Wiązki wektorowe regulous

Maciej Zieliński

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

Łódź, 7-11.01.2019

Zbiory konstruowalne

Definicja

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest konstruowalny, gdy spełniony jest któryś z dwóch równoważnych warunków:

1. A należy do podalgebry Boole'a w $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ generowanej przez zbiory algebraiczne,
2. A jest skończoną sumą zbiorów Zariski lokalnie domkniętych.

Zbiory konstruowalne

Definicja

$A \subset \mathbb{R}^n$ jest konstruowalny, gdy spełniony jest któryś z dwóch równoważnych warunków:

1. A należy do podalgebry Boole'a w $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ generowanej przez zbiory algebraiczne,
2. A jest skończoną sumą zbiorów Zariski lokalnie domkniętych.

Definicja

Stratyfikacja $\mathcal{S}$ zbioru konstruowalnego A, to skończone rozbicie A na parami rozłączone podzbiory Zariski lokalnie domknięte.

Konwencja

Przyjmiemy następujące oznaczenia:

- V, W - (afiniczne) rzeczywiste zbiory algebraiczne,
- A, B - zbiory konstruowalne,
- jeśli $A \subset V$ to $\overline{A}$ oznacza domknięcie w topologii Zariskiego,
- $\mathbb{F}$ to $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, lub $\mathbb{H}$.

Odwzorowania regulous

Definicja

Ciągłe odwzorowanie $f\colon A \to W$ jest regulous $\iff$ istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ zbioru A, że $\forall S \in \mathcal{S}$ $f|_S\colon S \to W$ jest regularne. Zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy przez $\mathcal{R}^0(A, W)$

Odwzorowania regulous

Definicja

Ciągłe odwzorowanie $f\colon A \to W$ jest regulous $\iff$ istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ zbioru A, że $\forall S \in \mathcal{S}\ f|_S\colon S \to W$ jest regularne.
Zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy przez $\mathcal{R}^0(A, W)$

Obserwacja

Złożenie odwzorowań regulous jest regulous.
Przeciwobraz zbioru konstruowalnego przez odwzorowanie regulous jest konstruowalny.

Odwzorowania regulous

Definicja

Ciągłe odwzorowanie $f\colon A \to W$ jest regulous $\iff$ istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ zbioru A, że $\forall S \in \mathcal{S}$ $f|_S\colon S \to W$ jest regularne.
Zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy przez $\mathcal{R}^0(A, W)$

Obserwacja

Złożenie odwzorowań regulous jest regulous.
Przeciwobraz zbioru konstruowalnego przez odwzorowanie regulous jest konstruowalny.

Uwaga

Wprowadzone przez Fichou, Huismana, Mangolte i Monniera [FHMM], przy innej definicji - f regulous na $\mathbb{R}^n$ jeśli jest ciągła i regularna na zbiorze Zariski gęstym.

Odwzorowania regulous

Definicja

Ciągłe odwzorowanie $f\colon A \to W$ jest regulous $\iff$ istnieje taka stratyfikacja $\mathcal{S}$ zbioru A, że $\forall S \in \mathcal{S}$ $f|_S\colon S \to W$ jest regularne.
Zbiór wszystkich takich odwzorowań oznaczamy przez $\mathcal{R}^0(A, W)$

Obserwacja

Złożenie odwzorowań regulous jest regulous.
Przeciwobraz zbioru konstruowalnego przez odwzorowanie regulous jest konstruowalny.

Uwaga

Wprowadzone przez Fichou, Huismana, Mangolte i Monniera [FHMM], przy innej definicji - f regulous na $\mathbb{R}^n$ jeśli jest ciągła i regularna na zbiorze Zariski gęstym.Nasza definicja postawiona przez Kucharza i Kurdykę [KK].

Lemat o rozkładzie

Lemat

Niech $A \subset V$ *będzie domknięty (w topologi Euklidesowej) i niech* $W = \overline{A}$. *Wtedy* $W^{ns} \subset A \subset W$.

Topologia konstruowalna

Propozycja

Zbiór

$$\mathcal{F} = \{A \subset V \ : A \text{ jest domknięty}\}$$

jest rodziną zbiorów domkniętych pewnej topologii na V, którą będziemy nazywać topologią konstruowalną.

Topologia konstruowalna

Propozycja

Zbiór

$$\mathcal{F} = \{A \subset V \ : A \text{ jest domknięty}\}$$

jest rodziną zbiorów domkniętych pewnej topologii na V, którą będziemy nazywać topologią konstruowalną.

Propozycja

Jeśli $V \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ jest zstępującą rodziną domkniętych zbiorów konstruowalnych, to zbiory A_k stabilizują się dla $k >> 0$.

