

Skoki liczb Milnora jednorodnych osobliwości krzywych w klasie deformacji liniowych

The jump of Milnor number for linear deformations of homogeneous singularities

Aleksandra Zakrzewska

Wydział Matematyki i Informatyki UŁ

styczeń 2018

Osobliwość krzywej

Mówimy, że $f_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ jest **osobliwością izolowaną**, jeżeli f_0 jest kiełkiem funkcji holomorficznnej takim, że istnieje funkcja $\widehat{f}_0 : U \rightarrow \mathbb{C}$, będąca reprezentantem tego kiełka f_0 , określona w otwartym otoczeniu U punktu $0 \in \mathbb{C}^n$ spełniająca warunki:

- 1 $\widehat{f}_0(0) = 0$,
- 2 $\nabla \widehat{f}_0(0) = 0$,
- 3 $\nabla \widehat{f}_0(z) \neq 0$ dla $z \in U \setminus \{0\}$.

W powyższej definicji przyjmujemy, że $\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right)$. W dalszym ciągu przez osobliwość będziemy rozumieć osobliwość izolowaną.

Deformacja osobliwości

Deformacją osobliwości f_0 nazywamy kiełek funkcji holomorficznej $f = f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ taki, że

- 1 $f(0, z) = f_0(z)$,
- 2 $f(s, 0) = 0$.

Deformację $f(s, z)$ osobliwości f_0 traktujemy jako rodzinę (f_s) kielków, $f_s(z) := f(s, z)$.

Liczba Milnora

Ponieważ f_0 jest izolowaną osobliwością, f_s ma tylko izolowane osobliwości blisko 0, dla wystarczająco małych s . Zatem dla wystarczająco małych s możemy zdefiniować liczbę μ_s

$$\mu_s := \mu(f_s) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (\nabla f_s)$$

zwaną **liczbą Milnora**, gdzie \mathcal{O}_n jest pierścieniem kielków funkcji holomorficznym określonych w otoczeniu 0, natomiast (∇f_s) jest ideałem w \mathcal{O}_n generowanym przez ∇f_s .

Skok liczby Milnora

Ponieważ liczba Milnora jest pólciągła z góry w topologii Zariskiego w rodzinie osobliwości, zatem istnieje otoczenie S punktu 0 takie, że

- 1 $\mu_s = \text{const.}$ dla $s \in S \setminus \{0\}$,
- 2 $\mu_0 \geq \mu_s$ dla $s \in S$.

Stałą różnicę $\mu_0 - \mu_s$ (dla $s \neq 0$) nazywamy **skokiem liczby Milnora deformacji** (f_s) i oznaczamy $\lambda((f_s))$. Najmniejsza niezerowa wartość wśród skoków deformacji osobliwości f_0 nazywana jest skokiem liczby Milnora f_0 i oznaczana $\lambda(f_0)$.

Dotychczasowe wyniki dotyczące skoków Milnora

Będę badać osobliwości krzywych tzn. $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Dotychczasowe wyniki dotyczące skoków Milnora

Będę badać osobliwości krzywych tzn. $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$.

Pierwszy rezultat dotyczący skoków liczb Milnora uzyskał Sabir Gusein-Zade, który udowodnił istnienie osobliwości f_0 dla której $\lambda(f_0) > 1$. Ten problem był również rozważany przez:

- A. Bodin który policzył $\lambda^{nd}(f_0)$ dla dogodnych osobliwości f_0 , których diagram Newtona jest zredukowany do jednego segmentu i dla niezdegenerowanych deformacji,
- J. Walewska uogólniła wynik Bodina dla niedogodnych osobliwości,
- S. Brzostowski, T. Krasieński i J. Walewska wyliczyli wszystkie możliwe liczby Milnora dla niezdegenerowanych deformacji osobliwości jednorodnych,
- dla osobliwości $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$ ($n \geq 2$) udowodnili oni również w swojej pracy, że $\lambda(f_0) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

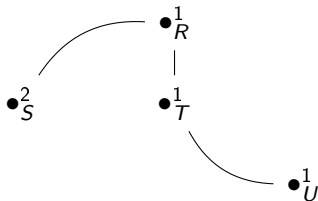
Główne zagadnienie pracy

Głównym tematem pracy jest skok liczb Milnora jednorodnych i semi-jednorodnych osobliwości w klasie **deformacji liniowych** f_0 tzn. deformacji postaci $f_s = f_0 + sg$, gdzie g jest holomorficzną funkcją określoną w otoczeniu 0 taką, że $g(0) = 0$. Najmniejsza niezerowa wartość wśród skoków deformacji liniowych osobliwości f_0 oznaczamy $\lambda^{lin}(f_0)$.

Jako narzędzie do badania tych skoków używać będą **diagramów Enriquesa** oraz wyniku M. Alberich-Carraminñany i J.Roé którzy podali warunek konieczny i wystarczający, na to aby dwa diagramy Enriquesa były liniowo przyległe.

