MATERIAŁY NA XXXV KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2014 **Łódź** **str. 9**

DRZEWA KUO-LU

WIELOMIANÓW QUASI-ZWYCZAJNYCH

Janusz Gwoździewicz (Kielce)

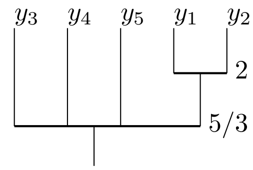
1. Wstęp

Niech $f(x,y)$ będzie szeregiem potęgowym dwóch zmiennych zespolonych o dodatnim promieniu zbieżności, takim że $f(0,y) = y^n +$ *wyrazy wyższych rzędów*. Znane twierdzenie Puiseux mówi, że $f(x,y)$ rozkłada na iloczyn $u(x,y)\prod_{i=1}^{n}(y - y_i(x))$ w którym $u(x,y)$ jest szeregiem potęgowym takim, że $u(0,0) \neq 0$ oraz $y_i(x)$ są szeregami Puiseux czyli szeregami potęgowymi w których dopuszcza się potęgi zmiennej x o wykładnikach wymiernych.

Jeśli $y_i(x) - y_j(x) = c_{ij}x^{\alpha_{ij}} +$ *wyrazy wyższych rzędów*, $c_{ij} \neq 0$, to wykładnik α_{ij} nazywamy kontaktem między $y_i(x)$ i $y_j(x)$ i oznaczamy $O(y_i, y_j)$. W artykule [4] Kuo i Lu wprowadzili kombinatoryczny obiekt w formie drzewa, opisujący kontakty pomiędzy szeregami $y_1, \ldots, y_n$. Zanim wypowiemy precyzyjną definicję, pokażemy jak wygląda drzewo Kuo–Lu pewnego szeregu.

Przykład 1.1. *Niech* $f(x,y) = (y^2 - x^4)(y^3 - x^5)$. *Wówczas* $f(x,y) = \prod_{i=1}^{5}(y - y_i(x))$ *gdzie* $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = -x^2$ *oraz* $y_i(x) = \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^i x^{5/3}$ *dla* $i = 3,4,5$.

Na rysunku jest drzewo Kuo–Lu szeregu $f(x,y)$. *Jego liśćmi są szeregi Puiseux* $y_1, \ldots, y_5$. *Poziome poprzeczki mają przypisane liczby zwane wysokościami. Kontakt* $O(y_i, y_j)$ *odczytujemy znajdując najwyżej położoną poprzeczkę z której wyrasta zarówno* y_i *jak i* y_j. *Tak więc* $O(y_1, y_2) = 2$ *bo tutaj wspólną poprzeczką jest górna* *natomiast* $O(y_1, y_4) = 5/3$ *bo w tym wypadku wspólną poprzeczką jest dolna.*



W [4] udowodniono, że drzewo Kuo–Lu szeregu $f(x,y)$ determinuje kontakty $O(y_i, z_j)$ pomiędzy pierwiastkami Puiseux $y_1, \dots, y_n$ szeregu $f(x,y)$ a pierwiastkami Puiseux $z_1, \dots, z_{n-1}$ pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = u'(x,y)\prod_{j=1}^{n-1}(y - z_j(x))$. Ten wynik pozwolił podać w [1] formułę na tak zwany jakobianowy diagram Newtona szeregu $f(x,y)$ w terminach jego drzewa Kuo–Lu.

Ważnymi pracami w których używa się jako narzędzia drzew Kuo–Lu są [3] oraz [5]. Z kolei autor udowodnił w [2], że drzewo Kuo–Lu szeregu $f(x,y)$ determinuje jego klasę ekwisingularności.

W tym artykule rozszerzamy konstrukcję drzewa Kuo–Lu na przypadek wielomianów quasi-zwyczajnych. Następnie opisujemy pewne naturalne symetrie drzew Kuo–Lu. Zwieńczeniem artykułu jest twierdzenie charakteryzujące drzewa Ku-Lu nierozkładalnych wielomianów quasi-zwyczajnych. Przedstawione tutaj wyniki są rezultatem współpracy z Evelią García Barroso z Uniwersytetu La Laguna i będą częścią wspólnej publikacji.

