Pierwiastki aproksymatywne wielomianów quasi-zwyczajnych

Beata Gryszka

Instytut Matematyki
Uniwersytetu Pedagogicznego w Krakowie

6–10 stycznia 2020

Twierdzenie

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką zawierającym $\mathbb{Q}$ jako podpierścień. Jeśli $f \in A[Y]$ jest unitarny oraz $d \mid \deg f$, to istnieje dokładnie jeden wielomian unitarny $w \in A[Y]$ stopnia $\frac{\deg f}{d}$ spełniający warunek $\deg(f - w^d) < \deg f - \deg w$.

Twierdzenie

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką zawierającym $\mathbb{Q}$ jako podpierścień. Jeśli $f \in A[Y]$ jest unitarny oraz $d \,|\, \deg f$, to istnieje dokładnie jeden wielomian unitarny $w \in A[Y]$ stopnia $\frac{\deg f}{d}$ spełniający warunek $\deg(f - w^d) < \deg f - \deg w$.

Wielomian w z powyższego twierdzenia nazywamy d–tym pierwiastkiem aproksymatywnym wielomianu f oraz oznaczamy go symbolem $\sqrt[d]{f}$.

Twierdzenie

Niech A będzie pierścieniem przemiennym z jedynką zawierającym $\mathbb{Q}$ jako podpierścień. Jeśli $f \in A[Y]$ jest unitarny oraz $d \,|\, \deg f$, to istnieje dokładnie jeden wielomian unitarny $w \in A[Y]$ stopnia $\frac{\deg f}{d}$ spełniający warunek $\deg(f - w^d) < \deg f - \deg w$.

Wielomian w z powyższego twierdzenia nazywamy d–tym pierwiastkiem aproksymatywnym wielomianu f oraz oznaczamy go symbolem $\sqrt[d]{f}$.

Przykład

- Jeśli $f = Y^d + a_{d-1}Y^{d-1} + \cdots + a_0 \in A[Y]$, to $\sqrt[d]{f} = Y + \frac{a_{d-1}}{d}$.
- Jeśli $f = Y^4 + a_3Y^3 + a_2Y^2 + a_1Y + a_0 \in A[Y]$, to $\sqrt[2]{f} = Y^2 + \frac{1}{2}a_3Y + \frac{1}{2}a_2 - \frac{1}{8}a_3^2$.

Mówimy, że wielomian

$$f = Y^m + a_{m-1}Y^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$$

jest wielomianem Weierstrassa jeśli $a_i(0) = 0$ dla $i = 0, \ldots, m-1$. Wielomian f nazywamy quasi-zwyczajnym jeśli jego wyróżnik jest postaci $uX_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$, gdzie $u \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$, $u(0) \neq 0$ oraz $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

Mówimy, że wielomian

$$f = Y^m + a_{m-1}Y^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$$

jest wielomianem Weierstrassa jeśli $a_i(0) = 0$ dla $i = 0, \ldots, m-1$. Wielomian f nazywamy quasi-zwyczajnym jeśli jego wyróżnik jest postaci $uX_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n}$, gdzie $u \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$, $u(0) \neq 0$ oraz $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$.

Uwaga

(i) Każdy unitarny czynnik wielomianu quasi-zwyczajnego jest quasi-zwyczajny.

(ii) Każdy unitarny czynnik wielomianu Weierstrassa jest wielomianem Weierstrassa.

(iii) W przypadku jednej zmiennej każdy wielomian Weierstrassa jest wielomianem quasi-zwyczajnym.

