Konferencja Geometria Analityczna i Algebraiczna

Analytic and Algebraic Geometry Conference

O zbiorach geproci

Łucja Farnik
Uniwersytet Pedagogiczny im. KEN w Krakowie

Łódź, 13 stycznia 2022

Wstęp

Referat motywowany wspólnym projektem z Lucą Chiantinim, Giuseppe Favacchio, Brianem Harbournem, Juanem Migliore, Tomaszem Szembergiem i Justyną Szpond

Zbiory geproci

Zbiory geproci

GEneral **PRO**jection is a **C**omplete **I**ntersection, w skrócie GEPROCI

Zbiory geproci

GEneral **PRO**jection is a **C**omplete **I**ntersection, w skrócie GEPROCI

Definicja

Mówimy, że zbiór $Z \subset \mathbb{P}^3$ składający się z ab punktów jest (a, b)-geproci, jeśli $a \leqslant b$ oraz rzutowanie Z z punktu ogólnego na płaszczyznę rzutową jest zupełnym przecięciem krzywych stopni a i b.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Z reguły rzutowanie zbioru punktów $Z \subset \mathbb{P}^3$ z punktu ogólnego $P \in \mathbb{P}^3$ na płaszczyznę rzutową nie jest zupełnym przecięciem.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Z reguły rzutowanie zbioru punktów $Z \subset \mathbb{P}^3$ z punktu ogólnego $P \in \mathbb{P}^3$ na płaszczyznę rzutową nie jest zupełnym przecięciem.

Przykład

Rzutowanie z punktu ogólnego zbioru Z złożonego z 7 niewspółliniowych punktów w $\mathbb{P}^3$ nie jest zupełnym przecięciem dwóch krzywych stopni a i b.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Z reguły rzutowanie zbioru punktów $Z \subset \mathbb{P}^3$ z punktu ogólnego $P \in \mathbb{P}^3$ na płaszczyznę rzutową nie jest zupełnym przecięciem.

Przykład

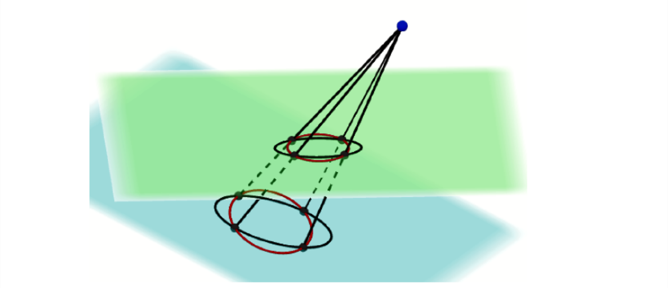
Rzutowanie z punktu ogólnego zbioru Z złożonego z 7 niewspółliniowych punktów w $\mathbb{P}^3$ nie jest zupełnym przecięciem dwóch krzywych stopni a i b.

Zatem Z nie jest zbiorem (a, b)-geproci dla żadnych a, b.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Przykład

Rzutowanie z punktu ogólnego P na płaszczyznę rzutową zupełnego przecięcia krzywych (zawartych w $\mathbb{P}^3$) leżących w jednej płaszczyźnie jest w oczywisty sposób zupełnym przecięciem.



Poszukiwanie zbiorów geproci

Wniosek

Zupełne przecięcie krzywych (zawartych w $\mathbb{P}^3$) leżących w jednej płaszczyźnie jest zbiorem geproci.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Pytanie (Francesco Polizzi, 2011, mathoverflow, pytanie nr 67265)

Czy istnieją przykłady zbiorów geproci w $\mathbb{P}^3$ różne od zupełnego przecięcia dwóch krzywych leżących na tej samej płaszczyźnie?

Poszukiwanie zbiorów geproci

Twierdzenie (Salvatore Giuffrida, 1986; Steven Diaz, 1986)

Liczba punktów przecięcia dwóch gładkich nierozkładanych krzywych $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ stopni odpowiednio a i b, nieleżących w jednej płaszczyźnie, jest ograniczona przez

$$(a-1)(b-1)+1.$$

Poszukiwanie zbiorów geproci

Twierdzenie (Salvatore Giuffrida, 1986; Steven Diaz, 1986)

Liczba punktów przecięcia dwóch gładkich nierozkładanych krzywych $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ stopni odpowiednio a i b, nieleżących w jednej płaszczyźnie, jest ograniczona przez

$$(a-1)(b-1)+1.$$

Ponadto maksymalna wartość jest osiągana, jeśli krzywe C_1 i C_2 leżą na tej samej kwadryce.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Wniosek

Zbiór punktów przecięcia dwóch gładkich nierozkładanych krzywych $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^3$ stopni odpowiednio a i b, nieleżących w jednej płaszczyźnie, nie jest zbiorem (a, b)-geproci.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Uwaga

Rzutowanie z punktu ogólnego zupełnego przecięcia trzech ogólnych kwadryk w $\mathbb{P}^3$ nie jest zupełnym przecięciem.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Uwaga

Rzutowanie z punktu ogólnego zupełnego przecięcia trzech ogólnych kwadryk w $\mathbb{P}^3$ nie jest zupełnym przecięciem.

Rzeczywiście, gdyby rzut 8 punktów przecięcia (nieleżących w jednej płaszczyźnie) był zupełnym przecięciem, to

albo $8 = 1 \cdot 8$, czyli punkty byłyby współliniowe,

albo $8 = 2 \cdot 4$, czyli punkty leżałyby na stożkowej.

