Do czego może się przydać tetracja?

– przymiarka do wspólnej pracy
z J. Gwóździewiczem i T. Rodakiem

Piotr Jędrzejewicz
WMiI UMK w Toruniu

XLI Konferencja i Warsztaty
Geometria Analityczna i Algebraiczna
Łódź, 6 – 10 stycznia 2020 r.

1. Tetracja
2. Przedłużenie tetracji
3. Struktury otrzymane dzięki przedłużeniu tetracji

Podstawowe działania

tetracja – czwarte działanie

działanie nr 0 – funkcja następnika: $a \mapsto a^*$

pierwsze działanie – dodawanie:

$$a + n = ((\dots(\overbrace{(a^*)^*)^* \dots)^*)^*}^{n \text{ gwiazdek}}$$

Tetration, *Wikipedia*, https://en.wikipedia.org/wiki/Tetration

Podstawowe działania

drugie działanie – mnożenie:

$$a \cdot n = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n}$$

trzecie działanie – potęgowanie:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

Tetracja

czwarte działanie – tetracja:

$$ {}^{n}a = \underbrace{a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^{a^{a}}}}}}}}_{n} $$

Uwaga. Ten zapis rozumiemy jako łączny od prawej strony (right-associative).

Tetracja

Definicja rekurencyjna:

$$^{n+1}a = a^{\left(^{n}a\right)}$$

Dla $n = 0$ mamy

$$a = {}^{1}a = a^{\left(^{0}a\right)}$$

Przyjmujemy

$$^{0}a = 1$$

Tetracja

Definicja rekurencyjna:

$$ {}^{n+1}a = a^{\left({}^{n}a\right)} $$

Dla $n = -1$ mamy

$$ 1 = {}^{0}a = a^{\left({}^{-1}a\right)} $$

Przyjmujemy

$$ {}^{-1}a = 0 $$

Tetracja

Definicja rekurencyjna:

$$^{n+1}a = a^{\left(^{n}a\right)}$$

Dla $n = -2$ mamy

$$0 = {}^{-1}a = a^{\left(^{-2}a\right)}$$

Przyjmujemy

$$^{-2}a = -\infty$$

1. Tetracja
2. Przedłużenie tetracji
3. Struktury otrzymane dzięki przedłużeniu tetracji

Tetracja

$b \in \mathbb{R}, \;\; b > 1, \;\; f(n+1) = {}^n b$

$f(0) = 0, \;\; f(1) = 1, \;\; f(2) = b, \;\; f(3) = b^b, \;\; \ldots$

Pytanie 1. Czy można funkcję f przedłużyć do funkcji rosnącej, ciągłej na przedziale $(-1, +\infty)$, spełniającej równanie

$$f(x+1) = b^{f(x)}?$$

Przedłużenie tetracji

Pytanie 1. Czy można funkcję f przedłużyć do funkcji rosnącej, ciągłej na przedziale $(-1, +\infty)$, spełniającej równanie $f(x+1) = b^{f(x)}$?

Odpowiedź banalna:

$f_1 \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ – dowolna rosnąca funkcja ciągła, taka że $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$.

Przedłużenie tetracji

$f_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ – dowolna rosnąca funkcja ciągła, taka że $f_1(0) = 0$, $f_1(1) = 1$.

$f_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}$, $\ f_2(x+1) = b^{f_1(x)}$, i tak dalej...

Ogólnie, dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ przyjmujemy:

$f_{n+1}\colon [n, n+1] \to \mathbb{R}$, $\ f_{n+1}(x+1) = b^{f_n(x)}$

Przedłużenie tetracji

$$b \in \mathbb{R}, \;\; b > 1, \;\; f(n+1) = {}^{n}b$$

$$f(0) = 0, \;\; f(1) = 1, \;\; f(2) = b, \;\; f(3) = b^{b}, \;\; \ldots$$

Pytanie 2. Czy istnieje **naturalne** przedłużenie funkcji f na przedział $(-1, +\infty)$, spełniające równanie

$$f(x+1) = b^{f(x)}?$$

Precedens – funkcja gamma

$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$, $\operatorname{Re} z > 0$, ma przedłużenie analityczne na $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$.