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\operatorname{Zer} f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$
- $q = (q_1, \ldots, q_n), q' = (q'_1, \ldots, q'_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$:

$$q \leqslant q' \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \ldots, n\}}\ q_i \leqslant q'_i$$

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$
- $q = (q_1, \ldots, q_n), q' = (q'_1, \ldots, q'_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$:
$$q \leqslant q' \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \ldots, n\}}\ q_i \leqslant q'_i$$

- $\{\lambda_{ij} : i \neq j\} = \{h_1, \ldots, h_s\}$, $h_1 < \cdots < h_s$ (charakterystyka wielomianu f)

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$
- $q = (q_1, \ldots, q_n), q' = (q'_1, \ldots, q'_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$:

$$q \leqslant q' \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \ldots, n\}}\ q_i \leqslant q'_i$$

- $\{\lambda_{ij} : i \neq j\} = \{h_1, \ldots, h_s\}$, $h_1 < \cdots < h_s$ (charakterystyka wielomianu f)
- $M_0 = \mathbb{Z}^n$, $M_i = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}h_1 + \cdots + \mathbb{Z}h_i$, $i = 1, \ldots, s$

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$
- $q = (q_1, \ldots, q_n), q' = (q'_1, \ldots, q'_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$:
$$q \leqslant q' \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \ldots, n\}}\ q_i \leqslant q'_i$$

- $\{\lambda_{ij} : i \neq j\} = \{h_1, \ldots, h_s\}$, $h_1 < \cdots < h_s$ (charakterystyka wielomianu f)
- $M_0 = \mathbb{Z}^n$, $M_i = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}h_1 + \cdots + \mathbb{Z}h_i$, $i = 1, \ldots, s$
- $M_0 < M_1 < \cdots < M_s < (\frac{1}{m}\mathbb{Z})^d$

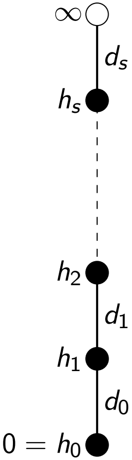
- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\operatorname{Zer} f = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \dots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$
- $q = (q_1, \dots, q_n), q' = (q'_1, \dots, q'_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$:

$$q \leqslant q' \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1,\dots,n\}}\ q_i \leqslant q'_i$$

- $\{\lambda_{ij} : i \neq j\} = \{h_1, \dots, h_s\}$, $h_1 < \cdots < h_s$ (charakterystyka wielomianu f)
- $M_0 = \mathbb{Z}^n$, $M_i = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}h_1 + \cdots + \mathbb{Z}h_i$, $i = 1, \dots, s$
- $M_0 < M_1 < \cdots < M_s < (\frac{1}{m}\mathbb{Z})^d$
- $d_i := [M_i : M_0]$, $i = 0, \dots, s$

- f - nierozkładalny quasi-zwyczajny wielomian Weierstrassa,
- $\operatorname{Zer} f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \subset \mathbb{K}[[X_1^{1/m}, \ldots, X_n^{1/m}]]$
- dla $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$ definiujemy $\underline{X}^q := X_1^{q_1} \cdots X_n^{q_n}$.
- dla $i \neq j$ mamy $\alpha_i - \alpha_j = u_{ij}\underline{X}^{\lambda_{ij}}$, gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$
- $q = (q_1, \ldots, q_n), q' = (q'_1, \ldots, q'_n) \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$:
$$q \leqslant q' \Leftrightarrow \forall_{i \in \{1, \ldots, n\}}\ q_i \leqslant q'_i$$

- $\{\lambda_{ij} : i \neq j\} = \{h_1, \ldots, h_s\}$, $h_1 < \cdots < h_s$ (charakterystyka wielomianu f)
- $M_0 = \mathbb{Z}^n$, $M_i = \mathbb{Z}^n + \mathbb{Z}h_1 + \cdots + \mathbb{Z}h_i$, $i = 1, \ldots, s$
- $M_0 < M_1 < \cdots < M_s < (\frac{1}{m}\mathbb{Z})^d$
- $d_i := [M_i : M_0]$, $i = 0, \ldots, s$
- $c_i := \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{1}{d_{j-1}} - \frac{1}{d_j}\right) h_j + \frac{1}{d_i} h_i$, $i = 1, \ldots, s$



Drzewo Wall-Eggersa nierozkładalnego quasi-zwiczajnego wielomianu Weierstrassa o charakterystyce $h_1 < \cdots < h_s$.