Propozycja

Niech $A \subset V$ będzie domknięty. Wtedy A jest zbiorem zer pewnej funkcji regulous $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$.

Propozycja

Niech $A \subset V$ będzie domknięty. Wtedy A jest zbiorem zer pewnej funkcji regulous $f : V \to \mathbb{R}$.

Lemat ("Nierówność Łojasiewicza")

Jeśli $A \subset \mathbb{R}^n$ jest lokalnie domkniętym zbiorem semialgebraicznym, a $f : A \to \mathbb{R}$ i $g : A \setminus \mathcal{Z}(f) \to$ są semialgebraiczne ciągłe to dla $N >> 0$ funkcja $f^N g$ przedłuża się w sposób ciągły przez 0.

Przedłużanie funkcji regulous

Twierdzenie (Kollár, Nowak 2015)

Niech $V \subset W$ *i* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją regulous. Wtedy* f *przedłuża się do funkcji regulous* $F\colon W \to \mathbb{R}$.

Przedłużanie funkcji regulous

Twierdzenie (Kollár, Nowak 2015)

Niech $V \subset W$ *i* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją regulous. Wtedy* f *przedłuża się do funkcji regulous* $F\colon W \to \mathbb{R}$.

Uwaga

Zbiory algebraiczne można tu zastąpić domkniętymi konstruowalnymi (lemat o rozkładzie).

Rozmaitości regulous

Ustalmy domknięty zbiór konstruowalny A. Przyporządkowanie

$$\mathcal{R}^0_A : \operatorname{top}(A) \ni U \mapsto \mathcal{R}^0_A(U) := \mathcal{R}^0(U, \mathbb{R})$$

określa snop pierścieni w topologii konstruowalnej.

Definicja

Przestrzeń lokalnie upierścienioną $(X, \mathcal{R}^0_X)$ izomorficzną z $(A, \mathcal{R}^0_A)$ dla pewnego domkniętego zbioru konstruowalnego nazywamy *afiniczną rozmaitością regulous.*
Przestrzeń lokalnie upierścienioną $(X, \mathcal{R}^0_X)$ *nazwiemy rozmaitością regulous jeśli ma ona skończone pokrycie otwarte* $U_1, \ldots, U_k$, *takie że* $(U_i, \mathcal{R}^0_X|_{U_i})$ *jest afiniczną rozmaitością regulous.*

Wiązki wektorowe

$\mathbb{F}$-wiązką wektorową nazywamy taką trójkę (E, p, B), że:

1. Włókna morfizmu $p\colon E \longrightarrow B$ są przestrzeniami $\mathbb{F}$-wektorowymi.

$\mathbb{F}$-wiązką wektorową nazywamy taką trójkę (E, p, B), że:

1. Włókna morfizmu $p\colon E \to B$ są przestrzeniami $\mathbb{F}$-wektorowymi.
2. Każdy punkt B ma otoczenie U, takie że istnieje następujący diagram, gdzie górna strzałka indukuje izomorfizmy $\mathbb{F}$-liniowe włókien, jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{F}^n & \xrightarrow{\approx} & p^{-1}(U) \\ \pi_U \downarrow & & p \downarrow \\ U & \xrightarrow{\mathrm{id}_U} & U \end{array}$$

Definicja

- *Sekcją $\mathbb{F}$-wiązki $\xi = (E, p, B)$ na zbiorze $C \subset B$ nazywamy morfizm $s\colon C \to E$, taki że $p \circ s = \mathrm{id}_C$.*
- *ξ jest generowana przez sekcje globalne jeśli istnieją takie sekcje $s_1, \ldots, s_n : B \to E$, że dla każdego $x \in B$ mamy $p^{-1}(x) = \mathrm{span}_{\mathbb{F}}(s_1, \ldots, s_n)$.*
- *Jeśli ξ jest podwiązką wiązki trywialnej $\varepsilon^n = B \times \mathbb{F}^n$, to odwzorowaniem klasyfikującym dla xi, nazywamy odwzorowanie $f\colon B \to \mathbb{G}(\mathbb{F}^n)$ zdefiniowane przez $f(x) = p^{-1}(x)$.*

Rozważmy dla $\mathbb{F}$-wiązki ξ o bazie X następujące warunki:

1. Dla pewnego n, istnieje injektywny morfizm $\xi \hookrightarrow \varepsilon^n$.
2. Dla pewnego n, istnieje surjektywny morfizm $\varepsilon^n \to \xi$.
3. ξ jest generowana przez sekcje globalne.
4. Dla pewnego n, istnieje $\mathbb{F}$-wiązka η, taka że $\xi \oplus \eta \approx \varepsilon^n$.
5. Dla pewnego n, istnieje morfizm $f : X \to \mathbb{G}(\mathbb{F}^n)$ takie, że $f^*\gamma(\mathbb{F}^n) \approx \xi$.

