Przykłady zbiorów posiadających własność geproci

Justyna Szpond
Polska Akademia Nauk i Uniwersytet Pedagogiczny

Łódź, 10 - 14 stycznia, 2022


RECEPCJA
RECEPTION

Definicja

Niezdegenerowany zbiór punktów $Z \subset \mathbb{P}^3$ ma własność (a, b)-geproci jeśli rzutowanie Z z ogólnego punktu na ogólną płaszczyznę jest zupełnym przecięciem typu (a, b).

Definicja

Niezdegenerowany zbiór punktów $Z \subset \mathbb{P}^3$ ma własność (a, b)-geproci jeśli rzutowanie Z z ogólnego punktu na ogólną płaszczyznę jest zupełnym przecięciem typu (a, b).

Definicja

Zbiór Z nazywamy (a, b)-gridem *jeśli*

- *Z zawiera ab punktów oraz,*
- *$Z = A \cap B$,*

gdzie A jest sumą $a \geqslant 2$ parami rozłącznych prostych, B jest sumą $b \geqslant a$ parami rozłącznych prostych takich, że każda prosta ze zbioru A przecina każdą prostą ze zbioru B w dokładnie jednym punkcie.

Twierdzenie

Niech Z będzie niezdegenerowanym zbiorem z własnością $(3,4)$-geproci w $\mathbb{P}^3$, wtedy

a) *Z jest $(3,4)$-gridem albo;*

b) *Z jest konfiguracją D_4.*

Zbiór D_4 zawiera nastepujące punkty:

$$\begin{array}{lll}
(0:1:1:0) & (0:1:0:-1) & (0:0:1:1) \\
(1:0:1:0) & (1:0:0:-1) & (0:0:1:-1) \\
(1:1:0:0) & (1:0:0:1) & (0:1:0:1) \\
(0:1:-1:0) & (1:0:-1:0) & (1:-1:0:0).
\end{array}$$

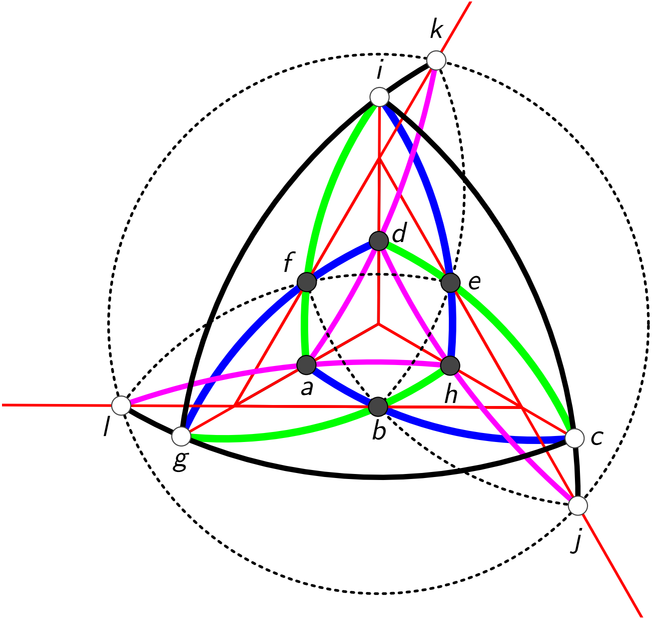
Zbiór D_4 zawiera nastepujące punkty:

$$
\begin{array}{lll}
(0:1:1:0) & (0:1:0:-1) & (0:0:1:1) \\
(1:0:1:0) & (1:0:0:-1) & (0:0:1:-1) \\
(1:1:0:0) & (1:0:0:1) & (0:1:0:1) \\
(0:1:-1:0) & (1:0:-1:0) & (1:-1:0:0).
\end{array}
$$

