

Stałe Waldschmidta symetrycznych układów punktów

Paulina Wiśniewska

Uniwersytet Pedagogiczny
im. Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie
INSTYTUT MATEMATYKI

Łódź, 12 stycznia 2022

Definicja (Potęga symboliczna)

Niech $\mathcal{I} \subset R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem jednorodnym. Dla nieujemnej liczby całkowitej m , definiujemy m -tą potęgą symboliczną ideału \mathcal{I} jako

$$\mathcal{I}^{(m)} = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \cap \left(\bigcap_{Q \in \text{Ass}(\mathcal{I})} \mathcal{I}_Q^m \right),$$

gdzie $\text{Ass}(\mathcal{I})$ oznacza zbiór wszystkich ideałów pierwszych stowarzyszonych z \mathcal{I} , a \mathcal{I}_Q lokalizację \mathcal{I} w Q .

Przykład

Rozważmy 3 niewspółliniowe punkty $P_1 = [1 : 0 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : 0]$, $P_3 = [0 : 0 : 1]$ w \mathbb{P}^2 . Oznaczmy przez \mathcal{I} ideał generowany przez te punkty, wtedy

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(P_1) \cap \mathcal{I}(P_2) \cap \mathcal{I}(P_3) = \langle y, z \rangle \cap \langle x, z \rangle \cap \langle x, y \rangle = \langle yz, xz, xy \rangle$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^2 &= \langle x^2y^2, x^2yz, xy^2z, x^2z^2, xyz^2, y^2z^2 \rangle = \\ &= \langle x, y \rangle^2 \cap \langle x, z \rangle^2 \cap \langle y, z \rangle^2 \cap \langle x^2, y^2, z^2 \rangle. \end{aligned}$$

Otrzymujemy

$$\text{Ass}(\mathcal{I}) = \{\mathcal{I}(P_1), \mathcal{I}(P_2), \mathcal{I}(P_3)\} \subsetneq \text{Ass}(\mathcal{I}^2) = \text{Ass}(\mathcal{I}) \cup \{\langle x, y, z \rangle\}.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(2)} &= \langle x, y \rangle^2 \cap \langle x, z \rangle^2 \cap \langle y, z \rangle^2 = \\ &\langle z^2, yz, y^2 \rangle \cap \langle z^2, xz, x^2 \rangle \cap \langle y^2, xy, x^2 \rangle = \\ &\langle xyz, x^2y^2, x^2z^2, y^2z^2 \rangle. \end{aligned}$$

Rozważamy w tej prezentacji tylko $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$.

Twierdzenie (Nagata-Zariski)

Niech $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem radykalnym i niech $V(\mathcal{I})$ będzie jego zbiorem zer. Wtedy elementami $\mathcal{I}^{(m)}$ są wszystkie wielomiany znikające wzdłuż $V(\mathcal{I})$ z krotnością co najmniej m .

Twierdzenie (Nagata-Zariski)

Niech $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ będzie ideałem radykalnym i niech $V(\mathcal{I})$ będzie jego zbiorem zer. Wtedy elementami $\mathcal{I}^{(m)}$ są wszystkie wielomiany znikające wzdłuż $V(\mathcal{I})$ z krotnością co najmniej m .

Definicja

Niech $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_s\}$ będzie zbiorem parami różnych punktów w \mathbb{P}^N . Symbolem $\mathcal{I}(P_i)$ będziemy oznaczać ideał wszystkich wielomianów znikających w punkcie P_i .

Wówczas ideał zbioru punktów \mathcal{P} można przedstawić jako

$$\mathcal{I}(\mathcal{P}) = \mathcal{I}(P_1) \cap \dots \cap \mathcal{I}(P_s).$$

W tej sytuacji dla m -tej potęgi symbolicznej $m \geq 1$ ideału $\mathcal{I}(\mathcal{P})^{(m)}$ mamy wzór

$$\mathcal{I}(\mathcal{P})^{(m)} = \mathcal{I}(P_1)^m \cap \dots \cap \mathcal{I}(P_s)^m.$$

Definicja

Niech \mathcal{I} będzie dowolnym jednorodnym ideałem. Stopniem inicjującym $\alpha(\mathcal{I})$ nazywamy liczbę

$$\alpha(\mathcal{I}) := \min\{\deg f : 0 \neq f \in \mathcal{I}\}.$$

Jest to najmniejszy stopień niezerowego wielomianu w \mathcal{I} .