Twierdzenie

Jeśli działamy w kategorii afinicznych rzeczywistych rozmaitości algebraicznych wszystkie z powyższych warunków są równoważne z:

6. *Przestrzeń totalna $E(\xi)$ jest afiniczną rzeczywistą rozmaitością algebraiczną.*

Jeśli $(X, \mathcal{R}_X)$ jest afiniczną rzeczywistą rozmiatością algebraiczną, a ξ wiązką spełniającą warunki poprzedniego twierdzenia to $\Gamma(X, \xi)$ jest skończenie generowanym projektywnym $\mathcal{R}_X(X)$-modułem.

Jeśli $(X, \mathcal{R}_X)$ jest afiniczną rzeczywistą rozmiatością algebraiczną, a ξ wiązką spełniającą warunki poprzedniego twierdzenia to $\Gamma(X, \xi)$ jest skończenie generowanym projektywnym $\mathcal{R}_X(X)$-modułem.

Twierdzenie

Przyporządkowanie $\xi \mapsto \Gamma(X, \xi)$ zadaje równoważność kategorii algebraicznych wiązek wektorowych na X z kategorią skończenie generowanych projektywnych $\mathcal{R}_X(X)$-modułów.

Twierdzenie (Serre, 1955)

Niech $(X, \mathcal{O}_X)$ *będzie afiniczną rozmaitością algebraiczną nad ciałem algebraicznie domkniętym, a* $\mathcal{F}$ *lokalnie wolnym snopem* $\mathcal{O}_X$*-modułów stałej skończonej rangi.*
Wtedy $\mathcal{F}$ *jest generowany prze sekcje globralne, a* $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ *zadaje równoważność kategorii lokalnie wolnych snopów* $\mathcal{O}_X$*-modułów stałej skończonej rangi z kategorią skończenie generowanych projektywnych* $\mathcal{O}_X(X)$*-modułów.*

Twierdzenie (Serre, 1955)

Niech $(X, \mathcal{O}_X)$ będzie afiniczną rozmaitością algebraiczną nad ciałem algebraicznie domkniętym, a $\mathcal{F}$ lokalnie wolnym snopem $\mathcal{O}_X$-modułów stałej skończonej rangi.
Wtedy $\mathcal{F}$ jest generowany prze sekcje globralne, a $\mathcal{F} \mapsto \Gamma(X, \mathcal{F})$ zadaje równoważność kategorii lokalnie wolnych snopów $\mathcal{O}_X$-modułów stałej skończonej rangi z kategorią skończenie generowanych projektywnych $\mathcal{O}_X(X)$-modułów.

Twierdzenie (Swan, 1962)

Podobnie dla X zwartej przestrzeni Hausdorffa i pierścienia funkcji ciągłych $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Twierdzenie

Każda wiązka wektorowa regulous nad afiniczną rozmaitością regulous $(X, \mathcal{R}^0_X)$ *jest generowana przez sekcje globalne i ma wszystkie własności z twierdzenia o wiązkach algebraicznych. Podobnie, funktor sekcji globalnych zadaje równoważność kategorii wiązek wektorowych regulous na* X *i skończenie generowanych projektywnych* $\mathcal{R}^0_X(X)$*-modułów.*

Twierdzenie

Każda wiązka wektorowa regulous nad afiniczną rozmaitością regulous $(X, \mathcal{R}^0_X)$ *jest generowana przez sekcje globalne i ma wszystkie własności z twierdzenia o wiązkach algebraicznych. Podobnie, funktor sekcji globalnych zadaje równoważność kategorii wiązek wektorowych regulous na* X *i skończenie generowanych projektywnych* $\mathcal{R}^0_X(X)$*-modułów.*

Bibliografia

- G. Fichou, J. Huisman, F. Mangolte, and J. P. Monnier, Fonctions régulues, J. Reine Angew. Math. **718**, 103–151 (2016).
- J. Kollár and K. Nowak, Continuous rational functions on real and *p*-adic varieties, Math. Z. **279**(1-2), 85–97 (2015).
- W. Kucharz and K. Kurdyka, Stratified-algebraic vector bundles, J. Reine Angew. Math. **745**, 105–154 (2018).
- W. Kucharz and M. Zieliński, Regulous vector bundles, Math Nachr, **291**, 2252-2271 (2018).