MATERIAŁY XIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

**1993** **Łódź** **str. 53**

# JEDNOLISTNOŚĆ PEWNEGO OPERATORA CAŁKOWEGO

A. Wesołowski (Lublin)

**1.** Niech $S$ oznacza klasę funkcji holomorficznych i jednolistnych w kole $D_r = \{z : |z| < r\}$, $D_1 = D$, postaci

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots ,$$

$\Sigma$ - klasę funkcji holomorficznych i jednolistnych na zewnątrz koła jednostkowego $D$ postaci

$$F(\zeta) = \zeta + b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \dots ,$$

a $\Sigma_0$ - klasę wszystkich funkcji $F \in \Sigma$, dla których $F(\zeta) \neq 0$.

Wiadomo, że jeśli $f$ jest funkcją klasy $S^* = \{f \in S : \mathrm{Re}(\frac{zf'(z)}{f(z)}) > 0,\ z \in D\}$, to funkcja $\int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt$ należy do klasy $S^c = \{f \in S,\ \mathrm{Re}(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}) > 0,\ z \in D\}$. W tym przypadku całkowanie "ulepsza" klasy funkcji.

Wobec tego powstało zagadnienie postawione przez M. Biernackiego [3] dotyczące jednolistności funkcji $F(z) = \int_0^z \frac{f(t)}{t}\,dt$, $f \in S$.

J. Krzyż i Z. Lewandowski [10] podali przykład funkcji $f(z) = \{z \cdot \exp(i - 1)\log(1 - z)\}$, $z \in D$, dla której całka Biernackiego nie jest jednolistna w żadnym kole $D_r$, dla którego $r > \frac{e^{2\pi}-1}{e^{2\pi}+1} = 0,99\dots$

W związku z tym pojawiły się dwa zasadnicze następujące zagadnienia:

$1^0$ dla jakiego zakresu liczb $\beta$, na ogół zespolonych, funkcja $\int_0^z (\frac{f(t)}{t})^\beta\, dt$ jest jednolistna w $D$ dla $f \in S$,

$2^0$ dla jakiego zakresu liczb $\alpha$, na ogół zespolonych, funkcja $\int_0^z (f'(t))^\alpha\, dt$ jest jednolistna w $D$, gdy $f \in S$.

Następnie rozważano przypadki specjalne, gdy w $1^0$ i $2^0$ założenie $f \in S$ zostanie zastąpione przez $f \in \tilde{S}$, gdzie $\tilde{S} \subset S$ oznacza pewne ustalone znane klasy funkcji i wreszcie rozważano następujący problem "mieszany":

$3^0$ dla jakiego zakresu liczb $\alpha$ i $\beta$, na ogół zespolonych, funkcja

$$F(z;\alpha,\beta) = \int_0^z (f'(t))^\alpha\, (\frac{g(t)}{t})^\beta\, dt, \quad z \in D,$$

jest jednolistna w $D$, gdy $f$ i $g$ należą do $S$ lub pewnych specjalnych klas funkcji zawartych w $S$.

Oczywiście zagadnienie dotyczące jednolistności $F(z;0,\beta)$ stanowi problem $1^0$, natomiast zagadnienie dotyczące jednolistności $F(z;\alpha,0)$ stanowi problem $2^0$.

Powyższą problematyką zajmowało się wielu autorów. Wymienię tu niektóre z dotychczas uzyskanych wyników.

P.L. Duren, M.S. Shapiro, A.L. Shilds [6] wykazali, że $F(z;\alpha,0)$, gdy $f \in S$, jest jednolistna w $D$ dla $|\alpha| \le \frac{1}{3}(\sqrt{5}-2) = 0,078\ldots$. J. Becker [2] poprawił ten wynik pokazując, że dla $|\alpha| \le \frac{1}{6}$ i $f \in S$ $F(z;\alpha,0)$ jest jednolistna w $D$. W.M. Causey [4] wykazał, że dla $\alpha = 0$, $\beta \ne 1$, $\beta \in R$ i $g \in S$ $F(z;0,\beta)$ jest jednolistna w $D$, jeśli $0 < \beta \le \frac{\sqrt{5}-2}{4} = 0,05\ldots$ i nie jest jednolistna w $D$, jeśli $\beta > \frac{1}{2}$.

M. Nunokawa [11] poprawił ten rezultat dowodząc, że dla $g \in S$ $F(z;0,\beta)$ jest jednolistna w $D$, jeśli $0 \le \beta \le \frac{\sqrt{1025}-25}{100} = 0,07\ldots$. Wynik Causeya został ulepszony przez niego w pracy [5], gdzie wykazano, że jednolistność $F(z;0,\beta)$ zachodzi w $D$ dla zespolonych $\beta$ spełniających nierówność $|\beta| \le \frac{\sqrt{2}-1}{4} = 0,102\ldots$.