Zbiór D_4 leży na 4 rozłącznych prostych:

$$
\begin{aligned}
x = y - z + w = 0 \\
y = x - z + w = 0 \\
z = x - y + w = 0 \\
w = x + y + z = 0.
\end{aligned}
$$

Konfiguracja D_4



Zbiór F_4 zawiera następujące punkty

$$\begin{array}{llll}
(1:0:0:0), & (0:1:0:0), & (1:1:0:0), & (1:-1:0:0), \\
(0:0:1:0), & (0:0:0:1), & (0:0:1:1), & (0:0:1:-1), \\
(1:0:1:0), & (0:1:0:1), & (1:1:1:1), & (1:-1:1:-1), \\
(1:0:-1:0), & (0:1:0:-1), & (1:1:-1:-1), & (1:-1:-1:1), \\
(1:0:0:1), & (0:1:-1:0), & (1:1:-1:1), & (1:-1:1:1), \\
(1:0:0:-1), & (0:1:1:0), & (1:1:1:-1), & (1:-1:-1:-1)
\end{array}$$

Zbiór F_4 zawiera następujące punkty

$(1:0:0:0)$,	$(0:1:0:0)$,	$(1:1:0:0)$,	$(1:-1:0:0)$,
$(0:0:1:0)$,	$(0:0:0:1)$,	$(0:0:1:1)$,	$(0:0:1:-1)$,
$(1:0:1:0)$,	$(0:1:0:1)$,	$(1:1:1:1)$,	$(1:-1:1:-1)$,
$(1:0:-1:0)$,	$(0:1:0:-1)$,	$(1:1:-1:-1)$,	$(1:-1:-1:1)$,
$(1:0:0:1)$,	$(0:1:-1:0)$,	$(1:1:-1:1)$,	$(1:-1:1:1)$,
$(1:0:0:-1)$,	$(0:1:1:0)$,	$(1:1:1:-1)$,	$(1:-1:-1:-1)$

Zbiór F_4 leży na 6 prostych rozłącznych:

$$z = w = 0$$
$$x = y = 0$$
$$x - z = y - w = 0$$
$$x + z = y + w = 0$$
$$x - w = y + z = 0$$
$$x + w = y - z = 0.$$

Niech $\mathcal{Q}$ będzie kwadryką zdefiniowaną przez formę $xw - yz$.

$$\begin{array}{lcccc}
 & L_1 & L_2 & L_3 & L_4 \\
M_1 : & (1,1,1,1) & (1,i,1,i) & (1,-1,1,-1) & (1,-i,1,-i) \\
M_2 : & (1,1,i,i) & (1,i,i,-1) & (1,-1,i,-i) & (1,-i,i,1) \\
M_3 : & (1,1,-1,-1) & (1,i,-1,-i) & (1,-1,-1,1) & (1,-i,-1,i) \\
M_4 : & (1,1,-i,-i) & (1,i,-i,1) & (1,-1,-i,i) & (1,-i,-i,-1) \\
 & & & & \\
\ell_1 : & (1,0,0,1) & (1,0,0,i) & (1,0,0,-1) & (1,0,0,-i) \\
\ell_2 : & (0,1,1,0) & (0,1,i,0) & (0,1,-1,0) & (0,1,-i,0)
\end{array}$$

Niech K będzie zbiorem punktów:

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
$(1,1,1,1)$	$(1,i,1,i)$	$(1,-1,1,-1)$	$(1,-i,1,-i)$	$(1,0,1,0)$	$(0,1,0,1)$
$(1,1,i,i)$	$(1,i,i,-1)$	$(1,-1,i,-i)$	$(1,-i,i,1)$	$(1,0,i,0)$	$(0,1,0,i)$
$(1,1,-1,-1)$	$(1,i,-1,-i)$	$(1,-1,-1,1)$	$(1,-i,-1,i)$	$(1,0,-1,0)$	$(0,1,0,-1)$
$(1,1,-i,-i)$	$(1,i,-i,1)$	$(1,-1,-i,i)$	$(1,-i,-i,-1)$	$(1,0,i,0)$	$(0,1,0,-i)$
$(1,0,0,1)$	$(1,0,0,i)$	$(1,0,0,-1)$	$(1,0,0,-i)$	$(1,0,0,0)$	$(0,0,0,1)$
$(0,1,1,0)$	$(0,1,i,0)$	$(0,1,-1,0)$	$(0,1,-i,0)$	$(0,0,1,0)$	$(0,1,0,0)$