Niech $f = Y^4 - 2X_1^3X_2^2Y^2 - 4X_1^5X_2^4Y - X_1^7X_2^6 + X_1^6X_2^4$. Wielomian $f \in \mathbb{C}[[X_1, X_2]][Y]$ jest quasi-zwyczajny, Weierstrassa, nierozkładalny oraz

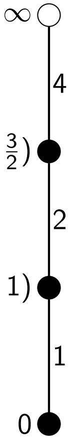
$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= X_1^{3/2}X_2 + X_1^{7/4}X_2^{3/2} \\
\alpha_2 &= X_1^{3/2}X_2 - X_1^{7/4}X_2^{3/2} \\
\alpha_3 &= -X_1^{3/2}X_2 + \sqrt{-1}X_1^{7/4}X_2^{3/2} \\
\alpha_4 &= -X_1^{3/2}X_2 - \sqrt{-1}X_1^{7/4}X_2^{3/2}.
\end{aligned}$$

$$h_1 = (\tfrac{3}{2}, 1), \quad h_2 = (\tfrac{7}{4}, \tfrac{3}{2}),$$

$$\begin{aligned}
M_0 &= \mathbb{Z}^2, \\
M_1 &= \mathbb{Z}^2 + (\tfrac{3}{2}, 1)\mathbb{Z}, \\
M_2 &= \mathbb{Z}^2 + (\tfrac{3}{2}, 1)\mathbb{Z} + (\tfrac{7}{4}, \tfrac{3}{2})\mathbb{Z},
\end{aligned}$$

$$d_0 = 1, \quad d_1 = 2, \quad d_2 = 4,$$

$$c_1 = (\tfrac{3}{2}, 1), \quad c_2 = (\tfrac{13}{8}, \tfrac{5}{2}).$$



Drzewo Walla-Eggersa wielomianu
$f = Y^4 - 2X_1^3X_2^2Y^2 - 4X_1^5X_2^4Y - X_1^7X_2^6 + X_1^6X_2^4$.

Niech f, g będą nierozkładalnymi quasi-zwyczajnymi wielomianami Weierstrassa, $\mathrm{Zer}\, f = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, $\mathrm{Zer}\, g = \{\beta_1, \ldots, \beta_l\}$. Załóżmy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, m\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, l\}$ mamy

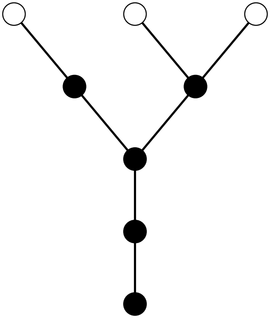
$$\alpha_i - \beta_j = u_{ij} \underline{X}^{\lambda_{ij}}$$

gdzie $u_{ij}(0) \neq 0$ oraz $\lambda_{i,j} \in \mathbb{Q}^n_{\geqslant 0}$. Wtedy wektor

$$\mathrm{cont}(f, g) := \max\{\lambda_{ij} : i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, l\}\}$$

jest dobrze zdefiniowany i nazywamy go kontaktem pomiędzy wielomianami f oraz g.

Jeśli f jest quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa oraz $f = \varphi_1 \cdots \varphi_r$, gdzie $\varphi_i \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$ są nierozkładalne, to drzewo Wall-Eggersa wielomianu f tworzymy dodając punkty $\mathrm{cont}(\varphi_i, \varphi_j)$ na drzewach Wall-Eggersa wielomianów φ_i, φ_j oraz sklejamy te drzewa na wysokości $\mathrm{cont}(\varphi_i, \varphi_j)$.



Drzewo Walla-Eggersa rozkładalnego quasi-zwyczajnego wielomianu Weierstrassa.

