratic modules.* Manuscripta Math. 129 (2009), no. 2, 251–271

[No] K. J. Nowak, *Improper intersections in complex analytic geometry.* Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 391 (2001), 58 pp.

[PZ] L. Păunescu, A. Zaharia *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial functions.* Kodai Math. J. 20 (1997), 269–274.

[Pa$_1$] A. Parusiński, *Lipschitz stratification of subanalytic sets.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 27 (1994), 661–696.

[Pa$_2$] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity.* Composito Math. 97 (1995), 369–384.

[Pe] R. Pellikaan, *Finite determinacy of functions with non-isolated singularities.* Proc. London Math. Soc. (3) 57, no. 2, 357–382 (1988)

[Ph$_1$] T. S. Pham, *The Łojasiewicz exponent of a continuous subanalytic function at an isolated zero.* Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), no 1, 1–9.

[Ph$_2$] T.S. Pham, *An explicit bound for the Łojasiewicz exponent of real polynomials.* Kodai Math. J. 35 (2012), no. 2, 311–319.

[PlSd] D. Plaumann, C. Scheiderer, *The ring of bounded polynomials on a semi-algebraic set.* Trans. Amer. Math. Soc. 364 (2012), no. 9, 466–4682.

[Pł$_1$] A. Płoski, *Une évaluation pour les sous-ensembles analytiques complexes.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 31 (1983), 259–262.

[Pł$_2$] A. Płoski, *Sur l'exposant d'une application analytique, II.* Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33 (1985), 123–127.

[Pł_3] A. Płoski, *On the growth of proper polynomial mappings.* Ann. Polon. Math. 45 (1985), 297–309.

[Pł_4] A. Płoski, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent.* Banach Center Publications 20, Warsaw (1988), 353–364.

[Pł_5] A. Płoski, *On the irreducibility of polynomials in several complex variables.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 39 (1991), 241–247.

[Pł_6] A. Płoski, *On the Noether exponent.* Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 40 (1991), 23–29.

[Pł_7] A. Płoski, *On the maximal polar quotient of an analytic plane curve.* Kodai Math. J. 24 (2001), no. 1, 120–133.

[Pł_8] A. Płoski, *Semicontinuity of the Łojasiewicz exponent.* Univ. Iagel. Acta Math. No. 48 (2010), 103–110.

[PD] A. Prestel, Ch. N. Delzell, *Positive polynomials. From Hilbert's 17th problem to real algebra.* Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Pu] M. Putinar, *Positive polynomials on compact semi-algebraic sets.* Indiana Univ. Math. J. 42 (1993), no. 3, 969–984.

[PV_1] M. Putinar, F.-H. Vasilescu, *Positive polynomials on semi-algebraic sets.* C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 328 (1999), no. 7, 585–589.

[PV_2] M. Putinar, F.-H. Vasilescu, *Solving moment problems by dimensional extension.* Ann. of Math. 149 (1999), 1087–1107.

[Ra] P. J. Rabier, *Ehresmann Fibrations and Palais-Smale Conditions for Morphisms of Finsler Manifolds.* The Annals of Mathematics, Second Series, 146 (1997), 647–691.

[Re_1] B. Reznick, *Uniform denominators in Hilbert's seventeenth problem.* Math. Z. 220 (1995), no. 1, 75–97.

[Re_2] B. Reznick, *Blenders. Notions of positivity and the geometry of polynomials.* 345–373, Trends Math., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[Ri] J.-J. Risler, *Une caractérisation des idéaux des variétés algébriques réelles.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 271 (1970), 1171–1173.

[Ro_1] T. Rodak, *The Łojasiewicz exponent of the gradient at infinity.* Bull. Polish Acad. Sci. Math. 51 (2003), 93–98.

[Ro_2] T. Rodak, *Wykładnik Łojasiewicza w pobliżu poziomicy.* PhD thesis, University of Łódź, 2005 (in Polish).

[Ro_3] T. Rodak, *Reduction of a family of ideals.* Kodai Math. J., 38 (2015), no. 1, 201–208.

[RV] M-F. Roy, N. Vorobjov, *The complexification and degree of a semi-algebraic set.* Math. Z. 239 (2002), no. 1, 131-142.

