Stałe różniczkowań Lotki-Volterry

Janusz Zieliński

Uniwersytet Mikołaja Kopernika

Łódź, 9 stycznia 2013

Motywacja

- zastosowania układów Lotki-Volterry w biologii populacyjnej, fizyce laserowej i fizyce plazmy

Motywacja

- zastosowania układów Lotki-Volterry w biologii populacyjnej, fizyce laserowej i fizyce plazmy
- procedura Lagutinskiego stowarzyszania różniczkowania faktoryzowalnego z dowolnym różniczkowaniem

Motywacja

- zastosowania układów Lotki-Volterry w biologii populacyjnej, fizyce laserowej i fizyce plazmy
- procedura Lagutinskiego stowarzyszania różniczkowania faktoryzowalnego z dowolnym różniczkowaniem
- powiązanie z teorią niezmienników (dla dowolnej spójnej grupy algebraicznej $G \subseteq \mathrm{Gl}_n(k)$ istnieje różniczkowanie d takie, że $k[X]^G = k[X]^d$)

Oznaczenia

k - ciało charakterystyki zero
$\mathbb{N}$ - zbiór nieujemnych liczb całkowitych
$\mathbb{N}_+$ - zbiór dodatnich liczb całkowitych
$\mathbb{Q}_+$ - zbiór dodatnich liczb wymiernych
n - ustalona liczba naturalna $\geqslant 3$
$k[X] = k[x_1, \dots, x_n]$

Różniczkowania

Jeżeli R jest k-algebrą przemienną, to k-liniowe odwzorowanie $d : R \to R$ nazywamy *różniczkowaniem* algebry R, jeśli dla wszystkich $a, b \in R$

$$d(ab) = ad(b) + d(a)b.$$

Zbiór $R^d = \ker d$ nazywamy *pierścieniem stałych* różniczkowania d.

Wówczas $k \subseteq R^d$ i *nietrywialną* stałą różniczkowania d nazywamy element zbioru $R^d \setminus k$.

Jeśli $f_1, \ldots, f_n \in k[X]$, to istnieje dokładnie jedno różniczkowanie $d : k[X] \to k[X]$ takie, że $d(x_1) = f_1, \ldots, d(x_n) = f_n$.

Przykłady

- Czternasty problem Hilberta

Przykłady

- Czternasty problem Hilberta
- Różniczkowania Jouanolou

Sformułowanie problemu

Niech $C_1, \ldots, C_n \in k$. Przez resztę referatu $R = k[x_1, \ldots, x_n]$, a $d : R \longrightarrow R$ jest różniczkowaniem zadanym następująco

$$d(x_i) = x_i(x_{i-1} - C_i x_{i+1})$$

dla $i = 1, \ldots, n$ (przyjmujemy konwencję, że $x_{n+1} = x_1$ oraz $x_0 = x_n$).

Cel: wyznaczyć R^d.

Rozwiązania częściowe

- J. Moulin Ollagnier, A. Nowicki (1999): dla $n = 3$ i dowolnych parametrów C_i
- P. Hegedűs (2012): dla dowolnego n, ale wszystkich C_i równych 1
- J. Z. (2012): dla $n = 4$ i dowolnych parametrów C_i

Symetria

Niech $C_i = 1$ dla wszystkich i (wtedy d nazywamy *różniczkowaniem Volterry*). Niech D_{2n} oznacza grupę dihedralną dla n wierzchołków. Dla $f \in R^d$ oraz $\sigma \in D_{2n}$ mamy $f^\sigma \in R^d$, to znaczy, pierścień R^d jest D_{2n}-niezmienniczy.

Jeśli n jest parzyste, to niech $G < D_{2n}$ oznacza stabilizator zbioru $\{1, 3, 5, \ldots, n-1\}$. Jeśli n jest nieparzyste, to niech $G = D_{2n}$.

Wniosek (Hegedűs)

Stałe różniczkowania d są G-niezmiennicze, to znaczy, $R^d \subseteq R^G$.

Wielomiany istotne

Wielomian $g \in R$ nazywamy *istotnym*, gdy jest jednorodny i niepodzielny przez żadną ze zmiennych $x_1, \ldots, x_n$.

Każdy niezerowy, jednorodny wielomian $f \in R$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $f = X^\alpha g$, gdzie X^α jest jednomianem monicznym, a wielomian g jest istotny.