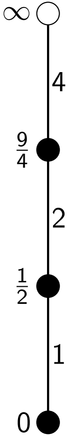
Rozważmy taki wielomian $F = fg$, że pierwiastkami f są

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= X^{1/2} + X^2 + X^{9/4}, \\
\alpha_2 &= X^{1/2} + X^2 - X^{9/4}, \\
\alpha_3 &= -X^{1/2} + X^2 + \sqrt{-1}X^{9/4}, \\
\alpha_4 &= -X^{1/2} + X^2 - \sqrt{-1}X^{9/4}
\end{aligned}$$

natomiast pierwiastkami g są

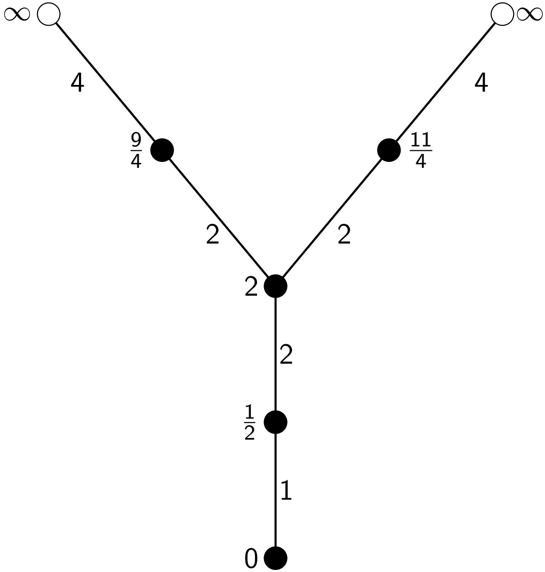
$$\begin{aligned}
\beta_1 &= X^{1/2} - X^2 + X^{11/4}, \\
\beta_2 &= X^{1/2} - X^2 - X^{11/4}, \\
\beta_3 &= -X^{1/2} - X^2 - \sqrt{-1}X^{11/4}, \\
\beta_4 &= -X^{1/2} - X^2 + \sqrt{-1}X^{11/4}.
\end{aligned}$$

Wielomiany $f, g \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ są nierozkładalne, quasi-zwyczajne, Weierstrassa.



Drzewo Walla-Eggersa wielomianu f.

Drzewo Walla-Eggersa wielomianu g.



Drzewo Walla-Eggersa wielomianu $F = fg$.

Mówimy, że d–ty pieriastek aproksymatywny quasi-zwyczajnego wielomianu Weierstrassa f jest charakterystyczny, jeśli $d = \frac{\deg f}{d_k}$ dla pewnego $k = 0, \ldots, s$, a w przeciwnym razie $\sqrt[d]{f}$ nazywamy niecharakterystycznym.

Mówimy, że d–ty pieriastek aproksymatywny quasi-zwyczajnego wielomianu Weierstrassa f jest charakterystyczny, jeśli $d = \frac{\deg f}{d_k}$ dla pewnego $k = 0, \ldots, s$, a w przeciwnym razie $\sqrt[d]{f}$ nazywamy niecharakterystycznym.

Wielościanem Newtona szeregu $g = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} c_a \underline{X}^a \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$ nazywamy zbiór $\Delta(g) := \mathrm{conv}(\bigcup_{c_a \neq 0}(a + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}))$.

Mówimy, że d–ty pieriastek aproksymatywny quasi-zwyczajnego wielomianu Weierstrassa f jest charakterystyczny, jeśli $d = \frac{\deg f}{d_k}$ dla pewnego $k = 0, \ldots, s$, a w przeciwnym razie $\sqrt[d]{f}$ nazywamy niecharakterystycznym.

Wielościanem Newtona szeregu $g = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} c_a \underline{X}^a \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]]$ nazywamy zbiór $\Delta(g) := \mathrm{conv}(\bigcup_{c_a \neq 0}(a + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}))$.

Odległością logarytmiczną dwóch nierozkładalnych wielomianów Weierstrassa $f, g \in \mathbb{K}[[\underline{X}]][Y]$ nazywamy zbiór

$$\mathrm{cont}_A(f, g) := \frac{1}{(\deg f)(\deg g)} \Delta(\mathrm{Res}(f, g)).$$

Dla nierozkładalnych quasi-zwyczajnych wielomianów Weierstrassa f, g, h prawdziwa jest nierówność trójkąta

$$\mathrm{cont}_A(f,g) \geqslant \inf\{\mathrm{cont}_A(f,h), \mathrm{cont}_A(h,g)\},$$

gdzie $\inf\{A, B\}$ oznacza otoczkę wypukłą $A \cup B$. W tym przypadku odległość logarytmiczną nazywamy kontaktem logarytmicznym.

