Skoki liczb Lê w rodzinach osobliwości

Grzegorz Oleksik, Adam Różycki

9 stycznia 2020

Wprowadzenie

- $f\colon (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- $\dim_0 \Sigma f = 0$, $f \to \mu_f(0)$

Wprowadzenie

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- $\dim_0 \Sigma f = 0$, $f \to \mu_f(0)$
- $\dim_0 \Sigma f = d \geqslant 0$,
  $f \to \lambda_{f,z}(0) := (\lambda^0_{f,z}(0), \lambda^1_{f,z}(0), \dots, \lambda^d_{f,z}(0))$

Wprowadzenie

- $f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- $\dim_0 \Sigma f = 0$, $f \to \mu_f(0)$
- $\dim_0 \Sigma f = d \geqslant 0$,
  $f \to \lambda_{f,z}(0) := (\lambda^0_{f,z}(0), \lambda^1_{f,z}(0), \dots, \lambda^d_{f,z}(0))$
- $\dim_0 \Sigma f = 0 \Rightarrow \lambda^0_{f,z}(0) = \mu_f(0)$

- $\mu_f(0)$ - półciągła z góry w rodzinie deformacji f

Skoki liczb Lê

- $\mu_f(0)$ - półciągła z góry w rodzinie deformacji f
- $\mu_f(0) - \mu_{f_t}(0)$ - skok liczby Milnora deformacji f_t (A. Bodin, Sz. Brzostowski, S. Guzein-Zade, T. Krasiński, J. Walewska)

Skoki liczb Lê

- $\mu_f(0)$ - półciągła z góry w rodzinie deformacji f
- $\mu_f(0) - \mu_{f_t}(0)$ - skok liczby Milnora deformacji f_t (A. Bodin, Sz. Brzostowski, S. Guzein-Zade, T. Krasiński, J. Walewska)
- $\lambda_{f,z}(0)$ - półciągła z góry w rodzinie deformacji f w porządku leksykograficznym

Skoki liczb Lê

- $\mu_f(0)$ - półciągła z góry w rodzinie deformacji f
- $\mu_f(0) - \mu_{f_t}(0)$ - skok liczby Milnora deformacji f_t (A. Bodin, Sz. Brzostowski, S. Guzein-Zade, T. Krasiński, J. Walewska)
- $\lambda_{f,z}(0)$ - półciągła z góry w rodzinie deformacji f w porządku leksykograficznym
- $\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0)$ - skok liczb Lê deformacji f_t

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.
- Wybierzemy te składowe $V(\mathscr{I})$, które nie są zawarte w W. Niech $x \in V(\mathscr{I})$. Weźmy minimalny rozkład prymarny źdźbła $\mathscr{I}_x$ snopa $\mathscr{I}$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ i rozważmy ideał $\mathscr{I}_x \neg W$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ składający się z przecięcia tych ideałów prymarnych Q (dopuszczamy zanurzone), że $V(Q) \not\subseteq W$.

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.
- Wybierzemy te składowe $V(\mathscr{I})$, które nie są zawarte w W. Niech $x \in V(\mathscr{I})$. Weźmy minimalny rozkład prymarny źdźbła $\mathscr{I}_x$ snopa $\mathscr{I}$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ i rozważmy ideał $\mathscr{I}_x \neg W$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ składający się z przecięcia tych ideałów prymarnych Q (dopuszczamy zanurzone), że $V(Q) \nsubseteq W$.
- Ta definicja nie zależy od wyboru minimalnego rozkładu prymarnego $\mathscr{I}_x$.

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.
- Wybierzemy te składowe $V(\mathscr{I})$, które nie są zawarte w W. Niech $x \in V(\mathscr{I})$. Weźmy minimalny rozkład prymarny źdźbła $\mathscr{I}_x$ snopa $\mathscr{I}$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ i rozważmy ideał $\mathscr{I}_x \neg W$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ składający się z przecięcia tych ideałów prymarnych Q (dopuszczamy zanurzone), że $V(Q) \not\subseteq W$.
- Ta definicja nie zależy od wyboru minimalnego rozkładu prymarnego $\mathscr{I}_x$.
- Wykonując powyższą operację w każdym punkcie x otrzymujemy nowy koherentny snop ideałów, który nazywamy *luką w snopie* i oznaczamy $\mathscr{I} \neg W$. Oznaczmy przez $V(\mathscr{I}) \neg W$ zespoloną przestrzeń analityczną $V(\mathscr{I} \neg W)$.