Wielomiany Darboux

Mówimy, że niezerowy wielomian f jest *wielomianem Darboux* różniczkowania $\delta : R \to R$, jeśli $\delta(f) = \Lambda f$ dla pewnego $\Lambda \in R$. Będziemy nazywać Λ *kofaktorem* f.

Lemat (Ossowski & Z.)

Niech $n = 4$. Jeśli $g \in R$ jest istotnym wielomianem Darboux, to jego kofaktor jest formą liniową o współczynnikach w $\mathbb{N}$.

Lemat (Ossowski & Z.)

Niech $n = 4$. Jeżeli $d(f) = 0$ oraz $f = X^\alpha g$, gdzie g jest istotny, to $d(X^\alpha) = 0$ oraz $d(g) = 0$.

Dalsze oznaczenia

Oznaczmy przez $R_{(m)}$ składową jednorodną R stopnia m.

Niech $R^d_{(m)} = R_{(m)} \cap R^d$.

Ponieważ d jest różniczkowaniem jednorodnym, zachodzi $R^d = \bigoplus_{m=0}^{\infty} R^d_{(m)}$

Niech $\varphi \in R$ oraz $1 \leqslant q \leqslant n$. Wtedy dla każdego podzbioru $\{i_1, \dots, i_q\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ oznaczamy przez $\varphi^{\{i_1,\dots,i_q\}}$ sumę jednomianów z φ, które zależą tylko od zmiennych $x_{i_1}, \dots, x_{i_q}$, innymi słowy, $\varphi^{\{i_1,\dots,i_q\}} = \varphi|_{x_j=0 \text{ dla } j\notin\{i_1,\dots,i_q\}}$.

Obcięcia wielomianów n zmiennych

Lemat (Ossowski & Z.)

Jeśli $A \subseteq \{1, \dots, n\}$, *to dla wszystkich* $\varphi \in R^d_{(m)}$ *zachodzi* $d(\varphi^A)^A = 0$.

Lemat (Ossowski & Z.)

Niech $\varphi \in R_{(m)}$ *oraz* $A = \{i, i+1\} \subset \{1, \dots, n\}$. *Jeżeli* $d(\varphi^A)^A = 0$, *to* $\varphi^A = a(x_i + C_i x_{i+1})^m$ *dla pewnego* $a \in k$.

Lemat (Ossowski & Z.)

Niech $n \geqslant 4$, $\varphi \in R_{(m)}$ *oraz* $i \in \{1, \dots, n\}$. *Niech* $C_i \notin \mathbb{Q}_+$ *oraz* $A = \{i, i+1, i+2\}$. *Jeśli* $d(\varphi^A)^A = 0$, *to* $\varphi^A \in k[x_i + C_i x_{i+1} + C_i C_{i+1} x_{i+2}]$.

Obcięcia wielomianów n zmiennych

Przez *nośnik* elementu $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ rozumiemy zbiór $\mathrm{supp}(\alpha) = \{i : \alpha_i \neq 0\}$, ponadto $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Lemat

Niech $n \geqslant 3$ oraz $m \geqslant 1$. Jeśli $\varphi \in R^d_{(m)}$, to

$$\varphi = a(x_1 + C_1 x_2 + C_1 C_2 x_3 + \ldots + C_1 \ldots C_{n-1} x_n)^m + \sum b_\alpha X^\alpha,$$

gdzie ostatnia suma przebiega po wszystkich $|\alpha| = m$ takich, że $\#\mathrm{supp}(\alpha) \geqslant 3$ albo $\#\mathrm{supp}(\alpha) = 2$ i te dwa niezerowe wykładniki są przy niesąsiadujących zmiennych (w cyklicznym sensie), natomiast $a, b_\alpha \in k$ dla wszystkich α. Ponadto, jeśli $C_1 \ldots C_n \neq 1$, to $a = 0$.

Obcięcia wielomianów n zmiennych

Lemat

Niech $n \geqslant 4$, $\varphi \in R_{(m)}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ *oraz* $A = \{i, i+1, i+2\}$. *Niech* $C_i \in \mathbb{Q}_+$ *oraz* $C_i = \frac{p}{q}$, *gdzie* $p, q \in \mathbb{N}_+$ *oraz* $\mathrm{nwd}(p, q) = 1$. *Jeśli* $d(\varphi^A)^A = 0$, *to* $\varphi^A \in k[x_i + C_i x_{i+1} + C_i C_{i+1} x_{i+2},\ x_i^q x_{i+2}^p]$.