Twierdzenie (Abhyankar-Moh, 1973)

Niech $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ *będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce* $h_1 < \cdots < h_s$ *oraz* $d = \frac{\deg f}{d_k}$. *Wtedy*

(i) $\sqrt[d]{f}$ *jest nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce* $h_1 < \cdots < h_k$;

(ii) $\mathrm{cont}_A\left(f, \sqrt[d]{f}\right) = \Delta(X^{c_{k+1}})$.

Twierdzenie (Abhyankar-Moh, 1973)

Niech $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ *będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce* $h_1 < \cdots < h_s$ *oraz* $d = \frac{\deg f}{d_k}$*. Wtedy*

(i) $\sqrt[d]{f}$ *jest nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce* $h_1 < \cdots < h_k$*;*

(ii) $\mathrm{cont}_A\left(f, \sqrt[d]{f}\right) = \Delta(X^{c_{k+1}})$.

Twierdzenie (Abhyankar-Moh, 1975)

Niech $f, g \in \mathbb{K}[T]$*. Jeśli* $\mathbb{K}[f, g] = \mathbb{K}[T]$*, to*

(i) $\deg f \,|\, \deg g$ *lub* $\deg g \,|\, \deg f$*;*

(ii) $(f, g) = (F(T, 0), G(T, 0))$ *dla pewnego automorfizmu wielomianowego* $(F, G) \in \mathbb{K}[X, Y]^2$*.*

Twierdzenie (González Pérez, 2003)

Niech $f \in \mathbb{K}[[X_1, \dots, X_n]][Y]$ *będzie nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce* $h_1 < \dots < h_s$ *oraz* $d = \frac{\deg f}{d_k}$. *Wtedy*

(i) $\sqrt[d]{f}$ *jest nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce* $h_1 < \dots < h_k$;

(ii) $\mathrm{cont}_A\left(f, \sqrt[d]{f}\right) = \Delta(\underline{X}^{c_{k+1}})$.

Twierdzenie (Brzostowski, 2011)

Niech $f \in \mathbb{K}[[X]][Y]$ będzie nierozkładalnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce $h_1 < \cdots < h_s$ oraz $d \mid \deg f$. Załóżmy, że $k \in \{0, \ldots, s\}$ jest największym indeksem, dla którego $d \mid \frac{\deg f}{d_k}$. Jeśli p jest nierozkładalnym czynnikiem $\sqrt[d]{f}$, to

$$\mathrm{cont}_A(f, p) = \Delta(X^{c_{k+1}}).$$

Twierdzenie 1

Niech $f \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$ będzie quasi-zwyczajnym wielomianem Wierstrassa oraz $d = \frac{\deg f}{d_k}$, gdzie d_k leży poniżej ostatniego miejsca na pniu drzewa Walla-Eggersa wielomianu f. Wtedy

(i) $\sqrt[d]{f}$ *jest nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce $h_1 < \cdots < h_k$;*

(ii) $\mathrm{cont}_A\left(f^*, \sqrt[d]{f}\right) = \Delta(\underline{X}^{c_{k+1}})$ *dla każdego nierozkładalnego unitarnego czynnika f^* wielomianu f.*

Twierdzenie 2

Niech $f \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$ *będzie nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa oraz* $d | \deg f$. *Załóżmy, że* $k \in \{0, \ldots, s\}$ *jest że* $d | \frac{\deg f}{d_k}$. *Jeśli* p *jest unitarnym czynnikiem nierozkładalnym wielomianu* $\sqrt[d]{f}$, *to*

$$\mathrm{cont}_A(f, p) = \Delta(\underline{X}^{c_{k+1}}).$$

Twierdzenie 3

Niech $f \in \mathbb{K}[[X_1, \ldots, X_n]][Y]$ *będzie quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa oraz* $d | \deg f$*. Załóżmy, że* $k \in \{0, \ldots, s\}$ *jest największym indeksem, dla którego* $d | \frac{\deg f}{d_k}$ *oraz* d_k *leży poniżej ostatniego miejsca na pniu drzewa Walla-Eggersa wielomianu* f*. Jeśli* p *jest unitarnym czynnikiem nierozkładalnym wielomianu* $\sqrt[d]{f}$*, to*