W.C. Royster [13] podał przykład funkcji holomorficznej i jednolistnej w $D$, dla której $F(z;\alpha,0)$ nie jest funkcją jednolistną w $D$, jeśli $|\alpha| > \frac{1}{3}$ i $\alpha \ne 1$. Postawił też problem, dotychczas otwarty, jednolistności $F(z;\alpha,0)$ dla $f \in S$, gdy $\frac{\sqrt{5}-2}{3} < \alpha \le \frac{1}{3}$.

Najlepszy dotychczas wynik co do zakresu $\alpha$ dla jednolistności $F(z;\alpha,0)$, gdy $f \in S$, a mianowicie $|\alpha| \le \frac{1}{4}$ otrzymał J.A. Pfaltzgraff [12].

W problemie $3^0$ J. Godula [8] wykazał, że dla $f \in S$ i $g \in S$ $F(z;\alpha,\beta)$ jest jednolistna w $D$, jeśli $4|\alpha| + 4|\beta| \le 1$. Kładąc $g = f$, $\beta = -\alpha$ otrzymujemy

$$F(z;\alpha,-\alpha) = \int_0^z (\frac{tf'(t)}{f(t)})^\alpha\, dt, \qquad f \in S, \quad z \in D.$$

W dalszym ciągu, w miejsce symbolu $F(z;\alpha,-\alpha)$ będziemy używać symbolu $F(z;\alpha,f)$. Zatem jednolistność funkcji $F(z;\alpha,f)$ w $D$ dla $|\alpha| \le \frac{1}{8}$ jest oczywista (na podstawie wspomnianego wyniku uzyskanego przez J. Godulę).

Łatwo zauważyć, że dla $\alpha \in \langle 0,1\rangle$ powyższy związek daje w $D$ zależność między funkcjami $f \in S^*_{\langle\alpha\rangle} = \{f \in S^*; |\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}| \le \alpha\frac{\pi}{2},\ z \in D\}$, a funkcjami $F \in R_{\langle\alpha\rangle} = \{f \in S; |\arg f'(z)| \le \alpha\frac{\pi}{2},\ z \in D\}$, które są jednolistne w $D$ (patrz np.[7], str. 47). Warto również zauważyć, że $F(z;\alpha,f)$ jest funkcją jednolistną w $D$ dla $\alpha \in \langle 0,1\rangle$, jeśli $f \in \check{S} = \{f \in S; \mathrm{Re}[e^{i\varphi}\frac{zf'(z)}{f(z)}] > 0,\ z \in D\}$, $\varphi \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Następnie zauważmy, że jeśli $f \in S$, $\alpha = 1$, to $F(z;1,f)$ jest funkcją jednolistną co najmniej w kole $|z| < r_0 = \tanh\frac{\pi}{4} = 0,655\ldots$.

W dalszym ciągu wykorzystane zostanie następujące kryterium jednolistności funkcji:

**Twierdzenie A.** *[1] Jeśli $f$ jest funkcją holomorficzną w $D$, $f'(0) \neq 0$ i jeśli istnieje stała $c$, $|c| \le 1$, $c \neq 1$ taka, że*

$$|(1-|z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)} - c|z|^2| \le 1, \qquad z \in D, \tag{1.1}$$

*to $f$ jest jednolistne w $D$.*

**2.** Udowodnimy twierdzenie, którego wynik "krzyżuje" się ze wspomnianym rezultatem otrzymanym przez Godulę w przypadku $g = f$ i który dla specjalnych wartości $\beta$ i $\alpha$ jest lepszy od wyniku, jaki można uzyskać z rezultatu Goduli.

**Twierdzenie 2.1.** *Jeśli $f \in S$ i $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ spełniają nierówność*

$$3|\beta| + 2|2\alpha+\beta| \le 1, \tag{2.1}$$

*to*

$$F(z) = \int_0^z (f'(t))^\alpha (\frac{f(t)}{t})^\beta\, dt$$

*jest funkcją jednolistną w $D$.*

*Dowód.* Wiadomo, że jeśli $G \in \Sigma$, $G(\zeta) = \zeta + b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \ldots$, $|\zeta| > 1$, to

$$|G(\zeta) - b_0 - \zeta| \le \frac{3}{|\zeta|}, \tag{2.2}$$

(patrz np. [9], str. 146). Jeśli $f \in S$, $f(z) = z + a_2z^2 + \ldots$, to związek $G(\zeta) = \frac{1}{f(\frac{1}{\zeta})}$, $|\zeta| > 1$,między funkcjami $G \in \Sigma_0$ i $f$ wraz z (2.2) daje następującą nierówność

$$|\frac{z}{f(z)} + a_2z - 1| \le 3|z|^2 \qquad \text{dla } z \in D. \tag{2.3}$$

Z określenia funkcji $F$ otrzymujemy

$$\frac{zF''(z)}{F'(z)} = \alpha\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \beta(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1), \qquad z \in D. \tag{2.4}$$