Niech K będzie zbiorem punktów:

L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6
$(1,1,1,1)$	$(1,i,1,i)$	$(1,-1,1,-1)$	$(1,-i,1,-i)$	$(1,0,1,0)$	$(0,1,0,1)$
$(1,1,i,i)$	$(1,i,i,-1)$	$(1,-1,i,-i)$	$(1,-i,i,1)$	$(1,0,i,0)$	$(0,1,0,i)$
$(1,1,-1,-1)$	$(1,i,-1,-i)$	$(1,-1,-1,1)$	$(1,-i,-1,i)$	$(1,0,-1,0)$	$(0,1,0,-1)$
$(1,1,-i,-i)$	$(1,i,-i,1)$	$(1,-1,-i,i)$	$(1,-i,-i,-1)$	$(1,0,i,0)$	$(0,1,0,-i)$
$(1,0,0,1)$	$(1,0,0,i)$	$(1,0,0,-1)$	$(1,0,0,-i)$	$(1,0,0,0)$	$(0,0,0,1)$
$(0,1,1,0)$	$(0,1,i,0)$	$(0,1,-1,0)$	$(0,1,-i,0)$	$(0,0,1,0)$	$(0,1,0,0)$

Uwaga

Zbiór K posiada własność $(6,6)$-geproci.

Rozważmy $(4,6)$-grid na kwadryce zdefiniowanej formą $xw+yz$:

$$\begin{array}{cccc}
(1,i,-1,i) & (1,-i,-1,-i) & (1,1,-1,1) & (1,-1,-1,-1) \\
(1,i,1,-i) & (1,-i,1,i) & (1,1,1,-1) & (1,-1,1,1) \\
(1,i,i,1) & (1,-i,i,-1) & (1,1,i,-i) & (1,-1,i,i), \\
(1,i,-i,-1) & (1,-i,-i,1) & (1,1,-i,i) & (1,-1,-i,-i), \\
(1,i,0,0) & (1,-i,0,0) & (1,1,0,0) & (1,-1,0,0), \\
(0,0,1,-i) & (0,0,1,i) & (0,0,1,-1) & (0,0,1,1).
\end{array}$$

Rozważmy $(4,6)$-grid na kwadryce zdefiniowanej formą $xw + yz$:

$$\begin{array}{cccc}
(1,i,-1,i) & (1,-i,-1,-i) & (1,1,-1,1) & (1,-1,-1,-1) \\
(1,i,1,-i) & (1,-i,1,i) & (1,1,1,-1) & (1,-1,1,1) \\
(1,i,i,1) & (1,-i,i,-1) & (1,1,i,-i) & (1,-1,i,i), \\
(1,i,-i,-1) & (1,-i,-i,1) & (1,1,-i,i) & (1,-1,-i,-i), \\
(1,i,0,0) & (1,-i,0,0) & (1,1,0,0) & (1,-1,0,0), \\
(0,0,1,-i) & (0,0,1,i) & (0,0,1,-1) & (0,0,1,1).
\end{array}$$

Uwaga

Ostatnie 8 *punktów leży również na kwadryce* $\mathcal{Q}$.