$$\mathrm{cont}_A(f^*, p) = \Delta(\underline{X}^{c_{k+1}})$$

dla każdego nierozkładalnego unitarnego czynnika f^* *wielomianu* f*.*

Wielomian

$$
\begin{aligned}
f &= Y^{12} + (-6X_1X_2^3 - 6X_1^3X_2^4)Y^{11} \\
&+ (15X_1^8X_2^6 + 30X_1^7X_2^7 + 15X_1^6X_2^8)Y^{10} \\
&+ (-20X_1 12X_2^9 - 60X_1^{11}X_2^{10} - 60X_1^{10}X_2^{11} - 20X_1^9X_2^{12} \\
&+ 30X_1^5X_2^3 + 30X_1^4X_2^4)Y^9 \\
&+ (15X_1^{16}X_2^{12} + 60X_1^{15}X_2^{13} + 90X_1^{14}X_2^{14} + 60X_1^{13}X_2^{15} \\
&+ 15X_1^{12}X_2^{16} - 63X_1^9X_2^6 - 126X_1^8X_2^7 - 63X_1^7X_2^8)Y^8 \\
&+ (-2X_1^3X_2 - 20X_1^3)Y^6 + (6X_1^4X_2 + 15X_1^4)Y^4 \\
&+ (-X_1^5X_2^2 - 6X_1^5X_2 - 6X_1^5)Y^2 + 2X_1^6X_2^2 + 2X_1^6X_2 + X_1^6
\end{aligned}
$$

jest nierozkładalnym wielomianem quasi-zwyczajnym Weierstrassa o charakterystyce $h_1 = (\frac{1}{2}, 0)$, $h_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $h_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Zatem $d_1 = 2$, $d_2 = 6$, $d_3 = 12$.

Trzecim pierwiastkiem aproksymatywnym wielomianu f jest

$$\sqrt[3]{f} = (Y^2 - X_1)(Y - {X_1}^{1/2} - X_1^3 X_2^3 (X_1 + X_2))(Y + {X_1}^{1/2} - X_1^3 X_2^3 (X_1 + X_2)),$$

który nie jest wielomianem quasi-zwyczajnym.

Niech $f \in \mathbb{K}[[\underline{X}]]$ będzie nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce $h_1 < \cdots < h_s$. Jeśli $\alpha \in \operatorname{Zer} f$, to h_t–obcięciem szeregu α nazywamy szereg $\operatorname{trunc}_t(\alpha)$ otrzymany z szeregu α poprzez opuszczenie wszystkich składników rzędu $\geqslant h_t$.
Niech f_t będzie wielomianem minimalnym elementu $\operatorname{trunc}_t(\alpha)$ nad ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{K}[[\underline{X}]]$.

Niech $f \in \mathbb{K}[[\underline{X}]]$ będzie nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce $h_1 < \cdots < h_s$. Jeśli $\alpha \in \operatorname{Zer} f$, to h_t–obcięciem szeregu α nazywamy szereg $\operatorname{trunc}_t(\alpha)$ otrzymany z szeregu α poprzez opuszczenie wszystkich składników rzędu $\geqslant h_t$.
Niech f_t będzie wielomianem minimalnym elementu $\operatorname{trunc}_t(\alpha)$ nad ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{K}[[\underline{X}]]$.

Lemat

(i) $\operatorname{Zer} f_t = \{\operatorname{trunc}_t(\alpha_j) : \alpha_j \in \operatorname{Zer} f\}$,

(ii) *f_t jest nierozkładalnym quasi-zwyczajnym wielomianem Weierstrassa o charakterystyce $h_1 < \cdots < h_{t-1}$,*

(iii) $\deg f_t = d_{t-1}$,

(iv) $\operatorname{cont}_A(f, f_t) = c_t$.