Połóżmy

$$g(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+z\bar{z}_0}) - f(z_0)}{f'(z_0)(1-|z|^2)} = z + \beta_2z^2 + \ldots, \qquad z \in D.$$

Oczywiście $g \in S$. Stąd otrzymujemy

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = \frac{-z_0}{g(-z_0)(1-|z_0|^2)}, \qquad \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} = \frac{2\beta_2 z_0 + 2|z_0|^2}{1-|z_0|^2}. \tag{2.5}$$

Niech $z_0 \in D$ będzie ustalonym punktem, który dla przejrzystości zapisu, oznaczymy dalej przez $z$. Lewa strona nierówności (1.1) dla funkcji $F$, wobec (2.4) i (2.5), daje się zapisać w postaci

$$\begin{aligned} &|c|z|^2 - (1-|z|^2)\,\frac{zF''(z)}{F'(z)}| \\ &\qquad = |(c-2\alpha-\beta)|z|^2 - \beta\Big(\frac{-z}{g(-z)} - \beta_2 z - 1\Big) - \beta_2(2\alpha+\beta)z|. \end{aligned}$$

Przyjmując $c = 2\alpha+\beta$ otrzymujemy stąd, wobec (2.1) i (2.3),

$$|c|z|^2 - (1-|z|^2)\,\frac{zF''(z)}{F'(z)}| \le 3|\beta| + 2|2\alpha+\beta| \le 1, \qquad z \in D.$$

Ponieważ $z$ jest dowolnym ustalonym punktem $D$, to z kryterium Ahlforsa otrzymujemy tezę twierdzenia.

Z Twierdzenia 2.1 otrzymujemy następujący wniosek dotyczący klasycznego zagadnienia.

**Twierdzenie 2.2.** *Jeżeli $f \in S$ i $\alpha \in \mathbb{C}$, to $F(z) = \int_0^z (\frac{tf'(t)}{f(t)})^\alpha\, dt$, $z \in D$, jest funkcją jednolistną w $D$ dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{C}$ takich, że $|\alpha| \le \frac{1}{5}$.*

Warto zauważyć, że rezultatu tego nie da się uzyskać z cytowanego poprzednio wyniku J. Goduli [8].

Tak więc dla $f \in S$ zbiór zmienności tych $\alpha$, dla których $F(z;\alpha,f)$ jest funkcją jednolistną w $D$ zawiera koło $|\alpha| \le \frac{1}{5}$. Interesujące jest wyznaczenie tego zbioru.

Przykład funkcji $f_0 \in S^*$, $f_0(z) = ze^{-z}$, $z \in D$, dla której $F(z;\alpha,f_0) = -\frac{1}{\alpha+1}[(1-z)^{\alpha+1} - 1]$ wskazuje na to, że dla $\alpha \in (1,\infty)$ funkcja $F(z;\alpha,f_0)$ nie jest jednolistna w $D$. Z drugiej strony, dla funkcji $f_1 \in S^c$, $f_1(z) = \frac{z}{1-z}$, $z \in D$, mamy $F(z;\alpha,f_1) = -\frac{1}{1-\alpha}[(1-z)^\alpha - 1]$, a więc w tym przypadku $F(z;\alpha,f_1)$ nie jest funkcją jednolistną dla $\alpha \in (-\infty,-1)$. W takim razie problem jednolistności $F(z;\alpha,f)$ dla $f \in S$ ma sens dla $\alpha \in R$ tylko wtedy, gdy $\alpha \in \langle -1, 1\rangle$. Wobec poprzednich spostrzeżeń problem jednolistności $F(z;\alpha,f)$, $f \in S$, w przypadku rzeczywistych $\alpha$, pozostaje otwarty dla $\alpha \in \langle -1, -\frac{1}{5}) \cup (\frac{1}{5}, 1\rangle$.