Obcięcia wielomianów czterech zmiennych

Zakładamy odtąd, że $n = 4$.

Lemat

R^d zawiera nietrywialną jednomianową stałą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków:

(1) $C_1, C_3 \in \mathbb{Q}_+$ *oraz* $C_1 C_3 = 1$,

(2) $C_2, C_4 \in \mathbb{Q}_+$ *oraz* $C_2 C_4 = 1$.

Obcięcia wielomianów czterech zmiennych

Rozważmy trzy zdania logiczne:
s_1 : $C_1 C_2 C_3 C_4 = 1$.
s_2 : $C_1, C_3 \in \mathbb{Q}_+$ and $C_1 C_3 = 1$.
s_3 : $C_2, C_4 \in \mathbb{Q}_+$ and $C_2 C_4 = 1$.
W przypadku zdania s_2 niech $C_1 = \frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{N}_+$ oraz $\mathrm{nwd}(p, q) = 1$.
W przypadku s_3 niech $C_2 = \frac{r}{t}$, gdzie $r, t \in \mathbb{N}_+$ oraz $\mathrm{nwd}(r, t) = 1$.

Oznaczmy przez $\neg s_i$ negację zdania s_i.

Lemat

Niech $\varphi \in R^d_{(m)}$. Jeśli $\neg s_2$, to $\varphi^{\{1,2,3\}} \in k[x_1 + C_1 x_2 + C_1 C_2 x_3]$ oraz $\varphi^{\{3,4,1\}} \in k[x_3 + C_3 x_4 + C_3 C_4 x_1]$.

Główne twierdzenie

Niech $R = k[x_1, x_2, x_3, x_4]$, a $d : R \to R$ będzie różniczkowaniem postaci

$$d = \sum_{i=1}^{4} x_i(x_{i-1} - C_i x_{i+1}) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

gdzie $C_1, C_2, C_3, C_4 \in k$. Przy oznaczeniach $s_1, s_2, s_3, p, q, r, t$ wprowadzonych powyżej, zachodzi następujące twierdzenie.

Główne twierdzenie

Twierdzenie

Pierścień stałych różniczkowania d jest zawsze skończenie generowany nad k z co najwyżej trzema generatorami. W każdym przypadku jest to pierścień wielomianów, dokładniej:

(1) *jeśli* $s_1 \wedge \neg s_2 \wedge \neg s_3$, *to* $R^d = k[x_1 + C_1 x_2 + C_1 C_2 x_3 + C_1 C_2 C_3 x_4]$,

(2) *jeśli* $\neg s_1 \wedge \neg s_2 \wedge \neg s_3$, *to* $R^d = k$,

(3) *jeśli* $\neg s_1 \wedge \neg s_2 \wedge s_3$, *to* $R^d = k[x_2^t x_4^r]$,

(4) *jeśli* $\neg s_1 \wedge s_2 \wedge \neg s_3$, *to* $R^d = k[x_1^q x_3^p]$,

(5) *jeśli* $s_1 \wedge \neg s_2 \wedge s_3$, *to* $R^d = k[x_1 + C_1 x_2 + C_1 C_2 x_3 + C_1 C_2 C_3 x_4,\ x_2^t x_4^r]$,

(6) *jeśli* $s_1 \wedge s_2 \wedge \neg s_3$, *to* $R^d = k[x_1 + C_1 x_2 + C_1 C_2 x_3 + C_1 C_2 C_3 x_4,\ x_1^q x_3^p]$,

(7) *jeśli* $s_2 \wedge s_3$, *to* $R^d = k[x_1 + C_1 x_2 + C_1 C_2 x_3 + C_1 C_2 C_3 x_4,\ x_1^q x_3^p,\ x_2^t x_4^r]$.

Istnienie nietrywialnych wielomianowych stałych

Wniosek

Jeżeli $n = 4$, to R^d zawiera nietrywialną wielomianową stałą wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi co najmniej jeden z warunków:

(1) $C_1 C_2 C_3 C_4 = 1$,

(2) $C_1, C_3 \in \mathbb{Q}_+$ *oraz* $C_1 C_3 = 1$,

(3) $C_2, C_4 \in \mathbb{Q}_+$ *oraz* $C_2 C_4 = 1$.