Definicja

Zbiór punktów $Z_{60} = K \cup L$ *nazywamy konfiguracją Kleina.*

Definicja

Zbiór punktów $Z_{60} = K \cup L$ nazywamy konfiguracją Kleina.

$$
\begin{array}{lll}
P_1 = [0:0:1:1] & P_2 = [0:0:1:i] & P_3 = [0:0:1:-1] \\
P_4 = [0:0:1:-i] & P_5 = [0:1:0:1] & P_6 = [0:1:0:i] \\
P_7 = [0:1:0:-1] & P_8 = [0:1:0:-i] & P_9 = [0:1:1:0] \\
P_{10} = [0:1:i:0] & P_{11} = [0:1:-1:0] & P_{12} = [0:1:-i:0] \\
P_{13} = [1:0:0:1] & P_{14} = [1:0:0:i] & P_{15} = [1:0:0:-1] \\
P_{16} = [1:0:0:-i] & P_{17} = [1:0:1:0] & P_{18} = [1:0:i:0] \\
P_{19} = [1:0:-1:0] & P_{20} = [1:0:-i:0] & P_{21} = [1:1:0:0] \\
P_{22} = [1:i:0:0] & P_{23} = [1:-1:0:0] & P_{24} = [1:-i:0:0] \\
P_{25} = [1:0:0:0] & P_{26} = [0:1:0:0] & P_{27} = [0:0:1:0] \\
P_{28} = [0:0:0:1] & P_{29} = [1:1:1:1] & P_{30} = [1:1:1:-1] \\
P_{31} = [1:1:-1:1] & P_{32} = [1:1:-1:-1] & P_{33} = [1:-1:1:1] \\
P_{34} = [1:-1:1:-1] & P_{35} = [1:-1:-1:1] & P_{36} = [1:-1:-1:-1] \\
P_{37} = [1:1:i:i] & P_{38} = [1:1:i:-i] & P_{39} = [1:1:-i:i] \\
P_{40} = [1:1:-i:-i] & P_{41} = [1:-1:i:i] & P_{42} = [1:-1:i:-i] \\
P_{43} = [1:-1:-i:i] & P_{44} = [1:-1:-i:-i] & P_{45} = [1:i:1:i] \\
P_{46} = [1:i:1:-i] & P_{47} = [1:-i:1:i] & P_{48} = [1:-i:1:-i] \\
P_{49} = [1:i:-1:i] & P_{50} = [1:i:-1:-i] & P_{51} = [1:-i:-1:i] \\
P_{52} = [1:-i:-1:-i] & P_{53} = [1:i:i:1] & P_{54} = [1:i:-i:1] \\
P_{55} = [1:-i:i:1] & P_{56} = [1:-i:-i:1] & P_{57} = [1:i:i:-1] \\
P_{58} = [1:i:-i:-1] & P_{59} = [1:-i:i:-1] & P_{60} = [1:-i:-i:-1].
\end{array}
$$

Punkty te otrzymujemy jako punkty przecięcia następujących prostych w $\mathbb{P}^3$:

Punkty te otrzymujemy jako punkty przecięcia następujących prostych w $\mathbb{P}^3$:

$$
\begin{array}{ll}
\ell_1 = V(x, y), & \ell_2 = V(z - w, x - y), \\
\ell_3 = V(z - w, x + y), & \ell_4 = V(z + i \cdot w, x + i \cdot y), \\
\ell_5 = V(z + i \cdot w, x - i \cdot y), & \ell_6 = V(z + w, x - y), \\
\ell_7 = V(z + w, x + y), & \ell_8 = V(z - i \cdot w, x + i \cdot y), \\
\ell_9 = V(z - i \cdot w, x - i \cdot y), & \ell_{10} = V(z, x), \\
\ell_{11} = V(y - w, x - z), & \ell_{12} = V(y - w, x + z), \\
\ell_{13} = V(y + i \cdot w, x + i \cdot z), & \ell_{14} = V(y + i \cdot w, x - i \cdot z), \\
\ell_{15} = V(y + w, x - z), & \ell_{16} = V(y + w, x + z), \\
\ell_{17} = V(y - i \cdot w, x + i \cdot z), & \ell_{18} = V(y - i \cdot w, x - i \cdot z), \\
\ell_{19} = V(w, x), & \ell_{20} = V(y - z, x - w), \\
\ell_{21} = V(y - z, x + w), & \ell_{22} = V(y + i \cdot z, x + i \cdot w), \\
\ell_{23} = V(y + i \cdot z, x - i \cdot w), & \ell_{24} = V(y + z, x - w), \\
\ell_{25} = V(y + z, x + w), & \ell_{26} = V(y - i \cdot z, x + i \cdot w), \\
\ell_{27} = V(y - i \cdot z, x - i \cdot w), & \ell_{28} = V(z, y), \\
\ell_{29} = V(w, y), & \ell_{30} = V(w, z).
\end{array}
$$