Cykle Lê i liczby Lê

- $f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.

Cykle Lê i liczby Lê

- $f:(U,0)\to(\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,\dots,z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- Dla każdego $0\leqslant k\leqslant n-1$, określamy k-tą *rozmaitość polarną* funkcji f względem z jako

$$\Gamma^k_{f,z} := V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\neg\Sigma f.$$

Cykle Lê i liczby Lê

- $f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- Dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n-1$, określamy k-tą *rozmaitość polarną* funkcji f względem z jako

$$\Gamma^k_{f,z} := V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \neg \Sigma f.$$

- Cykl analityczny

$$[\Lambda^k_{f,z}] := \left[\Gamma^{k+1}_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}\right)\right] - \left[\Gamma^k_{f,z}\right]$$

nazywamy k-tym *cyklem Lê* funkcji f względem z.

Cykle Lê i liczby Lê

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,\dots,z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- Dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n-1$, określamy k-tą *rozmaitość polarną* funkcji f względem z jako

$$\Gamma^k_{f,z} := V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}},\dots,\frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\neg\Sigma f.$$

- Cykl analityczny

$$[\Lambda^k_{f,z}] := \left[\Gamma^{k+1}_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}\right)\right] - \left[\Gamma^k_{f,z}\right]$$

nazywamy k-tym *cyklem Lê* funkcji f względem z.

- Określamy k-tą *liczbę Lê* funkcji f w $0 \in \mathbb{C}^n$ względem z

$$\lambda^k_{f,z}(0) := \left([\Lambda^k_{f,z}]\cdot[V(z_1,\dots,z_k)]\right)_0$$

przy założeniu, że przecięcie to jest 0-wymiarowe lub puste.

Jeśli f ma osobliwość izolowaną w 0, to:

- $\Gamma^1_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$

Jeśli f ma osobliwość izolowaną w 0, to:

- $\Gamma^1_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$
- $\lambda^0_{f,z}(0) = \left[\Gamma^1_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]_0 = \left[V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\right]_0 = \mu_f(0).$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $$\Gamma^2_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3),$$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $$\Gamma^2_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3),$$
- $$\begin{aligned}\Gamma^1_{f,z} &= V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) \\ &= V(z_2(2z_1^2 + 4z_2^2), z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3).\end{aligned}$$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $$\Gamma^2_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3),$$
- $$\begin{aligned}\Gamma^1_{f,z} &= V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) \\ &= V(z_2(2z_1^2 + 4z_2^2), z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}[\Lambda^1_{f,z}] &= \left[\Gamma^2_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)\right] - \left[\Gamma^1_{f,z}\right] \\ &= [V(z_3^3) \cap V(z_2(2z_1^2 + 4z_2^2))] - [V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3)] \\ &= [V(z_2, z_3^3)]\end{aligned}$$

Przykład

- $$\begin{aligned}[\Lambda^0_{f,z}] &= \left[\Gamma^1_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right] \\ &= [V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3) \cap V(z_1 z_2^2)] \\ &= [V(z_1, z_2^2, z_3^3)] + [V(z_1^2, z_2^2, z_3^3)].\end{aligned}$$

Przykład

- $$[\Lambda^0_{f,z}] = \left[\Gamma^1_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]$$
  $$= [V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3) \cap V(z_1 z_2^2)]$$
  $$= [V(z_1, z_2^2, z_3^3)] + [V(z_1^2, z_2^2, z_3^3)].$$

- $$\lambda^1_{f,z} = ([\Lambda^1_{f,z}] \cdot [V(z_1)])_0 = [V(z_1, z_2, z_3^3)]_0 = 3;$$
  $$\lambda^0_{f,z} = ([\Lambda^0_{f,z}] \cdot \mathbb{C}^3)_0 = 6 + 12 = 18.$$