Twierdzenie 4

Niech $f \in \mathbb{K}[[\underline{X}]][Y]$ będzie wielomianem quasi-zwyczajnym Weierstrassa, $h_1 < \cdots < h_t$ to początkowy ciąg punktów na pniu drzewa Walla-Eggersa wielomianu f oraz d niech będzie taką dodatnią liczbą naturalną, że $d \cdot d_{t-1} | \deg f$. Jeśli f^* jest nierozkładalnym czynnikiem wielomianu f, którego charakterystyka zawiera h_t oraz $\gamma \in \mathrm{Zer}\, f_t^*$, to

$$f(\gamma + Z\underline{X}^{h_t}) = aF\underline{X}^{d_{t-1} \cdot c_t} + \text{składniki wyższych rzędów}$$

$$\sqrt[d]{f}(\gamma + Z\underline{X}^{h_t}) = b\sqrt[d]{F}\underline{X}^{(d_{t-1} \cdot c_t)/d} + \text{składniki wyższych rzędów}$$

dla pewnych $a, b \in \mathbb{K}$, $b^d = a$ oraz pewnego unitarnego wielomianu $F \in \mathbb{K}[Z]$ stopnia $\frac{\deg F}{d_{t-1}}$. Ponadto, jeśli p jest nierozkładalnym czynnikiem $\sqrt[d]{f}$, to $\Delta(\mathrm{Res}(f_t^*, p)) \subset (d_{t-1} \deg p)\Delta(\underline{X}^{c_t})$.

Twierdzenie 5

Niech $f \in \mathbb{K}[[\underline{X}]][Y]$ *będzie wielomianem spełniającym założenia Twierdzenia 1 oraz* $d | \frac{\deg f}{d_{t-1}} = \deg F$. *Wtedy*

$$\sqrt[d]{F} = Z^s (Z^{n_t} - a_1)^{\ell_1} \cdots (Z^{n_t} - a_r)^{\ell_r},$$

gdzie $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}^*$ *są parami różne,* $\sqrt[d]{f} = \varphi^* \varphi_1 \cdots \varphi_r$, *czynniki* $\varphi^*, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$ *są względnie pierwsze oraz*

$$\varphi^*(\gamma + Z\underline{X}^{h_t}) = b^* Z^s \underline{X}^{q^*} + \text{składniki wyższych rzędów}$$

$$\varphi_i(\gamma + Z\underline{X}^{h_t}) = b_i (Z^{n_t} - a_i)^{\ell_i} \underline{X}^{q_i'} + \text{składniki wyższych rzędów.}$$

Ponadto, jeśli $\ell_i = 1$, *to* φ_i *jest nierozkładalnym wielomianem quasi-zwyczajnym Weierstrassa o charakterystyce* $(h_1, \ldots, h_t)$ *oraz jeśli* $s = 1$ *to* φ^* *jest nierozkładalnym wielomianem quasi-zwyczajnym Weierstrassa o charakterystyce* $(h_1, \ldots, h_{t-1})$.

Literatura I

[1] S. S. Abhyankar, T-T. Moh, *Newton-Puiseux Expansion and Generalized Tschirnhausen Transformation*, J. Reine Angew. Math. 260 (1973), 47-83; 261 (1973), 29-54.

[2] S. S. Abhyankar, T. Moh, *Embeddings of the Line in the Plane*, Ibid. 276 (1975), 148-166.

[3] S. Brzostowski, *Non-characteristic approximate roots of polynomials*, J. Algebra 343 (2011), 143–159.

[4] P. D. González Pérez, *The semigroup of a quasi-ordinary hypersurface*, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), no. 3, 383–399.

Literatura II

[5] J. Gwoździewicz, B. Hejmej, *On Abhyankar-Moh irreducibility criterion for quasi-ordinary polynomials*, preprint.

[6] T. Markwig, *A field of generalised Puiseux series for tropical geometry*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 68 (2010), no. 1, 79–92.

[7] P. Popescu-Pampu, *Sur le contact d'une hypersurface quasi-ordinaire avec ses hypersurfaces polaires*, J. Inst. Math. Jussieu 3 (2004), no. 1, 105–138.

[8] A. van den Essen, *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190. Birkhäuser Verlag, Basel, 2000.