Definicja

Niech \mathcal{I} będzie dowolnym jednorodnym ideałem. Stopniem inicjującym $\alpha(\mathcal{I})$ nazywamy liczbę

$$\alpha(\mathcal{I}) := \min\{\deg f : 0 \neq f \in \mathcal{I}\}.$$

Jest to najmniejszy stopień niezerowego wielomianu w \mathcal{I} .

Przykład

Rozważmy 3 niewspółliniowe punkty $P_1 = [1 : 0 : 0]$, $P_2 = [0 : 1 : 0]$, $P_3 = [0 : 0 : 1]$ w \mathbb{P}^2 . Oznaczmy przez \mathcal{I} ideał generowany przez te punkty, wtedy

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}(P_1) \cap \mathcal{I}(P_2) \cap \mathcal{I}(P_3) = \langle yz, xz, xy \rangle$$

oraz $\alpha(\mathcal{I}) = 2$, $\alpha(\mathcal{I}^{(2)}) = 3$.

Definicja

Niech dany będzie ideał jednorodny \mathcal{I} . Stałą Waldschmidta nazywamy liczbę rzeczywistą

$$\hat{\alpha}(\mathcal{I}) = \inf \frac{\alpha(\mathcal{I}^{(m)})}{m}.$$

- Notacja stałej Waldschmidta ewoluowała na przestrzeni lat;
- W latach 80 Chudnovsky studiował stałą Waldschmidta;
- W algebrze przemiennej stałe Waldschmidta zostały wprowadzone w pracach Bocci, Harbourne ^{1 2}, Dumnicki, Szemberg i Tutaj-Gasińska ³.

¹Cristiano Bocci and Brian Harbourne. “Comparing powers and symbolic powers of ideals”. In: *J. Algebraic Geom.* 19.3 (2010).

²Cristiano Bocci and Brian Harbourne. “The resurgence of ideals of points and the containment problem”. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010).

³M. Dumnicki et al. “Linear subspaces, symbolic powers and Nagata type conjectures”. In: *Adv. Math.* 252 (2014).

Stałe Waldschmidta są znane tylko w niewielu przypadkach.

Stałe Waldschmidta są znane tylko w niewielu przypadkach.
Motywacją powstającej mojej rozprawy doktorskiej pt.
"Asymptotic invariants of configurations of points determined
by complex reflection groups" jest powiększenie listy znanych
przypadków.

