

Konferencja Geometria Analityczna i Algebraiczna

Analytic and Algebraic Geometry Conference

Konfiguracja Yoshinagi w kontekście problemu zawierania

Maciej Zięba

Praca wspólna z M. B. Tombarkiewicz

On Yoshinaga's arrangement of lines and the containment problem - dostępna na [arxiv](#)

10 Stycznia, 2020





1. Wprowadzenie do problemu zawierania



1. Wprowadzenie do problemu zawierania

2. Konstrukcja Yoshinagi



1. Wprowadzenie do problemu zawierania

2. Konstrukcja Yoshinagi

3. Niezawieranie

Twierdzenie (Nagata-Zariski)

Niech $I \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_N]$ będzie ideałem radykalnym i niech $V(I)$ będzie jego zbiorem zer. Wtedy elementami $I^{(m)}$ są wszystkie wielomiany znikające wzdłuż $V(I)$ z krotnością co najmniej m .

Definicja

Niech $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_s\}$ będzie zbiorem wzajemnie różnych punktów w \mathbb{P}^N . Przez $I(P_i)$ oznaczamy ideał wielomianów znikających w punkcie P_i .

Definiujemy ideał zbioru punktów \mathcal{P} jako

$$I(\mathcal{P}) = I(P_1) \cap \dots \cap I(P_s).$$

Wówczas m – tą potęgą symboliczną $m \geq 1$ ideału $I(\mathcal{P})$ nazywamy ideał

$$I(\mathcal{P})^{(m)} = I(P_1)^m \cap \dots \cap I(P_s)^m$$



Problem

Niech $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie jednorodnym ideałem radykalnym, dla jakich m i r zachodzi zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r?$$



Problem

Niech $I \subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie jednorodnym ideałem radykalnym, dla jakich m i r zachodzi zawieranie

$$I^{(m)} \subset I^r?$$

Twierdzenie (Ein-Lazarsfeld-Smith, Huneke-Hochster)

Niech $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem jednorodnym, o tej własności, że każda składowa zbioru zer $V(I)$ ma kowymiar co najwyżej e . Wtedy zachodzi inkluzja

$$I^{(m)} \subset I^r$$

pod warunkiem, że $m \geq er$.



W szczególności dla przypadku płaszczyzny rzutowej \mathbb{P}^2 fakt ten mówi, że dla skończonych zbiorów wzajemnie różnych punktów $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_s\}$ oraz stowarzyszonych z nimi ideałów radykalnych I zawsze zachodzi

$$I^{(2r)} \subset I^r.$$

W 2006 roku Huneke zadał pytanie czy zachodzi zawieranie dla większego ideału.

Problem (Huneke)

Niech $\mathcal{P} \subset \mathbb{P}^2$ będzie skończonym zbiorem wzajemnie różnych punktów oraz I stowarzyszonym ideałem radykalnym. Czy zachodzi zawieranie

$$I^{(3)} \subset I^2?$$



Huneke zauważył, że zawieranie zachodzi gdy ciało ma charakterystykę 2, jednak nie zachodzi w ogólności. Pierwszy kontrprzykład podali Dumnicki, Szemberg i Tutaj-Gasińska bazując na konfiguracji dualnej Hessego dla 9 prostych i 12 punktów potrójnych¹.

Głównym celem tej prezentacji jest dodanie do listy istniejących kontrprzykładów kolejnego, bazującego na konstrukcji Yoshinagi, będącego układem 18 prostych.

¹Dumnicki, M., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.: Counterexamples to the $I^{(3)} \subset I^2$ containment. *J. Alg.* 393: 24–29 (2013).



Twierdzenie

Niech \mathcal{P} będzie zbiorem punktów osobliwych konstrukcji Yoshinagi 18 prostych oraz niech I będzie stowarzyszonym ideałem radykalnym. Wtedy

$$I^{(3)} \not\subseteq I^2.$$

Niech I_3 będzie ideałem radykalnym podzbioru punktów potrójnych. Wtedy nadal

$$I_3^{(3)} \not\subseteq I_3^2.$$



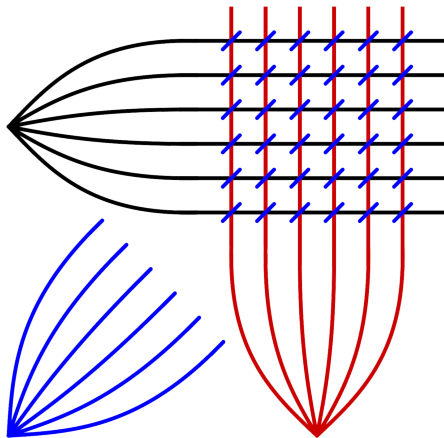
Zaczynamy od układu Fermata 18-stu prostych, który jest zadany przez zera wielomianu