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$

$\Gamma(n+1) = n!$ dla $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Przedłużenie tetracji – równanie różniczkowe

$$f(x) = b^{f(x-1)} \text{ dla } x > 0 \quad (b > 1)$$

$$f'(x) = b^{f(x-1)} \cdot \ln b \cdot f'(x-1)$$

$$f'(x) = cf(x)f'(x-1), \quad c = \ln b > 0$$

Przedłużenie tetracji

$$f(n+1) = {}^n b, \quad b \in \mathbb{R}, \quad b > 1$$

Pytanie 2. Czy istnieje **naturalne** przedłużenie funkcji f na przedział $(-1, +\infty)$, spełniające równanie

$$f(x+1) = b^{f(x)}?$$

Hellmuth Kneser 1950, *Reelle analytishe Lösungen der Gleichung* $\varphi(\varphi(x)) = e^x$ *und verwandter Funktionalgleichungen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 187, 56-67.

Przedłużenie tetracji

Peter Walker 1990, *Infinitely differentiable generalized logarithmic and exponential functions*, Mathematics of Computation 57, 723-733.

Dmitrii Kouznetsov 2009, *Solution of* $F(z+1) = \exp(F(z))$ *in the complex z-plane*, Mathematics of Computation 78, 1647-1670.

William Paulsen, Samuel Cowgill 2017, *Solving* $F(z+1) = b^{F(z)}$ *in the complex plane*, Advances in Computational Mathematics 43, 1261–1282.

Twierdzenie (Paulsen, Cowgill, 2017)

Dla dowolnego $b > e^{\frac{1}{e}}$ istnieje dokładnie jedna funkcja analityczna $f(z)$ określona na $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant -2\}$, spełniająca warunki:

$$f(z+1) = b^{f(z)},\ f(0) = 1,\ f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$$

oraz

$$\lim_{y \to +\infty} f(x + yi) = l_b,$$

gdzie l_b jest rozwiązaniem zespolonym równania $b^z = z$ o minimalnym $\operatorname{Im} l_b > 0$.

Obserwacje N. Hellersteina

$$x + y$$

$$x \cdot y = e^{\ln x + \ln y}$$

$$e^{\ln x \cdot \ln y} = e^{e^{\ln \ln x + \ln \ln y}}$$

$$e^{e^{\ln \ln x \cdot \ln \ln y}} = e^{e^{e^{\ln \ln \ln x + \ln \ln \ln y}}}$$

$$\vdots$$

Nathaniel Hellerstein, *Paradox Point*, http://paradox-point.blogspot.com/2013/11/conjugates-of-fields-5-of-6-logarithmic.html

Obserwacje N. Hellersteina

$$x \cdot y$$

$$x + y = \ln(e^x \cdot e^y)$$

$$\ln(e^x + e^y) = \ln\ln(e^{e^x} \cdot e^{e^y})$$

$$\ln\ln(e^{e^x} + e^{e^y}) = \ln\ln\ln(e^{e^{e^x}} \cdot e^{e^{e^y}})$$

$$\vdots$$

Obserwacje N. Hellersteina

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x+1) = e^{f(x)},$$

$$g_t(x) = f(f^{-1}(x) + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$g_{-2}(x) = \ln \ln x$$

$$g_{-1}(x) = \ln x$$

$$g_0(x) = x$$

$$g_1(x) = e^x$$

$$g_2(x) = e^{e^x}$$

Obserwacje N. Hellersteina

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R},\quad f(x+1) = e^{f(x)},\quad f(0) = 0,$$

$$g_t(x) = f(f^{-1}(x) + t),\quad t \in \mathbb{R}$$

$$x +_t y = g_t(g_{-t}(x) + g_{-t}(y))$$

$\mathbb{R}$-parametryzowana struktura łącząca dodawanie i mnożenie:

$$x +_0 y = x + y$$

$$x +_1 y = x \cdot y$$

Obserwacje N. Hellersteina

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x+1) = e^{f(x)}, \quad f(0) = 0,$$

$$g_t(x) = f(f^{-1}(x) + t), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$x +_t y = g_t(g_{-t}(x) + g_{-t}(y))$$

Jakie działanie jest dokładnie w połowie między dodawaniem i mnożeniem?

$$x +_{\frac{1}{2}} y = g_{\frac{1}{2}}(g_{-\frac{1}{2}}(x) + g_{-\frac{1}{2}}(y))$$

Pytania

$$f\colon (-1, +\infty) \to \mathbb{R}, \;\; f(x+1) = e^{f(x)}, \;\; f(0) = 0,$$

$$g_t(x) = f(f^{-1}(x) + t), \;\; t \in \mathbb{R}$$

$$x +_t y = g_t(g_{-t}(x) + g_{-t}(y))$$

Różne interpretacje tej struktury!

Dziękuję bardzo za uwagę!