15 punktów konfiguracji H_3

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$P_1 = [1 : 0 : 0]$$

$$P_2 = [0 : 1 : 0]$$

$$P_3 = [0 : 0 : 1]$$

$$P_4 = [1 : \varphi : \varphi^2]$$

$$P_5 = [-1 : \varphi : \varphi^2]$$

$$P_6 = [1 : -\varphi : \varphi^2]$$

$$P_7 = [1 : \varphi : -\varphi^2]$$

$$P_8 = [\varphi : -\varphi^2 : 1]$$

$$P_9 = [-\varphi : \varphi^2 : 1]$$

$$P_{10} = [\varphi : \varphi^2 : -1]$$

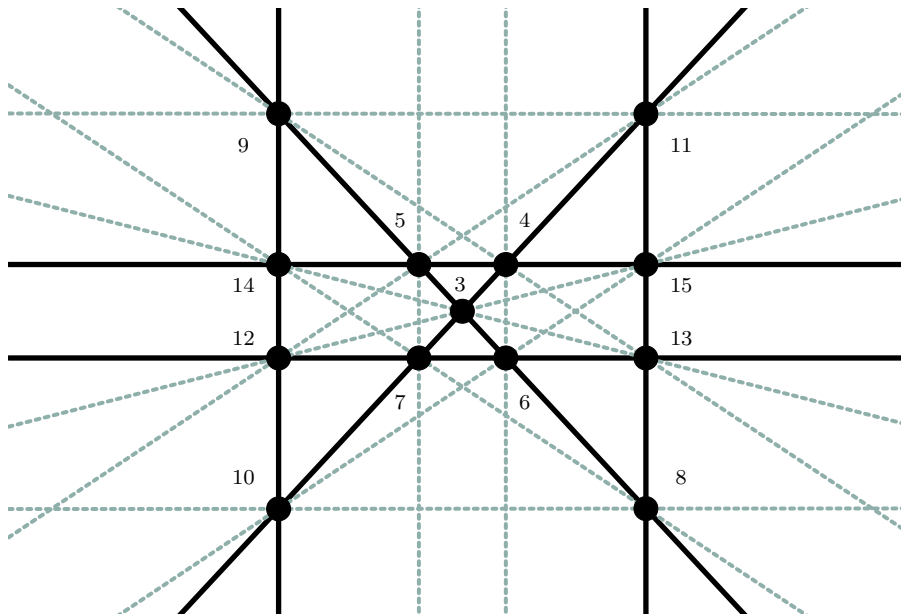
$$P_{11} = [\varphi : \varphi^2 : 1]$$

$$P_{12} = [\varphi^2 : 1 : -\varphi]$$

$$P_{13} = [\varphi^2 : -1 : \varphi]$$

$$P_{14} = [-\varphi^2 : 1 : \varphi]$$

$$P_{15} = [\varphi^2 : 1 : \varphi]$$



$$\begin{aligned} L_1 : y - (\varphi - 1)z = 0, & \quad L_2 : y + (\varphi - 1)z = 0, & \quad L_3 : x - \varphi z = 0, \\ L_4 : x + \varphi z = 0, & \quad L_5 : x - (\varphi - 1)y = 0, & \quad L_6 : x + (\varphi - 1)y = 0. \end{aligned}$$

Twierdzenie (Stała Waldschmidta dla konfiguracji H_3)

$$\hat{\alpha}(\mathcal{I}_{H_3}) = 3.$$

Definicja

Niech $m \in \mathbb{Z}$ i $m \geq 2$. Mówimy, że zbiór

$$\{\ell_i \cap \ell_j : 1 \leq i < j \leq m\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

jest konfiguracją gwiazdzistą jeżeli składa się z $\binom{m}{2}$ różnych punktów.

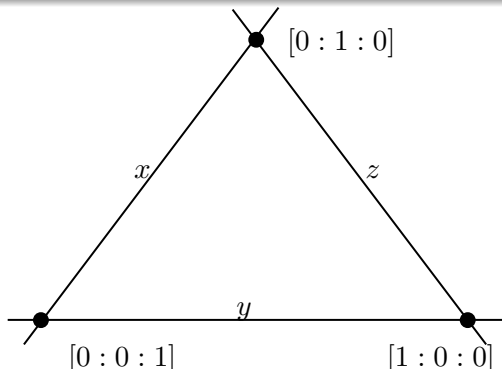
Konfiguracja gwiazdzista dla \mathbb{P}^2

Definicja

Niech $m \in \mathbb{Z}$ i $m \geq 2$. Mówimy, że zbiór

$$\{\ell_i \cap \ell_j : 1 \leq i < j \leq m\} \subseteq \mathbb{P}^2$$

jest konfiguracją gwiazdzistą jeżeli składa się z $\binom{m}{2}$ różnych punktów.



Przykład

Konfiguracja H_3 jest konfiguracją gwiazdzistą.

Przykład

Konfiguracja H_3 jest konfiguracją gwiazdzistą.

Każdy punkt ze zbioru $\binom{6}{2} = 15$ punktów jest przecięciem pewnej pary spośród 6 prostych.