$$Q(x, y, z) = (x^6 - y^6)(y^6 - z^6)(z^6 - x^6).$$

Zaczynamy od układu Fermata 18-stu prostych, który jest zadany przez zera wielomianu

$$Q(x, y, z) = (x^6 - y^6)(y^6 - z^6)(z^6 - x^6).$$

Sąsiedni obrazek pokazuje pomysł stojący za konstrukcją, nie można go zrealizować nad liczbami rzeczywistymi ze względu na słynne twierdzenie Sylvester-Gallai.



Teraz przedstawimy zarys konstrukcji Yoshinagi, który oparty jest na interesującej deformacji.

Niech $c \in \mathbb{R}$ będzie dużą liczbą rzeczywistą (dla nas wystarczy wziąć $c = 15$).

Ustalamy $a := e^{\frac{2\pi i}{6}}$

Teraz wykonujemy odpowiednie przekształcenia trzech pęków prostych, z których każdy składa się z 6 prostych przecinających się jednocześnie w jednym punkcie - te punkty są trzema „reflektorami” w układzie Fermata. Co więcej, ta deformacja jest dość wymagająca z uwagi na fakt, że będziemy utrzymywać *siatkę* posiadającą 36 potrójnych punktów, jak w konstrukcji Fermata.

Naszym punktem wyjścia jest wielomian, który określa sześciokrotny punkt przecięcia, weźmy $P_1(x, y, z) = x^6 - y^6$. Deformacja jest zadana następującym wielomianem

$$P'_1(x, y, z) = (x^3 - y^3)(x + y - cz)(ax + a^5y + cz)(a^5x + ay + cz),$$

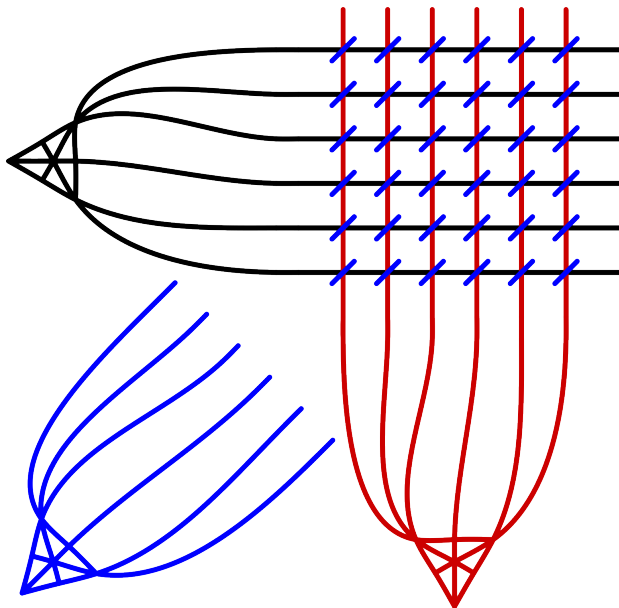
łatwo zauważyć, że P' definiuje układ, który może być postrzegany jako układ symplecjalny $\mathcal{A}_1(6)$ mający dokładnie 6 prostych, 4 punkty potrójnie i 3 punkty podwójne. Bezpośrednie obliczenia prowadzą do

$$P'_1(x, y, z) = x^6 - y^6 + 3cx^4yz - 3cxy^4z - c^3x^3z^3 + c^3y^3z^3$$



Rozważmy cykliczną permutację zmiennych $\tau(x, y, z) = (y, z, x)$, wtedy definiujemy nowe wielomiany w $\mathbb{C}[x, y, z]$ względem działania τ -permutacji, mianowicie $P'_2(x, y, z) = \tau P'_1 = P'_1(y, z, x)$ oraz $P'_3(x, y, z) = \tau^2 P'_1 = P'_1(z, x, y)$.