2. Wielomiany quasi-zwyczajne

Niech $\mathbf{K}$ będzie algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero i niech

$$f(Y) = Y^n + a_1(X_1, \dots, X_d)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X_1, \dots, X_d) \in \mathbf{K}[[X]][Y]$$

będzie unormowanym wielomianem zmiennej Y o współczynnikach z pierścienia szeregów formalnych $\mathbf{K}[[X]] = \mathbf{K}[[X_1, \dots, X_d]]$. Taki wielomian nazywamy *quasi-zwyczajnym* gdy jego wyróżnik jest postaci $u(X)X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$, gdzie $u(X)$ jest odwracalny w pierścieniu $\mathbf{K}[[X]]$, to znaczy $u(0) \neq 0$. Wielomian $f(Y)$ nazywamy *wielomianem Weierstrassa* gdy $a_i(0) = 0$ dla wszystkich $i = 1, \dots, n$.

Twierdzenie 2.1 (Twierdzenie Abhyankara–Junga)**.** *Niech* $f(Y) \in \mathbf{K}[[X]][Y]$ *będzie quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa. Wówczas istnieje taka liczba naturalna* k*, że wielomian* $f(Y)$ *ma pierwiastki w* $\mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$.

Twierdzenia Abhyankara-Junga w powyższej wersji udowodniono w [7]. Twierdzenie to odegrało ważną rolę w teorii osobliwości, bo było podstawą pierwszej metody rozwiązywania osobliwości powierzchni zespolonych.

W dalszym tekście będziemy zapisywać jednomiany $X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d}$ jako X^α, gdzie $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$.

Rozpatrzmy quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa $f(Y) \in \mathbf{K}[[X]][Y]$. Z twierdzenia Abhyankara–Junga dostajemy faktoryzację $f(Y) = \prod_{i=1}^n (Y - Y_i)$ gdzie wszystkie pierwiastki wielomianu należą do pewnego pierścienia $\mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$.

Ponieważ wyróżnik wielomianu $f(Y)$ jest iloczynem $\prod_{i<j}(Y_i - Y_j)^2$ więc różnice jego pierwiastków dzielą wyróżnik a zatem mają postać

$$Y_{ij} := Y_i - Y_j = u_{ij}(X)X^{\lambda_{ij}}, \quad \text{dla pewnych } u_{ij}(0) \neq 0, \lambda_{ij} \in (1/k)\mathbf{N}^d.$$

Wielkość $O\big(Y_i, Y_j\big) := \lambda_{ij}$ będziemy nazywać *kontaktem pomiędzy Y_i a Y_j*.

Wprowadźmy częściowy porządek w zbiorze $\mathbf{Q}^d$: $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \leq (\beta_1, \dots, \beta_d)$ wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_i \leq \beta_i$ dla wszystkich $i = 1, \dots, d$. Dodatkowo przyjmijmy konwencję, że $\alpha < +\infty$ dla $\alpha \in \mathbf{Q}^d$.

Lemat 2.2. *Niech α, β, $\gamma \in \mathbf{N}^d$ oraz niech $a(X)$, $b(X)$, $c(X)$ będą odwracalne w pierścieniu $\mathbf{K}[[X]]$. Jeśli $a(X)X^\alpha - b(X)X^\beta = c(X)X^\gamma$ to $\alpha \leq \beta$ lub $\beta \leq \alpha$.*

Krótki dowód tego lematu jest w [7]. Stosując Lemat 2.2 do Y_{ik}, Y_{jk}, Y_{ij} stwierdzamy, że dla dowolnych Y_i, Y_j, Y_k zachodzi jedna z nierówności: $O(Y_i, Y_k) \leq O(Y_j, Y_k)$ lub $O(Y_i, Y_k) \geq O(Y_j, Y_k)$. Ponadto zachodzi tak zwana *silna nierówność trójkąta*

$$O(Y_i, Y_j) \geq \min\{O(Y_i, Y_k), O(Y_j, Y_k)\}.$$

3. Drzewo Kuo–Lu

Konstrukcja drzewa Kuo–Lu szeregu dwóch zmiennych zespolonych $f(x, y)$ opiera się na tym, że kontakty między pierwiastkami Puiseux tego szeregu spełniają silną nierówność trójkąta. Powtórzymy tę konstrukcję, tak jak jest ona opisana w [5], dla quasi-zwyczajnego wielomianu Weierstrassa $f(Y)$.