[Ru] K. Rusek, *A geometric approach to Keller's Jacobian conjecture.* Math. Ann. 264 (1983), no. 3, 315–320.

[RW] K. Rusek, T. Winiarski, *Criteria for regularity of holomorphic mappings.* Bull. Polish Acad. Sci. Math.28 (1980), 471–475.

[Sa] G. Salomon, *Über den Bertinischen Satz und seine Erweiterung.* Diss. Tübingen, 1919.

[Sche_1] C. Scheiderer, *Stability index of real varieties.* Invent. Math. 97 (1989), no. 3, 467-483.

[Sche_2] C. Scheiderer, *Sums of squares of regular functions on real algebraic varieties.* Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 3, 1039–1069.

[Sche_3] C. Scheiderer, *Sums of squares on real algebraic curves.* Math. Z. 245 (2003), no. 4, 725–760

[Sche_4] C. Scheiderer, *Non-existence of degree bounds for weighted sums of squares representations.* J. Complexity 21 (2005), no. 6, 823–844.

[Sche_5] C. Scheiderer, *Positivity and sums of squares: A guide to recent results*. In: Emerging applications of algebraic geometry, 271–324, IMA Vol. Math. Appl., 149, Springer, New York, 2009.

[Shif] B. Shiffman, *Degree bounds for the division problem in polynomial ideals*. Michigan Math. J. 36 (1989), 163–171.

[Schin] A. Schinzel, *Polynomials with special regard to reducibility*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 77. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Schm_1] K. Schmüdgen, *The K-moment problem for compact semialgebraic sets*. Math. Ann. 289 (1991), no. 2, 203–206.

[Schm_2] K. Schmüdgen, *On the moment problem of closed semi-algebraic sets*. J. Reine Angew. Math. 558 (2003), 225–234.

[Schw_1] M. Schweighofer, *Iterated rings of bounded elements and generalisations of Schmüdgen's Positivstellensatz*. J. Reine Angew. Math. 554, 19–45 (2003)

[Schw_2] M. Schweighofer, *On the complexity of Schmüdgen's Positivstellensatz*. J. Complexity 20 (2004), 529–543.

[Schw_3] M. Schweighofer, *Optimization of polynomials on compact semialgebraic sets*. SIAM J. Optim. 15 (2005), no. 3, 805–825.

[Schw_4] M. Schweighofer, *Global optimization of polynomials using gradient tentacles and sums of squares*. SIAM J. Optim. 17 (2006), no. 3, 920–942.

[ShU] I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, *The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables*. J. Amer. Math. Soc. **17** (2003), 197–227 (electronic).

[Sie_1] D. Siersma, *Singularities of functions on boundaries, corners, etc*. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 32, no. 125, 119–127 (1981).

[Sie_2] D. Siersma, *Singularities with critical locus a 1-dimensional complete intersection and transversal type A_1*. Topology Appl. 27, no. 1, 51–73 (1987).

[Sim] L. Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems*. Ann. of Math. (2) 118 (1983), no. 3, 525–571.

[Sk] G. Skalski, *On analytic equivalence of functions at infinity*. Bull. Sci. Math. 135 (2011), no. 5, 517–530.

[Sm] M. K. Smith, *Stably tame automorphisms*. J. Pure and Appl. Algebra **58** (1989), 209–212.

[So] P. Solernó, *Effective Łojasiewicz inequalities in semialgebraic geometry*. Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. 2 (1991), no. 1, 2-14.

[St] Y. Stein, *On linear differential operators related to the Jacobian Conjecture*. J. Pure Appl. Algebra 57 (1989), 175–186.

[Ta1] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1948.

[Ta2] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, 2nd ed., University of California Press, Berkeley and Los Angeles, CA, 1951.

[Te] B. Teissier, *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*. Invent. Math. 40 (1977), no. 3, 267–292.

[Th] R. Thom, *La stabilité topologique des applications polynomiales*. Enseignement Math. (2), 8 (1962), 24–33.

[To] J.C. Tougeron, *Ideaux de Fonctions Differentiables*. Ergebnisse, Band 71 Springer-Verlag, New York, 1972.

[Tw] P. Tworzewski, *Intersection theory in complex analytic geometry*. Ann. Polon. Math. 62 (1995), 177–191.

