Efektywne twierdzenie Bertiniego

Tomasz Rodak, Adam Różycki, Stanisław Spodzieja

12 stycznia 2022

Twierdzenie

Niech X będzie nieosobliwą, domkniętą podrozmaitością $\mathbb{P}^m_k$, gdzie k jest ciałem algebraicznie domkniętym. Wówczas istnieje hiperpłaszczyzna $H \subset \mathbb{P}^m_k$ nie zawierająca X i taka, że przecięcie $H \cap X$ jest gładkie w każdym punkcie. Co więcej, zbiór hiperpłaszczyzn o tej własności stanowi otwarty i gęsty podzbiór pełnego systemu liniowego $|H|$ rozważanego jako przestrzeń rzutowa.

Stożek algebraiczny C_0, Stopień globalny $\delta(V)$

$f_1, \ldots, f_r$ - wielomiany jednorodne,

- $C_0 = V(f_1, \ldots, f_r)$ - stożek algebraiczny.

$V \subset \mathbb{C}^m$ - zbiór algebraiczny, czystego wymiaru,
$H \subset \mathbb{C}^m$ - generyczna podprzestrzeń afiniczna,
$\dim H = m - \dim V$,

- $\deg V = \#(V \cap H)$ - stopień zbioru V.

$V \subset \mathbb{C}^m$ - zbiór algebraiczny,
$V = V_1 \cup \cdots \cup V_s$ - rozkład na składowe nierozkładalne,

- $\delta(V) = \deg V_1 + \cdots + \deg V_s$ - stopień globalny zbioru V.

Słabe twierdzenie Bertiniego

Dla każdego $a \in \mathbb{C}$, oznaczmy

$$N_a(x_1, \ldots, x_m) = x_1 + ax_2 + \cdots + a^{m-1}x_m.$$

Twierdzenie

$C_0 \subset \mathbb{C}^m$ - stożek algebraiczny czystego wymiaru $q \geq 1$, $\delta(C_0) \leq d$. Wówczas zbiór

$$A = \{a \in \mathbb{C} \colon \ C_0 \cap V(N_a) \text{ - niewłaściwe } \}$$

jest skończony. Co więcej,

$$\#A \leq d(m-q).$$

W powyższym twierdzeniu, właściwość przecięcia $C_0 \cap V(N_a)$ nie może zostać zastąpiona transwersalnością.

Przykład

Niech

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : y^2 - 4xz = 0\}.$$

Oczywiście $C \setminus \{(0, 0, 0)\}$ *jest gładkim stożkiem wymiaru* 2. *Niech dla* $a \in \mathbb{C}$

$$N_a(x, y, z) = x + ay + a^2 z.$$

Wówczas $C \cap V(N_a) \neq \emptyset$ *dla każdego* $a \in \mathbb{C}$. *Co więcej, jeśli* $(0, 0, 0) \neq (x_0, y_0, z_0) \in C \cap V(N_a)$, *to* $z_0 \neq 0$, $a = \frac{-y_0}{2z_0}$ *oraz* $x_0 = \frac{y_0^2}{4z_0}$. *Zatem*

$$N_a(x, y, z) = x + \frac{-y_0}{2z_0} y + \frac{y_0^2}{4z_0^2} z = \frac{-1}{4z_0}(-4z_0 x + 2y_0 y - 4x_0 z)$$

oraz $T_{(x_0, y_0, z_0)} C = V(N_a)$. *To pokazuje, że przecięcie* $C \cap V(N_a)$ *nie jest transwersalne w* (x_0, y_0, z_0).

System niezależnych funkcji liniowych

- $\mathbb{L}(m,1) = \{N\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C},\ N \text{ - liniowe}\}$
- System funkcji $N_1, \ldots, N_s \in \mathbb{L}(m,1)$, $s \geq m$, nazywamy *niezależnym* jeśli dla każdego ciągu $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq s$ system $N_{i_1}, \ldots, N_{i_m}$ jest liniowo niezależny nad $\mathbb{C}$.