Oznaczmy przez $\operatorname{Zer} f$ zbiór pierwiastków wielomianu $f(Y)$. Z silnej nierówności trójkąta wynika, że zbiór kontaktów $\{O(Y_i, Y_j) : Y_i, Y_j \in A\}$ dowolnego podzbioru $A \subset \operatorname{Zer} f$ posiada element najmniejszy.

Niech $B = \operatorname{Zer} f$ oraz niech $h(B)$ będzie minimalnym kontaktem pomiędzy elementami B. Zbiór B reprezentujemy jako poziomą poprzeczkę drzewa Kuo–Lu a wielkość $h(B)$ nazywamy *wysokością* B.

Relacja równoważności: $Y_i \equiv Y_j \Leftrightarrow O(Y_i, Y_j) > h(B)$, dzieli B na klasy równoważności B_1, …, B_k. Narysujmy k pionowych odcinków (gałęzi drzewa Kuo–Lu) wyrastających z B i na końcu i-tej gałęzi umieśćmy poziomą poprzeczkę reprezentująca B_i. Mówimy, że poprzeczki B_i *wyrastają z* B i piszemy $B \perp B_i$. Dla każdej z nowych poprzeczek powtórzmy tę konstrukcję rekurencyjnie tworząc kolejne gałęzie i poprzeczki. Nie zaznaczamy poprzeczek o nieskończonej wysokości reprezentujących zbiory jednoelementowe $\{Y_i\}$. Tak utworzone drzewo oznaczamy symbolem $T(f)$.

Zauważmy, że dla dowolnej poprzeczki $\bar{B}$ drzewa Kuo–Lu istnieje jedyny ciąg $B \perp B' \perp B'' \perp \cdots \perp \bar{B}$ rozpoczynający się od poprzeczki $B = \operatorname{Zer} f$ o najmniejszej wysokości. Ponadto, jeśli $B \perp B'$ to dla wszystkich $Y_i, Y_j \in B'$ jest $O(Y_i, Y_j) > h(B)$. W szczególności wszystkie $Y_i, Y_j \in B'$ mają taki sam jednomian $cX^{h(B)}$. Mówimy wtedy, że *poprzeczka B' jest podparta na poprzeczce B w punkcie* c i piszemy $B \perp_c B'$.

4. Symetrie drzew Kuo–Lu

Niech $U = \{\omega \in \mathbf{K} : \omega^k = 1\}$ będzie grupą multyplikatywną k-tych pierwiastków z jedynki. Z każdym układem $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_d) \in U^d$ skojarzymy homomorfizm $\mathbf{K}$-algebr $\phi_\epsilon : \mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]] \to \mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$ kładąc $\phi_\epsilon(X_i^{\frac{1}{k}}) = \epsilon_i X_i^{\frac{1}{k}}$ dla $i = 1, \dots, d$. Ponieważ $\phi_\epsilon(X_i) = \epsilon_i^k X_i = X_i$, więc homomorfizm ϕ_ϵ jest identycznością na $\mathbf{K}[[X]]$. Dla dowolnych $\epsilon, \omega \in U^d$ jest $\phi_\epsilon \circ \phi_\omega = \phi_{\epsilon\cdot\omega}$, gdzie iloczyn $\epsilon \cdot \omega$ jest brany po współrzędnych. Wynika stąd, że operacja $\epsilon * \psi(X) := \phi_\epsilon(\psi(X))$ jest działaniem grupy U^d na $\mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$. Jeśli $\psi(X) = \sum_{\alpha \in (1/k)\mathbf{N}^d} c_\alpha X^\alpha$, to $\epsilon * \psi(X) = \sum_{\alpha \in (1/k)\mathbf{N}^d} c_\alpha \epsilon^{k\alpha} X^\alpha$.

Sprawdzimy, że to działanie przeprowadza pierwiastki wielomianu $f(Y)$ na pierwiastki wielomianu $f(Y)$ oraz jest tranzytywne na zbiorze pierwiastków jeśli $f(Y)$ jest nierozkładalny w $\mathbf{K}[[X]][Y]$. Co więcej, zachowuje ono kontakt.

Własność 4.1.