[Va] A. N. Varchenko, *Theorems on topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings*. Math. USSR Izv. 6 (1972), 949–1008.

[Ve] J. L. Verdier, *Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard*. Invent. Math. 36 (1976), 295–312.

[Wa] A. H. Wallace, *Linear sections of algebraic varieties*. Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/1971), 1153–1162.

[Wh] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*. Ann. of Math. 81 (1965), 496–549.

[Wr] D. Wright, *On the Jacobian Conjecture*. Illinois J. math. 25 (1981), 423–440.

[Xu] Xu, Xu, *C^0-sufficiency, Kuiper-Kuo and Thom conditions for non-isolated singularity*. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 23, no. 7, 1251–1256 (2007).

[YC] Y. Yomdin, G. Comte, *Tame geometry with applications in smooth analysis*. Springer LNM 1834 (2004).

Osiągnięcia w zakresie opieki naukowej i kształcenia młodej kadry

Postępowania o nadanie stopień doktora

Zakończone nadaniem stopnia doktora przewodach doktorskich, w których Stanisław Spodzieja uczestniczył w charakterze promotora

1. dr Skalski Grzegorz, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia 2007.
Tytuł rozprawy: *Nierówność Łojasiewicza a analityczna równoważność funkcji w nieskończoności.*

2. dr Osińska-Ulrych Beata, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia 2008.
Tytuł rozprawy: *O rozszerzaniu odwzorowań regularnych z zachowaniem wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności.*

3. dr Michalska Maria, Uniwersytet Łódzki, Uniwersytet Sabaudzki (doktorat w trybie cotutelle), rok uzyskania stopnia 2012. Ze strony francuskiej z Uniwersytetu Sabaudzkiego promotorem był prof. Krzysztof Kurdyka.
Tytuł rozprawy: *Algebras of bounded polynomials on unbounded semialgebraic sets.*

4. dr Różycki Adam, Uniwersytet Łódzki, rok uzyskania stopnia 2014.
Tytuł rozprawy: *Efektywna charakteryzacja zbioru odwzorowań liniowych definiujących krotność niewłaściwego zera odwzorowania wielomianowego.*

Otwarte przewody doktorskie, w których Stanisław Spodzieja uczestniczy w charakterze promotora

1. mgr Migus Piotr, Uniwersytet Łódzki, przewód otwarty w 2013 roku,
Temat rozprawy: *Lokalna równoważność klasy C^r* – złożona praca doktorska.

2. mgr Szlachcińska Anna, Uniwersytet Łódzki, otwarty przewód doktorski w 2013 roku,
Temat rozprawy: *Wykładnik Łojasiewicza zbiorów i odwzorowań semialgebraicznych.*

3. mgr Klepczarek Michał, Uniwersytet Łódzki, otwarty przewód doktorski w 2014 roku,
Temat rozprawy: *Trywializacja funkcji analitycznej na hiperpowierzchni.*

Rozprawy doktorskie, w których Stanisław Spodzieja jest opiekunem

1. mgr Gala-Jaskórzyńska Aleksandra, Uniwersytet Łódzki,

2. mgr Kuta Katarzyna, Uniwersytet Łódzki.

Sporządzone recenzje w przewodach doktorskich, postępowaniach habilitacyjnych lub przewodach habilitacyjnych

Sporządzone recenzje w postępowaniach habilitacyjnych:

1. Jasiczak Michał, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu – recenzent 2013 r.
Dzieło: *Problem podzielności i interpolacji dla funkcji holomorficznych wielu zmiennych.*

2. Białas-Cież Leokadia, Uniwersytet Jagielloński – recenzent 2014r.
Dzieło: *Wybrane nierówności wielomianowe w kontekście funkcji Greena.*

3. Kosiński Łukasz, Uniwersytet Jagielloński – recenzent 2016 r.
Dzieło: *Interpolacyjne problemy Nevanlinny-Picka.*

Sporządzone recenzje w przewodach doktorskich:

1. Brzostowski Szymon, Uniwersytet Łódzki - recenzent 2008 r.
Rozprawa pod tytułem *Pierwiastki aproksymatywne wielomianów.*