Diagram Enriquesa

Dowolnej osobliwości izolowanej przypisujemy jej **diagram Enriquesa** z wagami (D, ν) odzwierciedlający etapy rozwiązania tej osobliwości. Jest to graf skończony z dwoma rodzajami krawędzi i wagami wierzchołków.



Rysunek: Diagram Enriquesa osobliwości $g(x, y) = x^2 - y^3$.

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Za pomocą aksjomatów można wprowadzić pojęcie **abstrakcyjnych diagramów Enriquesa** jako drzewo wraz z relacją najbliższości pomiędzy wierzchołkami.

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Za pomocą aksjomatów można wprowadzić pojęcie **abstrakcyjnych diagramów Enriquesa** jako drzewo wraz z relacją najbliższości pomiędzy wierzchołkami.
Każdy diagram Enriquesa osobliwości krzywej jest abstrakcyjnym diagramem Enriquesa.

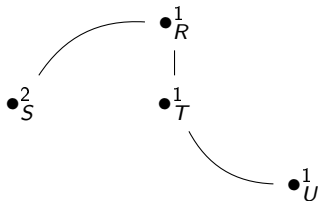
Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Liczby nad wierzchołkami, to ich krotności.

$$\nu(S) = 2, \nu(R) = 1, \nu(T) = 1, \nu(U) = 1$$

Pomiędzy wierzchołki określona została relacja najbliższości.

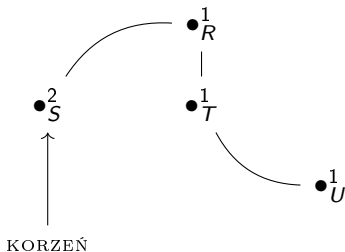
$$R \rightarrow S, T \rightarrow R, T \rightarrow S, U \rightarrow T$$



Rysunek: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

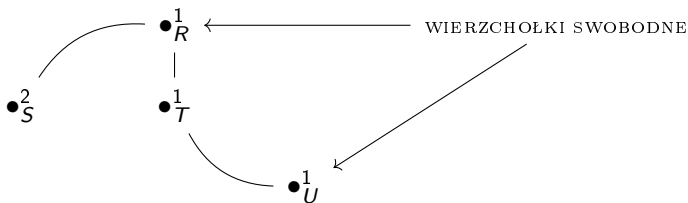
Rodzaje wierzchołków nazywamy różnie ze względu na relację równoważności.



Rysunek: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

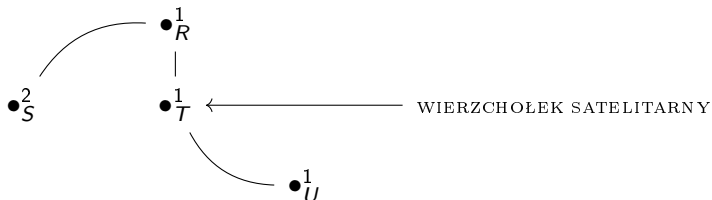
Rodzaje wierzchołków nazywamy różnie ze względu na relację równoważności.



Rysunek: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Abstrakcyjne diagramy Enriquesa

Rodzaje wierzchołków nazywamy różnie ze względu na relację równoważności.



Rysunek: Abstrakcyjny diagram Enriquesa

Diagramy zgodne i liczba Milnora diagramu

Definicja

Zgodnym diagramem Enriquesa nazywamy diagram dla którego spełniona jest nierówność $P \in D$

$$\nu(P) \geq \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q).$$

Diagramy zgodne i liczba Milnora diagramu

Definicja

Dla zgodnego diagramu Enriquesa (D, ν) definiujemy **liczbę Milnora diagramu** (D, ν) przez

$$\mu((D, \nu)) = \sum_{P \in D} \nu(P)(\nu(P) - 1) + 1 - r,$$

gdzie

$$r = \sum_{P \in D} \left(\nu(P) - \sum_{Q \rightarrow P} \nu(Q) \right).$$

Liczba r jest liczbą gałęzi diagramu Enriquesa osobliwości krzywej.

Typy diagramów i diagramy minimalne

Definicja

Dwa diagramy Enriquesa nazywamy **równoważnymi**, gdy różnią się co najwyżej wierzchołkami swobodnymi krotności 1.

Typy diagramów i diagramy minimalne

Definicja

Dwa diagramy Enriquesa nazywamy **równoważnymi**, gdy różnią się co najwyżej wierzchołkami swobodnymi krotności 1.

Klasę abstrakcji powyższej równoważności nazywamy **typem** i oznaczamy $[(D, \nu)]$.