(i) $\epsilon * \operatorname{Zer} f = \operatorname{Zer} f$ *dla każdego* $\epsilon \in U^d$,

(ii) *jeśli* $f(Y)$ *jest wielomianem nierozkładalnym w* $\mathbf{K}[[X]][Y]$ *to dla dowolnego* $Y_i \in \operatorname{Zer} f$ *jest* $U^d * Y_i = \operatorname{Zer} f$,

(iii) $O(Y_i, Y_j) = O(\epsilon * Y_i, \epsilon * Y_j)$ *dla dowolego* $\epsilon \in U^d$ *oraz* $i \neq j$.

Dowód. Ustalmy $\epsilon \in U^d$. Homomorfizm ϕ_ϵ rozszerza się w naturalny sposób do homomorfizmu $\Phi_\epsilon : \mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]][Y] \to \mathbf{K}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \dots, X_d^{\frac{1}{k}}]][Y]$. Działając Φ_ϵ na $f(Y) = \prod_{i=1}^n (Y - Y_i)$ otrzymujemy $f(Y) = \Phi_\epsilon(f(Y)) = \prod_{i=1}^n (Y - \phi_\epsilon(Y_i))$ co dowodzi *(i)*.

Ustalmy $Y_i \in \operatorname{Zer} f$ i niech $f_1(Y) = \prod_{Y(X) \in U^d * Y_i} (Y - Y(X))$. Dla dowolnego $\epsilon \in U^d$ zachodzi równość $\Phi_\epsilon(f_1(Y)) = f_1(Y)$. Wynika stąd, że $f_1(Y)$ ma współczynniki w pierścieniu $\mathbf{K}[[X]]$. Co więcej, na podstawie (i) wszystkie pierwiastki wielomianu $f_1(Y)$ są pierwiastkami $f(Y)$. Zaktem $f_1(Y)$ jest dzielnikiem $f(Y)$ co dowodzi *(ii)*.

Punkt *(iii)* wynika wprost z definicji kontaktu. ■

Dla dowolnego $\epsilon \in U^d$ odwzorowanie $\operatorname{Zer} f \ni Y_i \to \epsilon * Y_i \in \operatorname{Zer} f$ zachowuje kontakty. Wynika stąd, że dla dowolnej poprzeczki $B = \{Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k}\}$ drzewa Kuo–Lu wielomianu $f(Y)$ zbiór $\epsilon * B = \{\epsilon * Y_{i_1}, \dots, \epsilon * Y_{i_k}\}$ też jest poprzeczką tej samej wysokości oraz jeśli $B \perp B'$ to $\epsilon * B \perp \epsilon * B'$. Tak więc działanie ϵ na $\operatorname{Zer} f$ indukuje symetrię drzewa Kuo-Lu wielomianu $f(Y)$ zachowującą wysokość poprzeczek.

Każdą poprzeczkę $\epsilon * B$ będziemy nazywali *sprzężoną* z B. W dalszej części tego rozdziału obliczymy ilość poprzeczek sprzężonych z B. W rachunkach wykorzystamy fragment teorii grup dualnych zaczerpnięty z [6].

Niech C będzie grupą cykliczną rzędu k i niech G będzie skończoną grupą abelową, taką że $kg = 0$ dla każdego $g \in G$. Grupa dualna do G, oznaczana G^*, jest to grupa homomorfizmów G w C. Główne twierdzenie teorii grup dualnych stwierdza, że G^* jest izomorficzna z G.

Niech A, A' będą grupami przemiennymi. Odwzorowanie $A\times A' \to C,\ (x,x') \to \langle x,x'\rangle$ nazywamy *parowaniem* jeśli dla każdego $x' \in A'$ odwzorowanie $\phi_{x'} = \langle \cdot, x'\rangle$ jest homomorfizmem A w C oraz dla każdego $x \in A$ odwzorowanie $\psi_x = \langle x, \cdot\rangle$ jest homomorfizmem A' w C.

Dla dowolnych $a \in A$, $a' \in A'$ wprowadzamy relację ortogonalności pisząc $a \perp a'$ wtedy i tylko wtedy gdy $\langle a, a'\rangle = 0$. Dla dowolnego podzbioru $B \subset A$ definiujemy $B^\perp = \{x' \in A' :\ b \perp x' \text{ dla wszystkich } \ b \in B\}$. Analogicznie definiujemy $(B')^\perp$ dla $B' \subset A'$.