Jednostajna formuła Iomdine-Lê-Massey

- $(f_t)\colon (D \times U, D \times \{0\}) \to (\mathbb{C}, 0)$ - deformacja f, $0 \in D \subset \mathbb{C}$

Jednostajna formuła Iomdine-Lê-Massey

- $(f_t)\colon (D \times U, D \times \{0\}) \to (\mathbb{C}, 0)$ - deformacja f, $0 \in D \subset \mathbb{C}$
- $d = \dim_0 \Sigma f \geqslant 1$

Jednostajna formuła Iomdine-Lê-Massey

- $(f_t)\colon (D \times U, D \times \{0\}) \to (\mathbb{C}, 0)$ - deformacja f, $0 \in D \subset \mathbb{C}$
- $d = \dim_0 \Sigma f \geqslant 1$

Twierdzenie (Jednostajna formuła Iomdine-Lê-Massey)

Dla dostatecznie dużej liczby naturalnej j i dostatecznie małego t, mamy:

1. $\Sigma(f_t + z_1^j) = \Sigma f_t \cap V(z_1)$ *w otoczeniu zera;*
2. $\dim_0 \Sigma(f_t + z_1^j) = d - 1$;
3. *liczby Lê* $\lambda^k_{f_t+z_1^j,\tilde{z}}(0)$ *istnieją dla każdego* $0 \leqslant k \leqslant d-1$ *i*

$$\lambda^0_{f_t+z_1^j,\tilde{z}}(0) = \lambda^0_{f_t,z}(0) + (j-1)\lambda^1_{f_t,z}(0); \tag{0.1}$$

$$\lambda^k_{f_t+z_1^j,\tilde{z}}(0) = (j-1)\lambda^{k+1}_{f_t,z}(0) \quad \textit{for} \quad 1 \leqslant k \leqslant d-1; \tag{0.2}$$

gdzie $\lambda^k_{f_t+z_1^j,\tilde{z}}(0)$ *jest k-tą liczbą Lê funkcji* $f_t + z_1^j$ *w* 0 *względem układu współrzędnych* $\tilde{z} = (z_2, \ldots, z_n, z_1)$.

Liczby Lê deformacji

Wniosek

$\lambda^k_{f_t,z}(0)$ - *określone dla każdego* $k \leqslant d$ *i niezależne od* t *dla dostatecznie małego* t

Liczby Lê deformacji

Twierdzenie

Układ liczb Lê

$$\left(\lambda^d_{f_t,z}(0),\dots,\lambda^0_{f_t,z}(0)\right)$$

jest półciągły z góry w porzadku leksykograficznym względem zmiennej t tj. dla każdego, małego t, albo

$$\lambda^d_{f,z}(0) > \lambda^d_{f_t,z}(0)$$

albo

$$\lambda^d_{f,z}(0) = \lambda^d_{f_t,z}(0) \quad i \quad \lambda^{d-1}_{f,z}(0) > \lambda^{d-1}_{f_t,z}(0)$$

$$\vdots$$

$$\lambda^d_{f,z}(0) = \lambda^d_{f_t,z}(0),\dots,\lambda^1_{f,z}(0) = \lambda^1_{f_t,z}(0) \quad i \quad \lambda^0_{f,z}(0) \geqslant \lambda^0_{f_t,z}(0).$$

Skoki liczb Lê

- (f_t) - deformacja f

- (f_t) - deformacja f
- $\dim_0 \Sigma f_t = \dim_0 \Sigma f$ dla dostatecznie małego t

- (f_t) - deformacja f
- $\dim_0 \Sigma f_t = \dim_0 \Sigma f$ dla dostatecznie małego t
- $\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0)$ - skok liczb Lê deformacji f_t

Przykład

$f(x,y,z) = y^2 + z^3$, $\lambda_{f,z}(0) = (2,0)$
$f_t^k = f + tx^k z^2$, $\lambda_{f_t^k,z}(0) = (1, 3k-1)$
$\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0) = (1, 1-3k)$ - dowolnie mały.