Typy diagramów i diagramy minimalne

Definicja

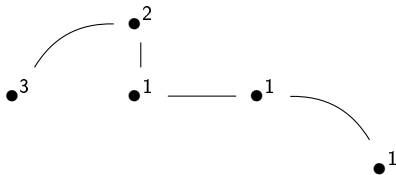
Dwa diagramy Enriquesa nazywamy **równoważnymi**, gdy różnią się co najwyżej wierzchołkami swobodnymi krotności 1.

Klasę abstrakcji powyższej równoważności nazywamy **typem** i oznaczamy $[(D, \nu)]$.

Definicja

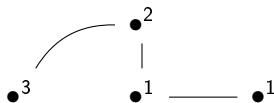
Zgodny diagram Enriquesa (D, ν) nazywamy **minimalnym**, gdy nie ma wierzchołków swobodnych krotności 1.

Przykład 1



Rysunek: Diagram Enriquesa osobliwości $g(x, y) = x^3 - y^5$.

Przykład 1

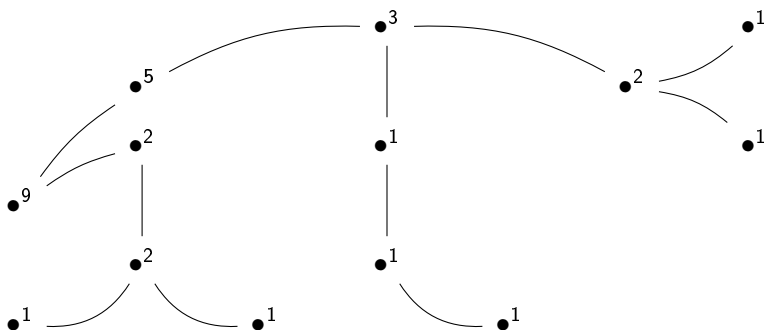


Rysunek: Minimalny diagram Enriquesa osobliwości $g(x, y) = x^3 - y^5$.

$$r = 1$$

$$\mu(g) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 - r = 8$$

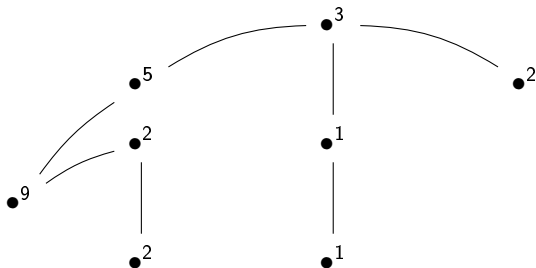
Przykład 2



Rysunek: Diagram Enriquesa osobliwości

$$h(x, y) = (x^2 - y^3)(x^2 + y^3)(x^3 - y)(x^3 + y)(x^4 - y^3).$$

Przykład 2



Rysunek: Minimalny diagram Enriquesa osobliwości
 $h(x, y) = (x^2 - y^3)(x^2 + y^3)(x^3 - y)(x^3 + y)(x^4 - y^3)$.

$$r = 5$$

$$\mu(h) = 9 \cdot 8 + 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 - r = 120$$

Liniowa przyległość diagramów

W swojej pracy M. Alberich-Carramiñana i J. Roé podali warunek konieczny i wystarczający, aby dwa diagramy Enriquesa osobliwości były liniowo przyległe.

Liniowa przyległość diagramów

W swojej pracy M. Alberich-Carramiñana i J. Roé podali warunek konieczny i wystarczający, aby dwa diagramy Enriquesa osobliwości były liniowo przyległe.

Definicja

Niech $[(D, \nu)]$ i $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ będą typami diagramów Enriquesa. $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ jest **liniowo przyległy** do $[(D, \nu)]$ gdy istnieje zgodny diagram $(D', \nu') \in [(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ taki, że $(D', \nu') \geq (D, \nu)$.

Liniowa przyległość diagramów

W swojej pracy M. Alberich-Carramiñana i J. Roé podali warunek konieczny i wystarczający, aby dwa diagramy Enriquesa osobliwości były liniowo przyległe.

Definicja

Niech $[(D, \nu)]$ i $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ będą typami diagramów Enriquesa. $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ jest **liniowo przyległy** do $[(D, \nu)]$ gdy istnieje zgodny diagram $(D', \nu') \in [(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ taki, że $(D', \nu') \geq (D, \nu)$.

Twierdzenie

Niech $[(D, \nu)]$ i $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ będą typami diagramów Enriquesa reprezentującymi osobliwości f i f_0 . $[(\tilde{D}, \tilde{\nu})]$ jest liniowo przyległy do $[(D, \nu)]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest liniową deformacją f_0 .