Uwaga

Zbiór $Z_{60} \subset \mathbb{P}^3$ *zawiera wszystkie punkty przecięcia prostych ze zbioru* $\mathbb{L}_{30}$. *Ponadto, każdy z punktów ze zbioru* Z_{60} *leży na dokładnie trzech prostych ze zbioru* $\mathbb{L}_{30}$.

Uwaga

Zbiór $Z_{60} \subset \mathbb{P}^3$ *zawiera wszystkie punkty przecięcia prostych ze zbioru* $\mathbb{L}_{30}$. *Ponadto, każdy z punktów ze zbioru* Z_{60} *leży na dokładnie trzech prostych ze zbioru* $\mathbb{L}_{30}$.

Twierdzenie

Zbiór Z_{60} *posiada własność* $(6, 10)$*-geproci.*

	A	B	C	D	E	F
ℓ_1	+	+				
ℓ_2					+	+
ℓ_3			+	+		
ℓ_4			+		+	
ℓ_5				+		+
ℓ_6			+	+		
ℓ_7					+	+
ℓ_8				+		+
ℓ_9			+		+	
ℓ_{10}			+			+
ℓ_{11}		+		+		
ℓ_{12}	+				+	
ℓ_{13}	+			+		
ℓ_{14}		+			+	
ℓ_{15}	+				+	

	A	B	C	D	E	F
ℓ_{16}		+		+		
ℓ_{17}		+			+	
ℓ_{18}	+			+		
ℓ_{19}				+	+	
ℓ_{20}	+		+			
ℓ_{21}		+				+
ℓ_{22}		+	+			
ℓ_{23}	+					+
ℓ_{24}		+				+
ℓ_{25}	+		+			
ℓ_{26}	+					+
ℓ_{27}		+	+			
ℓ_{28}				+	+	
ℓ_{29}			+			+
ℓ_{30}	+	+				

Niech $P = [a : b : c : d]$ będzie punktem generycznym. Wtedy rzutowanie Z_{60} na płaszczyznę ogólną ma we współrzędnych $(s : t : u)$ równanie:

$$
\begin{aligned}
C_6 = \quad & b(a^4 - b^4)tu(t^4 - u^4) + c(a^4 - c^4)su(u^4 - s^4) \\
& + d(a^4 - d^4)st(s^4 - t^4) + 5b(d^4 - c^4)s^4tu \\
& + 5c(b^4 - d^4)st^4u + 5d(c^4 - b^4)stu^4 \\
& + 10b(a^2d^2 - b^2c^2)s^2t^3u + 10c(a^2d^2 - b^2c^2)s^3t^2u \\
& + 10d(a^2c^2 - b^2d^2)s^3tu^2 + 10b(b^2d^2 - a^2c^2)s^2tu^3 \\
& + 10c(a^2b^2 - c^2d^2)st^2u^3 + 10d(c^2d^2 - a^2b^2)st^3u^2.
\end{aligned}
$$

Effective Methods in Algebraic Geometry

Effective Methods in Algebraic Geometry

Recent Advances in Classical Algebraic Geometry


thank you!