Niech $P := P'_1 P'_2 P'_3$. Okazuje się, że P rozkłada się na czynniki liniowe i daje układ prostych Yoshinagi.



Prezentujemy równania wszystkich 18 prostych (biorąc $c = 15$).

$$l_1 : x - y$$

$$l_2 : x + ay$$

$$l_3 : x + (-a + 1)y$$

$$l_4 : x - 15y + z$$

$$l_5 : x - \frac{1}{15}y - \frac{1}{15}z$$

$$l_6 : x + y - 15z$$

$$l_7 : x + \frac{1}{15}ay + \left(-\frac{1}{15}a + \frac{1}{15}\right)z$$

$$l_8 : x + \left(-\frac{1}{15}a + \frac{1}{15}\right)y + \frac{1}{15}az$$

$$l_9 : x + (-15a + 15)y - az$$

$$l_{10} : x + 15ay + (a - 1)z$$

$$l_{11} : x + (a - 1)y + 15az$$

$$l_{12} : x - ay + (-15a + 15)z$$

$$l_{13} : x - z$$

$$l_{14} : x + (-a + 1)z$$

$$l_{15} : x + az$$

$$l_{16} : y - z$$

$$l_{17} : y + (-a + 1)z$$

$$l_{18} : y + az$$

Na poprzednim rysunku prezentowaliśmy pomysł stojący za konstrukcją Yoshinagi, pamiętajmy, że takiego układu nie można skonstruować nad \mathbb{R} .

Teraz opiszemy schemat dowodzenia niezawierania. W większości przypadków mamy następującą drogę postępowania:

- Rozważmy układ prostych $\mathcal{A} = \{\ell_1, \dots, \ell_d\} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ mających pewne ekstremalne właściwości (w sensie geometrii lub kombinatoryki), dla nas najważniejsze jest to, że dana konfiguracja ma dużą liczbę potrójnych punktów przecięcia w porównaniu z innymi punktami osobliwymi.
- Bierzymy formę jednorodną, która jest iloczynem równań definiujących proste tj, jeżeli $\ell_i = V(f_i)$, wtedy $F = f_1 \cdot \dots \cdot f_d$. Pokazujemy, że $F \in I^{(3)} \setminus I^2$, gdzie I jest stowarzyszonym ideałem radykalnym podzbioru punktów osobliwych \mathcal{A} – w większości przypadków I opisuje zbiór punktów potrójnych lub punktów przecięcia z większą krotnością.



Teraz opiszemy schemat dowodzenia niezawierania. W większości przypadków mamy następującą drogę postępowania:

- Rozważmy układ prostych $\mathcal{A} = \{\ell_1, \dots, \ell_d\} \subset \mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ mających pewne ekstremalne właściwości (w sensie geometrii lub kombinatoryki), dla nas najważniejsze jest to, że dana konfiguracja ma dużą liczbę potrójnych punktów przecięcia w porównaniu z innymi punktami osobliwymi.
- Bierzymy formę jednorodną, która jest iloczynem równań definiujących proste tj, jeżeli $\ell_i = V(f_i)$, wtedy $F = f_1 \cdot \dots \cdot f_d$. Pokazujemy, że $F \in I^{(3)} \setminus I^2$, gdzie I jest stowarzyszonym ideałem radykalnym podzbioru punktów osobliwych \mathcal{A} – w większości przypadków I opisuje zbiór punktów potrójnych lub punktów przecięcia z większą krotnością.

W dalszej części przez I oznaczamy ideał radykalny wszystkich 57 punktów osobliwych, oraz przez I_3 ideał radykalny wszystkich punktów potrójnych w konfiguracji Yoshinagi.



Tutaj zastosowaliśmy nieco inną strategię, a mianowicie efektywnie wyliczamy generatory drugiej potęgi algebraicznej i trzeciej potęgi symbolicznej danego ideału, redukujemy wszystkie generatory $I^{(3)}$ w stosunku do I^2 , i wyszukujemy konkretny element, który znajduje się w $I^{(3)} \setminus I^2$.

Proste sprawdzenie wyżej wymienionego elementu ujawnia, że jest to iloczyn (z dokładnością do niezerowej stałej) równań 18-stu prostych, definiujących układ Yoshinagi i równania

$$x^3 + y^3 + z^3 - \frac{3379}{225}xyz$$

opisującego gładką krzywą stopnia 3.