Główny lemat

Kluczową rolę w dowodzie twierdzenie Bertiniego odgrywa

Lemat

Niech d, m, q, *będą liczbami całkowitymi dodatnimi,* $m \geq 2$, $m \geq q$. *Niech* $\ell = d(m-q)+q$, *oraz niech* $N_j : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq \ell$, *będzie systemem niezależnych funkcji liniowych. Wówczas dla każdego stożka algebraicznego* $C_0 \subset \mathbb{C}^m$ *takiego, że* $\dim C_0 \leq q$ *oraz* $\delta(C_0) \leq d$, *istnieją takie* $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq \ell$, *że*

$$C_0 \cap V(N_{i_1}, \ldots, N_{i_q}) = \{0\}.$$

Twierdzenie

Niech d, m, q *będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że* $m \geq q$, *niech* $\ell = 2d^{m-q}[(m-q)(d-1)+1]^{q-1} + m - 1$, *oraz niech* $N_j \in \mathbb{L}(m, 1)$, $1 \leq j \leq \ell$, *będzie systemem niezależnych funkcji liniowych. Wówczas*

$$E_{j_1,\dots,j_{m-1}} =$$
$$= \{x \in \mathbb{C}^m : \exists_{a \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}} \; N_{j_1}(a) = \cdots = N_{j_{m-1}}(a) = 0, \; ax^T = 0\},$$

dla $1 \leq j_1 < \cdots < j_{m-1} \leq \ell$ *jest systemem hiperpłaszczyzn, takich że dla każdego nierozkładalnego stożka algebraicznego* $V \subset \mathbb{C}^m$, $\dim V = q$, $\deg V \leq d$ *takiego, że* $V \setminus \{0\}$ *jest gładki, istnieją takie* $1 \leq j_1 < \cdots < j_{m-1} \leq \ell$, *że przecięcie* $X = V \cap E_{j_1,\dots,j_{m-1}}$ *jest transwersalne w każdym punkcie* $x \in X \setminus \{0\}$ *oraz zbiór* $X \setminus \{0\}$ *jest gładki.*

Twierdzenie

Niech d, m, q, s *będą takimi liczbami całkowitymi dodatnimi, że* $m \geq q$ *i* $q - 1 \geq s$*, niech* $\ell = d^{m-q}[(m-q)(d-1)+q-1]+m(q-1)-1$*, oraz niech* $N_j \in \mathbb{L}(m(q-1),1)$*,* $1 \leq j \leq \ell$*, będzie systemem niezależnych funkcji liniowych takich, że*

$$K_{s,j_1,\ldots,j_{m(q-1)-1}} = \{x \in \mathbb{C}^m : \exists_{a=(a_1,\ldots,a_{q-1})\in(\mathbb{C}^m)^{q-1}\setminus\{0\}}$$
$$N_{j_1}(a) = \cdots = N_{j_{m(q-1)-1}}(a) = 0,\ a_1x^T = \cdots = a_sx^T = 0\},$$

dla $1 \leq j_1 < \cdots < j_{m-1} \leq \ell$ *jest systemem podprzestrzeni liniowych wymiaru* $m-s$*. Wówczas dla każdego nierozkładalnego stożka algebraicznego* $V \subset \mathbb{C}^m$*,* $\dim V = q$*,* $\deg V \leq d$ *takiego, że* $V \setminus \{0\}$ *jest gładki, istnieją takie* $1 \leq j_1 < \cdots < j_{m(q-1)-1} \leq \ell$*, że przecięcie* $X = V \cap K_{s,j_1,\ldots,j_{m(q-1)-1}}$ *jest transwersalne w każdym punkcie* $x \in X \setminus \{0\}$ *i zbiór* $X \setminus \{0\}$ *jest gładki.*

Uwaga

Dla $d > 1$ i $q < m$ oszacowanie liczby ℓ funkcji liniowych w twierdzeniu Bertiniego (II) jest lepsze niż to uzyskane przez wielokrotne użycie oszacowania w twierdzeniu Bertiniego (I). Istotnie, używając twierdzenia Bertiniego (I) s-razy, potrzebujemy przynajmniej

$$s - 1 + 2d^{m-q}[(m-q)(d-1)+1]^{q-1} + m - 1$$

funkcji liniowych N_j.