Twierdzenie 4.2 ([6], Theorem 9.2)**.** *Niech $A \times A' \to C$ będzie parowaniem grup abelowych w skończoną cykliczną grupę C. Załóżmy, że A' jest skończona. Wtedy grupa $A'/A^\perp$ jest izomorficzna z grupą dualną do $A/(A')^\perp$.*

Wniosek 4.3. *Niech $A \times A' \to C$ będzie parowaniem grup abelowych w skończoną cykliczną grupę C. Załóżmy, że A' jest skończona. Jeśli M, N są podgrupami grupy A takimi, że ${A'}^\perp \subset N \subset M$, to $[M : N] = [N^\perp : M^\perp]$.*

Dowód. Najpierw udowodnimy równość $(N^\perp)^\perp = N$.

Niech $a \in A \setminus N$. Wówczas istnieje $a' \in N^\perp$ taki, że $\langle a, a'\rangle \neq 0$. Faktycznie, w przeciwnym wypadku zachodziła by równość $N^\perp = N_1^\perp$, gdzie N_1 jest grupą generowaną przez $N \cup \{a\}$. Na podstawie Twierdzenia 4.2 grupa $A'/N^\perp = A'/N_1^\perp$ byłaby grupą dualną do $N/(A')^\perp$ oraz do $N_1/(A')^\perp$ ale to jest niemożliwe bo te grupy mają różną liczbę elementów. Zatem $a \notin (N^\perp)^\perp$. Ten fragment dowodu pokazuje, że $(N^\perp)^\perp \subset N$.

Niech $a \in N$. Wówczas dla dowolnego $a' \in N^\perp$ jest $a \perp a'$. Zatem $a \in (N^\perp)^\perp$ co daje $N \subset (N^\perp)^\perp$. Postulowana równość została udowodniona.

Z Twierdzenia 4.2 zastosowanego do parowania $M \times N^\perp \to C$ wynika, że $N^\perp/M^\perp$ jest grupą dualną do $M/(N^\perp)^\perp = M/N$. Ponieważ skończona grupa abelowa jest izomorficzna ze swoją grupą dualną, więc $[M : N] = [N^\perp : M^\perp]$. ■

Ten dowód kończy fragment atrykułu poświęcony grupom dualnym. W dalszym tekście korzysta się tylko z Wniosku 4.3. Zastosujemy go do pewnych podgrup grupy $(1/k)\mathbf{Z}^d$ skojarzonych z poprzeczkami drzewa Kuo-Lu.

Definicja 4.4. *Niech $B_0 \perp_{c_0} B_1 \perp_{c_1} \cdots \perp_{c_{r-2}} B_{r-1} \perp_{c_{r-1}} B_r = B$ będzie ciągiem poprzeczek drzewa $T(f)$ rozpoczynającym się od poprzeczki o najmniejszej wysokości. Niech $H(B) = \{h(B_i)\ :\ c_i \neq 0,\ 0 \leq i \leq r-1\} = \{h_1, \ldots, h_s\}$. Wówczas grupę $N(B) = \mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}h_1 + \cdots + \mathbf{Z}h_s$ nazywamy grupą poprzeczki B.*

Rozpatrzmy parowanie $(1/k)\mathbf{Z}^d \times U^d \ni (\lambda, \epsilon) \to \epsilon^{k\lambda} \in U$. Wprost z jego definicji wynika, że dla $\epsilon \in U^d$, $\lambda \in (1/k)\mathbf{N}^d$ zachodzi: $\epsilon * X^\lambda = X^\lambda$ wtedy i tylko wtedy gdy $\lambda \perp \epsilon$. Będziemy też korzystali z łatwej do sprawdzenia równości $(U^d)^\perp = \mathbf{Z}^d$.

Twierdzenie 4.5. *Każda poprzeczka B drzewa $T(f)$ ma $[N(B) : \mathbf{Z}^d]$ poprzeczek z nią sprzężonych.*

Niech $B \perp_c B'$. Wówczas: jeśli $c \neq 0$ to istnieje $[N(B) + \mathbf{Z}h(B) : N(B)]$ poprzeczek wyrastających z B i sprzężonych z B', jeśli $c = 0$ to jedyną poprzeczką wyrastającą z B i sprzężoną z B' jest B'.