Ta krzywa eliptyczna ma duże znaczenie w kontekście braku zawierania, ponieważ przechodzi przez wszystkie 9 punktów podwójnych z krotnością 1. Co więcej, krzywa ta jest elementem pęku Hessego² z $(\mu : \lambda) = (1 : -\frac{3379}{225})$.







Z drugiej strony okazuje się, że w przypadku I_3 możemy pokazać, że element znajdujący się w $I_3^{(3)} \setminus I_3^2$ jest zadany dokładnie przez iloczyn 18 równań prostych, a ten scenariusz pasuje do przedstawionego schematu. Wszystkie obliczenia są wykonywane przy użyciu programu do obliczeń symbolicznych *Singular*.







²Artebani, M., Dolgachev, I.: The Hesse pencil of plane cubic curves. *Enseign. Math.* (2) 55, No. 3-4: 235–273 (2009).

Uwaga

Warto wspomnieć, że podobne zjawisko zaobserwowali Pokora i Roé dla konfiguracji Kleina 21 stożkowy oraz 21 prostych³. Dokładniej, układ punktów osobliwych składa się z 189 poczwórnych punktów, 252 potrójnych punktów i $42 = 21 \cdot 2$ podwójnych punktów przecięcia - te podwójne punkty są dokładnie przecięciami między parami prostych i stożkowych. Jeśli przez I oznaczmy ideał radykalny wszystkich 483 punktów osobliwych, to element niezerowy z $I^{(3)} \setminus I^2$ jest iloczynem równań 21 prostych, 21 stożkowych i gładkiej krzywej stopnia 6 przechodzącej przez 42 punkty podwójne - jest to Hesjan kwartyki Kleina.

³Pokora, P., Roé. J.: The 21 reducible polars of Klein's quartic. *Exp. Math.*, <https://doi.org/10.1080/10586458.2018.1488155>.

-  Artebani, M., Dolgachev, I.: The Hesse pencil of plane cubic curves. *Enseign. Math.* (2) 55, No. 3-4: 235–273 (2009).
-  Bauer, Th, Di Rocco, S., Harbourne, B., Huizenga, J., Lundman, A., Pokora, P., Szemberg, T.: Bounded negativity and arrangements of lines. *Int. Math. Res. Notices* 2015: 9456 – 9471 (2015).
-  Decker, W.; Greuel, G.-M.; Pfister, G.; Schönemann, H.: Singular 4-1-2 — A computer algebra system for polynomial computations.
<http://www.singular.uni-kl.de> (2019).
-  A. Dimca, Monodromy of triple point line arrangements. *Advanced Studies in Pure Mathematics* 66, 2015. *Singularities in Geometry and Topology 2011* pp. 71-80
-  Dumnicki, M., Harbourne, B., Nagel, U., Seceleanu, A., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.: Resurgences for ideals of special point configurations in \mathbb{P}^N coming from hyperplane arrangements. *J. Algebra* 443: 383–394 (2015).
-  Czapliński, A., Główka, A., Malara, G., Lampa-Baczynska, M., Łuszcz-Świdecka, P., Pokora, P. and Szpond, J.: A counterexample to the containment $I^{(3)} \subset I^2$ over the reals. *Adv. Geom.* 16: 77–82 (2016).

-  Dumnicki, M., Szemberg, T., Tutaj-Gasińska, H.: Counterexamples to the $I^{(3)} \subset I^2$ containment. *J. Alg.* 393: 24–29 (2013).
-  Ein, L., Lazarsfeld, R., Smith, K.: Uniform bounds and symbolic powers on smooth varieties. *Invent. Math.* 144: 241–252 (2001).
-  Harbourne, B., Seceleanu, A.: Containment counterexamples for ideals of various configurations of points in \mathbb{P}^N . *J. Pure Appl. Algebra* 219: 1062–1072 (2015).
-  Hochster, M., Huneke, C.: Comparison of symbolic and ordinary powers of ideals. *Invent. Math.* 147: 349–369 (2002).
-  Ma, L., Schwede, K.: Perfectoid multiplier/test ideals in regular rings and bounds on symbolic powers. *Invent. Math.* 214(2): 913–955 (2018).
-  Pokora, P., Roé, J.: The 21 reducible polars of Klein's quartic. *Exp. Math.*, <https://doi.org/10.1080/10586458.2018.1488155>.

Dziękuję za uwagę!