60 punktów konfiguracji H_4

$$P_1 = [1 : 0 : 0 : 0]$$

$$P_2 = [0 : 1 : 0 : 0]$$

$$P_3 = [0 : 0 : 1 : 0]$$

$$P_4 = [0 : 0 : 0 : 1]$$

$$P_5 = [1 : 1 : 1 : 1]$$

$$P_6 = [1 : 1 : 1 : -1]$$

$$P_7 = [1 : 1 : -1 : 1]$$

$$P_8 = [1 : 1 : -1 : -1]$$

$$P_9 = [1 : -1 : 1 : 1]$$

$$P_{10} = [1 : -1 : 1 : -1]$$

$$P_{11} = [1 : -1 : -1 : 1]$$

$$P_{12} = [1 : -1 : -1 : -1]$$

⋮

$$P_{49} = [\varphi : 1 : \varphi^2 : 0]$$

$$P_{50} = [\varphi : 1 : -\varphi^2 : 0]$$

$$P_{51} = [\varphi : -1 : \varphi^2 : 0]$$

$$P_{52} = [\varphi : -1 : -\varphi^2 : 0]$$

$$P_{53} = [\varphi^2 : \varphi : 1 : 0]$$

$$P_{54} = [\varphi^2 : \varphi : -1 : 0]$$

$$P_{55} = [\varphi^2 : -\varphi : 1 : 0]$$

$$P_{56} = [\varphi^2 : -\varphi : -1 : 0]$$

$$P_{57} = [1 : \varphi^2 : \varphi : 0]$$

$$P_{58} = [1 : \varphi^2 : -\varphi : 0]$$

$$P_{59} = [1 : -\varphi^2 : \varphi : 0]$$

$$P_{60} = [1 : -\varphi^2 : -\varphi : 0]$$

???

???

Twierdzenie (Stała Waldschmidta dla konfiguracji H_4)

$$\hat{\alpha}(\mathcal{I}_{H_4}) \leq \frac{19}{5}.$$

- [1] Cristiano Bocci and Brian Harbourne. “Comparing powers and symbolic powers of ideals”. In: *J. Algebraic Geom.* 19.3 (2010).
- [2] Cristiano Bocci and Brian Harbourne. “The resurgence of ideals of points and the containment problem”. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 138 (2010).
- [3] Roberta Di Gennaro et al. *Companion varieties for root systems and Fermat arrangements*. arXiv:2101.07346v1.
- [4] M. Dumnicki et al. “Linear subspaces, symbolic powers and Nagata type conjectures”. In: *Adv. Math.* 252 (2014).
- [5] Piotr Pokora, Tomasz Szemberg, and Justyna Szpond. *Unexpected properties of the Klein configuration of 60 points in \mathbb{P}^3* . Research in Pairs 2020, OWP-2020-19, DOI:10.14760/OWP-2020-19. URL: <http://publications.mfo.de/handle/mfo/3799>.

- [6] Paulina Wiśniewska and Maciej Zięba. “On the H_4 configuration of points in \mathbb{P}^3 ”. In: (arXiv:2107.08107).

Dziękuję za uwagę!

Twierdzenie (Stała Waldschmidta dla konfiguracji H_3)

$$\hat{\alpha}(\mathcal{I}_{H_3}) = 3.$$

Dowód. Rozważmy krzywą $L_1 \cup \dots \cup L_6$ znikającą wzdłuż każdego punktu z konfiguracji z krotnością równą 2. Stosując twierdzenie Nagata-Zariski dostajemy

$$\hat{\alpha}(\mathcal{I}) \leq 3.$$

Aby dostać ograniczenie dolne, przypuśćmy, że dla dodatniej liczby całkowitej m istnieje krzywa \mathcal{C} stopnia $3m - 1$ znikająca wzdłuż każdego z 15 punktów konfiguracji z krotnością przynajmniej m . Stosując twierdzenie Bezout'a mamy, że albo L_1 jest składową \mathcal{C} albo

$$3m - 1 = \mathcal{C}.L_1 \geq 5m,$$

co nie jest możliwe.

Ten sam argument dotyczy każdej innej prostej L_2, \dots, L_6 .

Stąd wspólna składowa zawarta jest w \mathcal{C} . W ten sposób możemy wziąć $L = L_1 + \dots + L_6$ z \mathcal{C} i otrzymujemy nową krzywą \mathcal{C}_1 z $\deg(\mathcal{C}_1) = 3m - 1 - 6$ oraz krotność \mathcal{C} w każdym z tych punktów konfiguracji H_3 wynosi przynajmniej $m - 2$.

Powtarzając ten sam argument $k \geq 2$ razy, otrzymujemy krzywą \mathcal{C}_k stopnia $3m - 1 - 6k \geq 1$ z krotnością przynajmniej $m - 2k$ w każdym z tych punktów konfiguracji H_3 . Stosując twierdzenie Bezout'a otrzymujemy

$$3m - 1 - 6k \geq 5(m - 2k),$$

co nie jest możliwe, ponieważ $m \geq 2k$ lub L jest składową \mathcal{C}_k . Ponieważ nie możemy już wyciągnąć prostej L z krzywej \mathcal{C} otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że krzywa \mathcal{C} istnieje. W związku z tym nie ma elementu w $I(H_3)^{(m)}$ stopnia mniejszego niż $3m$.

W konsekwencji stała Waldschmidta dla konfiguracji punktów H_3 jest równa 3.