Dowód. Dla $Y_i \in B$ oraz $\epsilon \in U^d$ kontakt pomiędzy Y_i a $\epsilon * Y_i$ jest większy lub równy $h(B)$ wtedy i tylko wtedy gdy $h \perp \epsilon$ dla wszystkich $h \in H(B)$, gdyż w przeciwnym wypadku jednomian X^h pojawił by się w różnicy $\epsilon * Y_i - Y_i$ z niezerowym współczynnikiem. Wynika stąd, że $\epsilon * B = B$ wtedy i tylko wtedy gdy $\epsilon \in N(B)^\perp$. Zatem stabilizatorem B pod działaniem grupy U^d jest $N(B)^\perp$. Na podstawie twierdzenia o indeksie stabilizatora i Wniosku 4.3 zbiór $U^d * B$ ma $[U^d : N(B)^\perp] = [N(B) : \mathbf{Z}^d]$ elementów co dowodzi pierwszej części twierdzenia.

Niech B' będzie poprzeczką wyrastającą z B. Jest jasne że poprzeczka $\epsilon * B'$ wyrasta z B wtedy i tylko wtedy gdy $\epsilon * B = B$. Zatem, z poprzedniej części dowodu wynika, że zbiór poprzeczek wyrastających z B i sprzężonych z B' jest równy $N(B)^\perp * B'$. Z poprzedniej części dowodu wynika też, że $N(B')^\perp$ jest stabilizatorem B' pod działaniem grupy U^d. Na podstawie twierdzenia o indeksie stabilizatora i Wniosku 4.3 zbiór $N(B)^\perp * B'$ ma $[N(B)^\perp : N(B')^\perp] = [N(B') : N(B)]$ elementów.

Załóżmy, że $c \neq 0$. Wtedy $[N(B') : N(B)] = [N(B) + \mathbf{Z}h(B) : N(B)]$.

Załóżmy, że $c = 0$. Wtedy $N(B') = N(B)$ a więc $[N(B') : N(B)] = 1$, co dowodzi, że zbiór poprzeczek wyrastających z B i sprzężonych z B' jest jednoelementowy. ■

5. Drzewo Kuo–Lu wielomianu nierozkładalnego

Niech $f(Y) \in \mathbf{K}[[X]][Y]$ będzie nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa. Z Własności 4.1 wynika, że zbiór kontaktów pomiędzy elementami $\mathrm{Zer}\, f$ a ustalonym $Y_k \in \mathrm{Zer}\, f$ nie zależy od wyboru Y_k. Jeśli $\{O(Y_j, Y_i) : j \neq i\} = \{h_1, \dots, h_g\}$, gdzie $h_1 < h_2 < \cdots < h_g$ to $h_1, h_2, \dots, h_g$ nazywamy *ciągiem wykładników charakterystycznych* wielomianu $f(Y)$.

Udowodnimy, że drzewo Kuo–Lu wielomianu $f(Y)$ zależy tylko od tego ciągu.

Twierdzenie 5.1. *Niech $f(Y) \in \mathbf{K}[[X_1, \dots, X_d]][Y]$ będzie nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa i niech $h_1, h_2, \dots, h_g$ będzie ciągiem jego wykładników charakterystycznych. Niech $N_0 = \mathbf{Z}^d$, $N_i = \mathbf{Z}^d + \mathbf{Z}h_1 + \cdots + \mathbf{Z}h_i$ dla $i = 1, \dots, g$. Wówczas drzewo $T(f)$ jest scharakteryzowane dwiema własnościami:*

- (i) *wysokości poprzeczek drzewa $T(f)$ tworzą zbiór $\{h_1, \dots, h_g, h_{g+1}\}$, gdzie $h_{g+1} = +\infty$,*
- (ii) *dla dowolnego $i \in \{1, \dots, g\}$ każda poprzeczka o wysokości h_i ma $[N_i : N_{i-1}]$ poprzeczek z niej wyrastających i wszystkie one mają wysokość h_{i+1}.*

Dowód. Część (i) wynika bezpośrednio z definicji ciągu wykładników charakterystycznych. Ponadto, ponieważ działanie U^d na $\mathrm{Zer}\, f$ jest tranzytywne, to z każdej poprzeczki o wysokości h_i wyrastają tylko poprzeczki o wysokości h_{i+1} i wszystkie poprzeczki o ustalonej wysokości są sprzężone.

