K. Grzelakowski

Katedra Geometrii Algebraicznej i Informatyki Teoretycznej
University of Łódź

Geometria Analityczna i Algebraiczna,
Styczeń 2020

Plan referatu

Plan referatu

Niech $X = V(F)$ gdzie F jest jednorodnym (nierozkładalnym), wielomianem piątego stopnia pięciu zmiennych. Wówczas X jest trójwymiarową kwintyką w $\mathbb{P}^4$. Załómy dodatkowo, że jedynymi osobliwościami X są zwykłe punkty potrójne.

Niech $X = V(F)$ gdzie F jest jednorodnym (nierozkładalnym), wielomianem piątego stopnia pięciu zmiennych. Wówczas X jest trójwymiarową kwintyką w $\mathbb{P}^4$. Załómy dodatkowo, że jedynymi osobliwościami X są zwykłe punkty potrójne.

Definicja

Zwykłym punktem potrójnym (Ordinary Triple Point) zbioru X nazywamy taki punkt, w którym równanie X lokalnie przyjmuje postać $f = q_3 + \ldots$ gdzie $V(q_3)$ jest gładkim zbiorem algebraicznym w $\mathbb{P}^3$.

Twierdzenie (R. Kloosterman, S.Rams (2019))

Przy powyższych założeniach, jeżeli istnieje taka hiperpłaszczyzna H, że $X \cap H$ jest rozkładalny to X posiada co najwyżej 10 OTP.

Twierdzenie (R. Kloosterman, S.Rams (2019))

Przy powyższych założeniach, jeżeli istnieje taka hiperpłaszczyzna H, że $X \cap H$ jest rozkładalny to X posiada co najwyżej 10 OTP.

Twierdzenie (Varchenko (1983))

X posiada co najwyżej 11 OTP.

Twierdzenie (R. Kloosterman, S.Rams (2019))

Przy powyższych założeniach, jeżeli istnieje taka hiperpłaszczyzna H, że $X \cap H$ jest rozkładalny to X posiada co najwyżej 10 OTP.

Twierdzenie (Varchenko (1983))

X posiada co najwyżej 11 OTP.

Hipoteza

X posiada co najwyżej 10 OTP.

Plan referatu

1. Problem
2. Twierdzenie
3. Dowód

Twierdzenie

Jeżeli istnieje X posiadający 11 *OTP to istnieje krzywa stopnia* 15 *w* $\mathbb{P}^2$ *posiadająca* 10 *punktów potrójnych i* 6 *punktów krotności* 5.

Plan referatu

1. Problem
2. Twierdzenie
3. Dowód

Propozycja (R. Kloosterman, S.Rams (2019))

Niech X będzie trójwymiarową kwintyką, a $P_1, \dots, P_i$ jej potrójnymi punktami osobliwymi. Wówczas:

1. *Prosta przechodząca przez dwa z punktów P_i jest zawarta w X*
2. *Żadne trzy punkty osobliwe nie są współliniowe*
3. *Płaszczyzna w $\mathbb{P}^4$ zawiera co najwyżej 4 OTP i zachodzi to wtedy i tylko wtedy gdy jest zawarta w X.*
4. *Jeżeli X zawiera płaszczyznę to ma co najwyżej 10 OTP.*

Twierdzenie

Niech X będzie jak w założeniach. Niech p będzie rzutowaniem X na $\mathbb{P}^3$ z punkty A będącego OTP . Wówczas p jest podwójnym nakryciem $\mathbb{P}^3$ rozgałęzionym wzdłuż powierzchni S ósmego stopnia. Niech L będzie prostą przechodącą przez A. Wówczas może zajść:

1. *Jeżeli $\#(X \cap L) = 3$ to obraz L jest poza S.*
2. *Jeżeli $\#(X \cap L) = 2$ to obraz L jest punktem zwyczajnym S.*
3. *Jeżeli $\#(X \cap L) = 1$ to obraz L jest punktem zwyczajnym S.*
4. *Jeżeli L zawiera się w X ale nie przechodzi przez inny punkt potrójny X to obraz L jest punktem podwójnym S.*
5. *Jeżeli L przechodzi przez jeszcze jeden punkt potrójny X to obraz L jest punktem poczwórnym S.*

Idea dowodu.

Możemy przyjąć, że $A = [1 : 0 : 0 : 0 : 0]$. Wówczas, $X = V(F)$ i $F = x^2 q_3 + x q_4 + q_5$ gdzie q_i są wielomianami jednorodnymi zmiennych y, z, t, u. Wówczas $S = V(G)$ gdzie $G = q_4^2 - 4 q_3 q_5 \subset \mathbb{P}^3$.
Analiza pochodnych cząstkowych F i G łatwo prowadzi do powyższych wniosków. $\square$

Twierdzenie

Jeżeli X posiada 11 OTP to S posiada krzywą osobliwą.

Twierdzenie

Jeżeli X posiada 11 OTP to S posiada krzywą osobliwą.

Twierdzenie (S.Cynk 1999)

Powierzchnia ósmego stopnia w $\mathbb{P}^3$ może posiadać co najwyżej 8 izolowanych punktów poczwórnych.

Twierdzenie (Wniosek)

$S_{Sing} = V(q_3) \cap V(q_4) \cap V(q_5) \subset \mathbb{P}^3$

Z twierdzenia Cynka wynika, że S_{Sing} jest krzywą będącą przecięciem krzywych C_{12} i C_{15}, które są równe odpowiednio $V(q_3) \cap V(q_4)$ oraz $V(q_3) \cap V(q_5)$. Możemy je rozpatrywać jako krzywe na $V(q_3)$ czyli na gładkiej kubice w $\mathbb{P}^3$. Można pokazać, że obrazami punktów potrójnych na X są odpowiednio punkty podwójne na C_{12} i potrójne na C_{15}.

Znany fakt - gładka kubika w $\mathbb{P}^2$ jest rozdmuchaniem $\mathbb{P}^2$ w sześciu punktach w generalnym położeniu (Hartshorne). C_{15} po zdmuchaniu do $\mathbb{P}^2$ jest krzywą stopnia 15, która zachowuje swoje 10 punktów podwójnych a w dodatku pięciokrotnie zawiera każdy z punktów rozdmuchania. To kończy dowód.

- S. Cynk *Number of ordinary multiple points on a hypersurface in* $\mathbb{P}^3$ *of Deg*$\leq$ 8 Geometriae Dedicata, 2001
- R. Hartshorne *Algebraic Geometry*, Springer, New York, 1997
- R. Kloosterman, S. Rams *Quintic threefolds with triple points*, Communications in Contemporary Mathematics, 2019
- D. van Straten *A quintic hypersurface in* $\mathbb{P}^4$ *with 130 nodes*, Topology 32 (1993)
- A. N. Varchenko, *Semicontinuity of the spectrum and an upper bound for the number of singular points on the projective hypersurface*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 270 (1983)