Wykażemy następnie, że problem jednolistności funkcji $F(z;\alpha,f)$ dla dowolnej funkcji $f \in S$ i $\alpha$ zespolonych pozostaje otwarty jedynie, gdy $\frac{1}{5} < |\alpha| \le 1$. W tym celu wykorzystamy następujące dwa lematy:

**Lemat 2.1.** *Funkcja $F(z,\mu) = -\frac{1}{\mu}[(1-z)^\mu - 1] = -\frac{1}{\mu}[e^{\mu\log(1-z)} - 1]$, $z \in D$, $\mu \in \mathbb{C}$, jest jednolistna w $D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu$ leży w jednym z kół $|\mu - 1| \le 1$, $|\mu+1| \le 1$.*

Lemat o identycznej treści sformułowany dla funkcji $f(z) = (1-z)^\mu$, $z \in D$ podał W.C. Royster [13], lecz jego rozumowanie dowodowe obowiązuje tylko przy założeniu $\mu \neq 0$, które przeoczył. Lemat 2.1 jest równoważny z lematem Roystera, ale tylko dla $\mu \neq 0$. Dla $\mu = 0$ jego lemat jest fałszywy, natomiast prawdziwy jest Lemat 2.1, gdzie w tym przypadku przyjmuje się funkcję graniczną $lim_{\mu\to 0}F(z,\mu) = -\log(1-z)$, $z \in D$, która jak wiadomo, jest jednolistna i wypukła.

Wykażemy następnie

**Lemat 2.2.** *Dla każdego $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| > 1$, istnieje funkcja $f \in S$, dla której funkcja $F(z;\alpha,f)$ nie jest jednolistna w $D$.*

*Dowód.* Jednolistność określonych wyżej funkcji $F(z;\alpha,f_1)$ i $F(z;\alpha,f_0)$ w $D$ wynika bezpośrednio z Lematu 2.1. Druga z tych funkcji jest jednolistna wtedy i tylko wtedy, gdy $|\alpha| \leq 1$ lub $|\alpha+2| \leq 1$, natomiast pierwsza z nich jest jednolistna wtedy i tylko wtedy, gdy $|\alpha| \leq 1$ lub $|\alpha - 2| \leq 1$. Z bezpośredniej interpretacji geometrycznej wynika więc teza lematu.

Wnioskujemy stąd również, że tego rezultatu nie da się poprawić, gdy funkcje klasy $S$ zamienić na funkcje klasy $S^* \subset S$.

## SPIS LITERATURY


1. L.V. Ahlfors, *Sufficient conditions for quasiconformal extension*, Princeton Annales of Math. Studies **79** (1974), 23–29.
2. J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255** (1972), 23–43.
3. M. Biernacki, *Sur l'integrale des fonctions univalentes*, Bull. Polon. Sci. Ser. Sci. math. astr. et phys. **8** (1960), 29–34.
4. W.M. Causey, *The close–to–convexity univalence of an integral*, Math. Z. **99** (1967), 207–212.
5. ———, *The univalence of an integral*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1971), 500–502.
6. P.L. Duren, M.S. Shapiro and A.L. Shilds, *Singular measures and domains not of Smirnov type*, Duke Math. J. **33** (1966), 247–254.
7. P.L. Duren, *Univalent Functions*, Springer Verlag, 1983.
8. J. Godula, *On univalence of certain integral*, Ann. Univ. Mariae Curie–Skłodowska Sectio A **33** (1979), no. 7, 69–76.
9. J. Krzyż, *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, PWN, Warszawa, 1965.
10. J. Krzyż, Z. Lewandowski, *On the integral of univalent functions*, Bull. Polon. Sci. Ser. Sci. math. astr. et phys. **11** (1963), no. 7, 447–448.
11. M. Nunokawa, *On the univalency and multivalency of certain analytic functions*, Math. Z. **104** (1968), no. 5, 394–404.
12. J.A. Pfaltzgraff, *Univalence of the inteegral of $\int_0^z (f'(t))^\lambda\, dt$*, Bull. London Math. Soc. (1975), 254–256.
13. W.C. Royster, *On the univalence of certain integral*, Michigan Math. J. **12** (1965), no. 4, 385–387.


## Univalence of some integral operator


**Summary.** Let $S$ denote the class of functions $f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, holomorphic and univalent in the disc $D = \{z : |z| < 1\}$. It is proved that if $f \in S$ and $\alpha$, $\beta \in \mathbb{C}$ satisfy the inequality $3|\beta| + 2|2\alpha + \beta| \leq 1$, then the function

$$F(z) = \int_0^z [f'(t)]^\alpha [\frac{f(t)}{t}]^\beta\, dt$$

is univalent in $D$.

In particular, if $\beta = -\alpha$, one obtains the univalence of the function

$$F(z) = \int_0^z [\frac{tf'(t)}{f(t)}]^\alpha \, dt, \qquad z \in D,$$

for all $\alpha \in \mathbb{C}$ such that $|\alpha| \le \frac{1}{5}$. This function is not univalent for $|\alpha| > 1$; the problem of its univalence remains open for $\frac{1}{5} < |\alpha| \le 1$.

*Bronisławów, 13-17 stycznia 1992 r.*