Liniowe osobliwości

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna taka, że $\Sigma f = \{z \in \mathbb{C}^n\colon z_2 = \cdots = z_n = 0\}$ i $f|_{V(z_1)}$ - izolowana osobliwośc w 0 (liniowa osobliwość)

Liniowe osobliwości

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna taka, że $\Sigma f = \{z \in \mathbb{C}^n \colon z_2 = \cdots = z_n = 0\}$ i $f|_{V(z_1)}$ - izolowana osobliwośc w 0 (liniowa osobliwość)
- (f_t) - deformacja f taka, że f_t liniowa osobliwość dla małych t

Twierdzenie

f - niezdegenerowana, $\lambda^0_{f,z}(0) > 0$. Wówczas istnieje deformacja (f_t) taka, że

$$\lambda^0_{f_t,z}(0) = 0$$

oraz

$$\lambda^1_{f_t,z}(0) = \lambda^1_{f,z}(0).$$

Minimalne skoki liczb Lê

- $D = \{(f_t) : \lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0) \neq 0\}$

Minimalne skoki liczb Lê

- $D = \{(f_t) : \lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0) \neq 0\}$
- $\min_{(f_t)\in D}\{\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0)\}$ - minimalny skok liczb Lê deformacji f_t

- $D = \{(f_t) : \lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0) \neq 0\}$
- $\min_{(f_t)\in D}\{\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0)\}$ - minimalny skok liczb Lê deformacji f_t

Przykład

$f(x,y,z) = y^2 + z^3 + x^2z^2$, $\lambda_{f,z}(0) = (1,5)$.
$f_t = f + tz^2$ - deformacja f, $\lambda_{f_t,z}(0) = (1,0)$.
$\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0) = (0,5)$.

-

Interpretacja geometryczna

- $[\Sigma f] = \lambda^1_{f,z}(0)[Oz_1] + \lambda^0_{f,z}(0)[0]$ - cykl krytyczny f

Interpretacja geometryczna

- $[\Sigma f] = \lambda^1_{f,z}(0)[Oz_1] + \lambda^0_{f,z}(0)[0]$ - cykl krytyczny f
- $[\Sigma f_t] = \lambda^1_{f_t,z}(0)[Oz_1] + \lambda^0_{f_t,z}(0)[0]$ - cykl krytyczny f_t

Interpretacja geometryczna

- $[\Sigma f] = \lambda^1_{f,z}(0)[Oz_1] + \lambda^0_{f,z}(0)[0]$ - cykl krytyczny f
- $[\Sigma f_t] = \lambda^1_{f_t,z}(0)[Oz_1] + \lambda^0_{f_t,z}(0)[0]$ - cykl krytyczny f_t
- Minimalny skok liczb Lê $(\lambda^1_{f,z}(0), \lambda^0_{f,z}(0))$ możemy interpretować jako "bliskość" powyższych cykli

Skok $\lambda^1_{f,z}(0)$

Zbadamy skok $\lambda^1_{f,z}(0)$
$D^1 = \{(f_t) : \lambda^1_{f,z}(0) - \lambda^1_{f_t,z}(0) \neq 0\}$

Propozycja

Istnieje osobliwośc $f : (\mathbb{C}^3, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *taka, że*

$$\min_{(f_t)\in D^1} \{\lambda^1_{f,z}(0) - \lambda^1_{f_t,z}(0)\} > 1.$$

Przykład

Sz. Brzostowski, T. Krasiński

$$f(x, y, z) = y^4 + z^4 + y^2 z^2$$

$$\lambda^1_{f,z}(0) = \mu_0(f|_{x=x_0}) = 9.$$

$$(f_t) - \text{deformacja f}$$

$$\lambda^1_{f_t,z}(0) = \mu_0(f_t|_{x=x_0}) \leqslant 7.$$

Skok $\lambda^0_{f,z}(0)$

Propozycja

f - liniowa osobliwość. Wówczas

$$\lambda^0_{f,z}(0) \neq 1.$$

Przykład

$f(x,y,z) = y^2 + z^3 + xz^2$, $\lambda_{f,z}(0) = (1,2)$
$f_t = f + tz^2$ - deformacja f, $\lambda_{f_t,z}(0) = (1,0)$
$\lambda_{f,z}(0) - \lambda_{f_t,z}(0) = (0,2)$ - minimalny skok

Dziękuję za uwagę!