Uwaga

Na mocy nierówności Bernoulliego mamy

$$2d^{m-q}[(m-q)(d-1)+1]^{q-1}+m \geq$$
$$d^{m-q}[(m-q)(d-1)(q-1)+1]+m+d^{m-q}[(m-q)(d-1)+1]^{q-1}$$
$$\geq d^{m-q}[(m-q)(d-1)+q-1]+m+2^{m-q}[m-q+1]^{q-1}.$$

Zatem wystarczy udowodnić, że

$$2^{m-q}[m-q+1]^{q-1} \geq m(q-2)$$

dla $2 < q < m$ lub równoważnie, że

$$(m-q)+(q-1)\log_2(m-q+1) \geq \log_2 m + \log_2(q-2)$$

dla $2 < q < m$. Oczywiście dla $q = 2$ teza zachodzi. Bezpośrednio sprawdzamy powyższą nierówność dla $m \geq q+1$.

Efektywny wzór na stopień lokalny $\deg_0 V$

U - otoczenie $0 \in \mathbb{C}^m$,
$V \subset \mathbb{C}^m$ - zbiór algebraiczny czystego wymiaru, $0 \in V$
$H \subset \mathbb{C}^m$ - generyczna podprzestrzeń liniowa,
$\dim H = m - \dim V$,

- $\deg_0 V = \#(V \cap H \cap U)$ - stopień lokalny zbioru V w 0.

Wniosek

Dla dowolnego zbioru algebraicznego $V = V(f_1, \ldots, f_r) \subset \mathbb{C}^m$ *czystego wymiaru* q, *gdzie* $f_j \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $\deg f_j \leq d$ *dla* $1 \leq j \leq r$, *mamy*

$$\deg_0 V = \max_{1 \leq j_1 < \cdots < j_{m(q-1)-1} \leq \ell} \deg_0(V \cap K_{s, j_1, \ldots, j_{m(q-1)-1}}).$$

dla każdego $1 \leq s \leq q$.

Efektywny wzór na krotność $i_0(f)$

$f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$, $m \geq n$ - odwzorowanie wielomianowe skończone w 0.

$$i_0(f) := i(\operatorname{graph} f \cdot (\mathbb{C}^n \times \{0\}); (0,0)) \text{ - krotność } f \text{ w } 0$$

Twierdzenie

Niech $m \geq n$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi, niech $\ell = d^n(m-n)+n$. Wówczas dla każdego, niezależnego systemu funkcji liniowych $L_j \in \mathbb{L}(m,1)$, $1 \leq j \leq \ell$, oraz dla każdego odwzorowania wielomianowego $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ stopnia d, skończonego w 0, mamy

$$i_0(f) = \min_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq \ell} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}/((L_{i_1}, \ldots, L_{i_n}) \circ f).$$

$f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$, $m \geq n$ - odwzorowanie wielomianowe skończone w 0.

$\mathcal{L}_0(f) = \inf\{\nu \in \mathbb{R}_+ : \exists_{C>0} \quad |f(z)| \geq C|z|^\nu, \ |z| \to 0\}$ - wykładnik Łojasiewicza f w 0.

Twierdzenie

Niech $m \geq n$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi, niech $\ell = d^n(m-n) + n$, oraz niech $L_j \in \mathbb{L}(m, 1)$, $1 \leq j \leq \ell$, będzie systemem niezależnych funkcji liniowych. Wówczas dla każdego odwzorowania wielomianowego $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^m, 0)$ skończonego w 0 takiego, że $\deg f \leq d$ mamy

$$\mathcal{L}_0(f) = \min_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq \ell} \mathcal{L}_0((L_{i_1}, \ldots, L_{i_n}) \circ f).$$

Dziękuję za uwagę !