Aby udowodnić część (ii) zauważmy, że gdy $h(B) = h_i$ to $N(B) = N_{i-1}$ dlatego, że wszystkie jednomiany X^{h_j} dla $1 \leq i \leq g$ występują z niezerowymi współczynnikami w każdym $Y_j \in \mathrm{Zer}\, f$. Zastosowanie części (ii) Twierdzenia 4.5 do B kończy dowód. ■

Nazwijmy drzewo Kuo–Lu spełniające warunki (i), (ii) Twierdzenia 5.1 *drzewem typu* $(h_1, h_2, \dots, h_g)$.

Twierdzenie 5.2. *Jeśli drzewo Kuo–Lu quasi-zwyczajnego wielomianu Weierstrassa* $f(Y) \in \mathbf{K}[[X]][Y]$ *jest drzewem typu* $(h_1, h_2, \dots, h_g)$ *to* $f(Y)$ *jest nierozkładalny oraz* $h_1, h_2, \dots, h_g$ *jest jego ciągiem wykładników charakterystycznych.*

Dowód. Na podstawie warunków (i), (ii) drzewo $T(f)$ ma $[N_1 : N_0] \cdot [N_2 : N_1] \cdots [N_g : N_{g-1}] = [N_g : \mathbf{Z}^d]$ poprzeczek nieskończonej wysokości.

Poprzeczka B o najmniejszej wysokości $h(B) = h_1$ posiada co najmniej dwie poprzeczki z niej wyrastające. Wybierzmy jako B' tę poprzeczkę, która jest podparta w punkcie różnym od zera. Dokonując podobnego wyboru poprzeczki wyrastającej z B' i powtarzając to postępowanie $g-1$ razy dochodzimy do pewnej poprzeczki $\bar{B}$ o nieskończonej wysokości. Jest jasne, że $N(\bar{B}) = N_g$. Z Twierdzenia 4.5 wynika, że liczba poprzeczek sprzężonych z $\bar{B}$ wynosi $[N_g : \mathbf{Z}^d]$.

Zatem wszystkie poprzeczki drzewa $T(f)$ o nieskończonej wysokości są ze sobą sprzężone. Wynika stąd, że wszystkie pierwiastki wielomianu $f(Y)$ są sprzężone poprzez działanie grupy U^d a więc $f(Y)$ jest nierozkładalny w $\mathbf{K}[[X]][Y]$. ■

Literatura

[1] E. R. García Barroso, J. Gwoździewicz, *Characterization of Jacobian Newton polygons of plane branches and new criteria of irreducibility,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble 60 (2), (2010), 683–709.

[2] J. Gwoździewicz, *Kryterium Puiseux topologicznej równoważności krzywych,* Materiały XXIV konferencji szkoleniowej z geometrii analitycznej i algebraicznej zespolonej, str. 9–13, Łódź 6–10 stycznia 2003 r.

[3] S. Izumi, S. Koike and T.C. Kuo. *Computations and Stability of the Fukui Invariant,* Compositio Mathematica 130 (2002), 49–73.

[4] T-C. Kuo, Y. C. Lu, *On analytic function germ of two complex variables,* Topology 16 (1977), 299–310.

[5] T-C. Kuo, A. Parusiński, *Newton-Puiseux roots of Jacobian determinants,* Journal of Algebraic Geometry, 13 (3), (2004), 579–602.

[6] S. Lang, Algebra, Graduate Texts in Mathematics 211, Revised Third Edition (2002).

[7] A. Parusiński, G. Rond, *The Abhyankar-Jung Theorem,* Journal of Algebra 365 (2012) 29–41.

The Kuo–Lu tree of a quasi-ordinary polynomial

Summary. The notion of Kuo–Lu tree is applied to quasi-ordinary Weierstrass polynomials. Some natural symmetries of Kuo–Lu trees are described. As an application the characterization of Kuo–Lu tree of an irreducible quasi-ordinary Weierstrass polynomial is given.

Department of Mathematics
Kielce University of Technology
AL. 1000 L PP 7
25-314 Kielce, Poland
e-mail: `matjg@tu.kielce.pl`

Łódź, 6 – 10 stycznia 2014 r.