Kraty (grids)

Kraty

Pozytywna odpowiedź na pytanie Polizziego (Dmitri Panov, 2011)

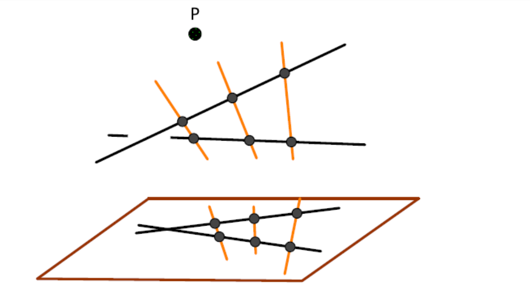
Weźmy dwie proste skośne w $\mathbb{P}^3$. Na każdej prostej wybierzmy po b punktów. Połączmy punkty b prostymi (skośnymi).

Kraty

Pozytywna odpowiedź na pytanie Polizziego (Dmitri Panov, 2011)

Weźmy dwie proste skośne w $\mathbb{P}^3$. Na każdej prostej wybierzmy po b punktów. Połączmy punkty b prostymi (skośnymi).

Rysunek dla $b = 3$



Kraty

Rzut z punktu ogólnego rozważanego zbioru $2b$ punktów jest zupełnym przecięciem.

Kraty

Definicja

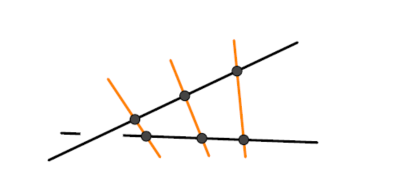
Niech a, b będą liczbami naturalnymi, $a \leqslant b$.

Zbiór $Z \subset \mathbb{P}^3$ złożony z ab punktów nazywamy (a, b)-kratą, jeśli istnieje zbiór parami skośnych prostych $L_1, \ldots, L_a$ oraz istnieje zbiór parami skośnych prostych $L'_1, \ldots, L'_b$, takich że $L_i \cap L'_j \neq \emptyset$ oraz Z jest zbiorem wszystkich punktów przecięcia prostych L_i i L'_j, $i = 1, \ldots, a$, $j = 1, \ldots, b$.

Kraty

Przykład

Poniższy zbiór 6 punktów w $\mathbb{P}^3$ jest $(2,3)$-kratą.



Kraty

Jak przed chwilą zauważyliśmy, ogólne rzutowanie (a, b)-kraty jest zupełnym przecięciem (rozkładalnych) krzywych stopni a i b.

Kraty

Jak przed chwilą zauważyliśmy, ogólne rzutowanie (a, b)-kraty jest zupełnym przecięciem (rozkładalnych) krzywych stopni a i b.

Zatem (a, b)-krata jest zbiorem (a, b)-geproci.

Kraty

Twierdzenie (Luca Chiantini, Juan Migliore, 2021)

Każda (a, b)-krata w $\mathbb{P}^3$, dla $a, b \geqslant 3$, jest zawarta w pewnej kwadryce.

Kraty

Twierdzenie (Luca Chiantini, Juan Migliore, 2021)

Każda (a, b)-krata w $\mathbb{P}^3$, dla $a, b \geqslant 3$, jest zawarta w pewnej kwadryce.

Rzeczywiście, jeśli $a \geqslant 3$, to każda z prostych L'_j przecina jedyną, gładką kwadrykę Q, która zawiera proste L_1, L_2, L_3 (i ewentualnie kolejne), w co najmniej 3 punktach. Zatem proste L'_j są zawarte w Q.

Zatem krata leży na kwadryce, proste L_i są prostymi z jednego rulingu, a proste L'_j są prostymi z drugiego rulingu.

Kraty

Uwaga

Krata $(2, b)$ nie musi być zawarta w kwadryce.

Jej rzut ogólny, jak przed chwilą stwierdziliśmy, zawsze jest zupełnym przecięciem.

Twierdzenie (L. Chiantini, J. Migliore, 2021)

Każdy niezdegenerowany zbiór $Z \subset \mathbb{P}^3$, który jest (a, b)-geproci oraz $a, b \leqslant 3$, jest kratą.

Kraty

Każdy zbiór $(1, b)$-geproci jest zbiorem b punktów współliniowych. Zatem jest zdegenerowany i z definicji jest $(1, b)$-kratą.

Kraty

Każdy zbiór $(1, b)$-geproci jest zbiorem b punktów współliniowych. Zatem jest zdegenerowany i z definicji jest $(1, b)$-kratą.

Każdy niezdegenerowany zbiór $(2, b)$-geproci jest zbiorem $2b$ punktów położonych na 2 prostych skośnych, po b punktów na każdej prostej, więc jest $(2, b)$-kratą.

Poszukiwanie zbiorów geproci

Pytanie

Czy istnieją przykłady zbiorów (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$ różne od:

- przecięcia dwóch krzywych leżących na tej samej płaszczyźnie,
- (a, b)-krat?

Poszukiwanie zbiorów geproci

Pytanie

Czy istnieją przykłady zbiorów (a, b)-geproci w $\mathbb{P}^3$ różne od:

- przecięcia dwóch krzywych leżących na tej samej płaszczyźnie,
- (a, b)-krat?

Na opowieść o takich zbiorach zapraszamy do następnych odcinków.

Podziękowanie

Dziękuję za uwagę.