Osobliwość $x^n + y^n$

Twierdzenie

Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $[(D_n, \nu_n)]$ będzie typem minimalnego diagramu odpowiadającego osobliwości $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$. Istnieje minimalny diagram Enriquesa (D, ν) taki, że $[(D_n, \nu_n)]$ jest liniowo przyległy do $[(D, \nu)]$ i

$$\mu((D, \nu)) = \begin{cases} (n-1)^2 - (n-2), & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases} .$$

Twierdzenie

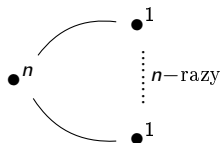
Niech $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$ ($n \geq 3$). Określmy liniową deformację f_s osobliwości f_0 wzorem :

$$f_s(x, y) := \begin{cases} f_0^n(x, y) + s(x + y)^{n-1}, & n \notin 2\mathbb{N} \\ f_0^n(x, y) + s(x + ey)^{n-1}, & n \in 2\mathbb{N} \end{cases},$$

gdzie $e^n = -1$.

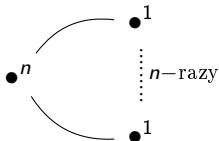
Wówczas liczba Milnora f_s jest równa $\mu(f_s) = (n - 1)^2 - (n - 2)$.
 Natomiast minimalny diagram Enriquesa osobliwości f_s jest diagramem (D, ν) z poprzedniego twierdzenia.

Osobliwość $x^n + y^n$



Rysunek: Diagram Enriquesa osobliwości $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$.

Osobliwość $x^n + y^n$

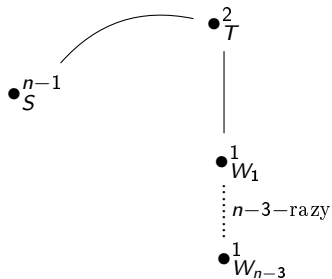


Rysunek: Diagram Enriquesa osobliwości $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$.

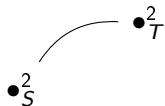


Rysunek: Minimalny diagram Enriquesa osobliwości $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$.

Osobliwość $x^n + y^n$



Rysunek: Diagram (D, ν) dla $n \geq 4$.



Rysunek: Diagram (D, ν) dla $n = 3$.

Skok liczby Milnora

Wniosek

Dla osobliwości $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$ ($n \geq 3$) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych daje się oszacować przez

$$\lambda^{lin}(f_0^n) \leq n - 2$$

Osobliwości jednorodne

Każda osobliwość jednorodna jest postaci

$$f_0(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + \dots + a_{n-1}xy^{n-1} + a_ny^n, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}.$$

Zatem jej diagram Enriquesa jest taki sam jak dla osobliwości $f_0^n(x, y) = x^n + y^n$.

Twierdzenie

Dla dowolnej jednorodnej osobliwości f_0 ($n \geq 2$) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych daje się oszacować przez

$$\lambda^{lin}(f_0^n) \leq \begin{cases} n - 2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases}.$$

Osobliwości semi-jednorodne

Osobliwością semi-jednorodną nazywamy osobliwość postaci $f_0 = f'_0 + g$, gdzie f'_0 jest jednorodną osobliwością i $\text{ord}g > \text{ord}f'_0$. W tym przypadku również diagram osobliwości semi-jednorodnej jest taki sam jak diagram osobliwości jednorodnej. :

Twierdzenie

Dla dowolnej semi-jednorodnej osobliwości f_0 ($n \geq 2$) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych daje się oszacować przez

$$\lambda^{\text{lin}}(f_0^n) \leq \begin{cases} n - 2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases} .$$

Hipoteza






Hipoteza

Dla osobliwości $f_0^n(x, y) := x^n + y^n$ ($n \geq 2$) skok liczby Milnora dla deformacji liniowych jest równy



$$\lambda^{lin}(f_0^n) = \begin{cases} n - 2, & n \geq 3 \\ 1, & n = 2 \end{cases} .$$

Dziękuję za uwagę!

Bibliografia

-  M. Alberich-Carramiñana, J. Roé: *Enriques Diagrams and Adjacency of Planar Curve Singularities*, *Canad. J. Math.* Vol 57(1), 2005.
-  S. Brzostowski, T. Krasinski, J. Walewska: *Milnor numbers in deformations of homogeneous singularities* ArXiv, (1104.7704), 2014.
-  A. Bodin: *Jump of Milnor number*, *Bull. Braz. Math. Soc.* (N.S.), 38(3):389-396, 2007.
-  E. Casas-Alvero: *Singularities of Plane Curve*, Cambridge University Press, 2000.
-  G.-M. Gruel, C. Lossen, E. Shustin: *Introduction to Singularities and Deformation*, Springer Verlag, 2006.

Bibliografia

-  S. Gusein-Zade: *On singularities from which an A_1 can be split off.*, *Funct. Anal. Appl.*, 1993.
-  J. Walewska: *The jump of Milnor numbers in families of non-degenerate and non-convenient singularities*, *Analytic and Algebraic Geometry*, University of de Press, pages 141-153, 2013.