2. Kowalska Agnieszka, Uniwersytet Jagielloński – recenzent 2008 r.
Rozprawa pod tytułem: *Aproksymacja wielomianowa na zbiorach semialgebraicznych.*

3. Oleksik Grzegorz, Uniwersytet Łódzki - recenzent 2011 r.
Rozprawa pod tytułem *Wykładnik Łojasiewicza osobliwości niezdegenerowa- nych.*

4. Antoniewicz Anna, Uniwersytet Jagielloński – recenzent 2011 r.
Rozprawa pod tytułem *O pewnych powierzchniach z podzielnymi zbiorami osobliwości.*

5. Walewska Justyna, Uniwersytet Łódzki - recenzent 2012 r.
Rozprawa pod tytułem *Liczby Milnora w rodzinach osobliwości niezdegenerowanych krzywych płaskich.*

Pozostałe osiągnięcia w zakresie kształcenia młodej kadry

Opublikowałem na stronie internetowej Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ, podręcznik [49] do wykładu z Analizy Matematycznej 1 i 2 (416 stron). Obejmuje on swym zakresem wykład z analizy matematycznej jednowymiarowej. Pierwsza wersja tego podręcznika [25] została opublikowana na stronie internetowej Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ przed habilitacją. Obecna wersja jest wersją poprawioną i poszerzoną. Dodano w niej paragraf o iloczynach nieskończonych; rozwinięto rozdział o szeregach Fouriera; podano informacje i liczbach zespolonych, gdzie udowodniono zasadnicze twierdzenie algebry oraz przestępność liczb π i e. Uzupełniono również zadania po każdym rozdziale.

Działalność popularyzująca naukę

W ramach działalności popularyzującej naukę, wspólnie z T. Krasińskim opracowaliśmy i wydaliśmy dzieła wybrane prof. Z. Charzyńskiego (patrz pozycja [42] w spisie publikacji).

Zorganizowałem cztery obozy naukowe dla studentów Wydziału Matematyki i Informatyki UŁ, w ramach projektów Kierunki Zamawiane: Bukowina Tatrzańska, 06.07 - 15.07.2010 r.; Szklarska Poręba, 08.07 - 17.07.2011 r.; Szczyrk, 05.07 - 14.07.2012 r.; Szczyrk, 11.07 - 20.07.2013 r.

Wygłosiłem referaty na konferencjach i obozach naukowych:

1. Studencki obóz naukowy, Bukowina Tatrzańska 06.07-15.07.2010.
Referat pod tytułem: *O układach równań i nierówności wielomianowych.*

2. Studencki obóz naukowy, Szczyrk 11.07-20.07.2013.
Referat pod tytułem: *Ciała rzeczywiste.*

3. Konferencja Horizons in mathematics - WCMCS conference for students, Będlewo 17.03-21.03. 2014.
Referat pod tytułem: *Wielomiany wypukłe i aproksymacja sumami kwadratów.*

Studenci naszego wydziału organizują coroczne konferencje Matematyka ubezpieczeń i inwestycji, na które przygotowują referaty oparte na ich własnych badaniach. Po kilku tych konferencjach zmobilizowałem studentów do napisania artykułów związanych z ich badaniami naukowymi i tematem konferencji. Artykuły te opracowałem, i wydałem wspólnie z A. Rogalą (patrz [43]) w Wydawnictwie UŁ jako materiały pokonferencyjne.

Działalność organizacyjna

Od 2010 roku pełnię funkcję kierownika Katedry Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

W kadencjach 2008-2012 i 2012-2016 pełniłem funkcję Prodziekan ds. studenckich na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ.

Od 2010 roku jestem organizatorem corocznych konferencji krajowych: Konferencja Szkoleniowa z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej na Uniwersytecie Łódzkim. Do dzisiaj odbyło się 37 konferencji.

Nawiązałem bezpośrednią współpracę naukową z Uniwersytetem Sabaudzkim Mont Blanc (Francja). Umowa została podpisana w 2008 roku. W ramach tej współpracy wypromowano jeden doktorat w systemie cotutelle i powstał cykl prac naukowych dotyczących własności metrycznych zbiorów semialgebraicznych i zastosowań w optymalizacji.

Kierowałem trzema projektami Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki w latach 2008-2015 w ramach tak zwanych Kierunków Zamawianych.