

Niezdegenerowany skok liczb Milnora osobliwości powierzchni

Justyna Walewska

Wydział Matematyki i Informatyki UŁ

XXXVII Konferencja i Warsztaty
„Geometria Analityczna i Algebraiczna”
Łódź, 11 – 15 stycznia 2016

Osobliwość izolowana

Osobliwością izolowaną w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$ nazywamy kielek funkcji holomorficznej

$$f_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$$

mający izolowany punkt krytyczny w 0 , tzn.

- $f_0(0) = 0$,
- $\nabla f_0(0) = 0$,
- $\nabla f_0(z) \neq 0$ dla $z \neq 0$.

Deformacja osobliwości

- ❶ Niech f_0 będzie elementem pewnej holomorficznej rodziny $(f_s)_{s \in S}$, $0 \in S \subset \mathbb{C}$, tzn.
 - ❶ $f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja holomorficzna (kielek w 0)
 - ❷ $f(0, z) = f_0(z)$
 - ❸ $f_s(s, 0) = 0$.
- ❷ Przyjmujemy $f_s(z) := f(s, z)$
- ❸ Rodzinę $(f_s)_{s \in S}$ nazywamy deformacją f_0 .

Liczba Milnora

Liczbą Milnora osobliwości f_0 nazywamy liczbę

$$\mu(f_0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / (\nabla f_0) = i_0((\nabla f_0)\mathcal{O}_n).$$

Dla każdego $s \in U$ określona jest liczba Milnora $\mu(f_s)$.

Znane fakty dotyczące liczby Milnora

- 1 $\mu(f_0) \in \mathbb{N}$,
- 2 $\mu(f_s) = \text{const}$ dla $s \neq 0$ dostatecznie małych,
- 3 $\mu(f_s) \leq \mu(f_0)$ dla $s \neq 0$ dostatecznie małych.

Osobliwość niezdegenerowana powierzchni

Niech

$$f_0(x, y, z) := \sum_{i, j, k \in \mathbb{N}} a_{i, j, k} x^i y^j z^k,$$

będzie osobliwością. Niech

$$\text{supp}(f_0) := \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : a_{i, j, k} \neq 0\}$$

będzie nośnikiem f_0 . Wielościanem Newtona $\Gamma_+(f_0)$ nzw. otoczkę wypukłą zbioru

$$\bigcup_{(i, j, k) \in \text{supp}(f_0)} (i, j, k) + \mathbb{R}_+^3,$$

gdzie \mathbb{R}_+^3 jest domkniętym oktantem w \mathbb{R}^3 zawierającym punkty o nieujemnych współrzędnych.

Osobliwość niezdegenerowana powierzchni

Osobliwość f_0 nazywamy dogodną jeśli $\Gamma_+(f_0) \cap OX_i \neq \emptyset$ dla $i = 1, 2, 3$, gdzie OX_i są osiami układu współrzędnych.

Zbiór zwartych ścianek (wszystkich wymiarów) wielościanu Newtona $\Gamma_+(f_0)$ tworzy diagram Newtona osobliwości f_0 .

Oznaczamy go przez $\Gamma(f_0)$.

Dla każdej ścianki $S \in \Gamma(f_0)$ definiujemy wagowo jednorodny wielomian

$$(f_0)_S := \sum_{(i,j,k) \in S} a_{i,j,k} x^i y^j z^k.$$

Osobliwość niezdegenerowana powierzchni

Powiemy, że osobliwość f_0 jest niezdegenerowana na $S \in \Gamma(f_0)$ jeżeli układ równań

$$\frac{\partial(f_0)_S}{\partial x}(x, y, z) = 0 \quad \frac{\partial(f_0)_S}{\partial y}(x, y, z) = 0 \quad \frac{\partial(f_0)_S}{\partial z}(x, y, z) = 0$$

nie ma rozwiązań w $(\mathbb{C}^*)^3$.

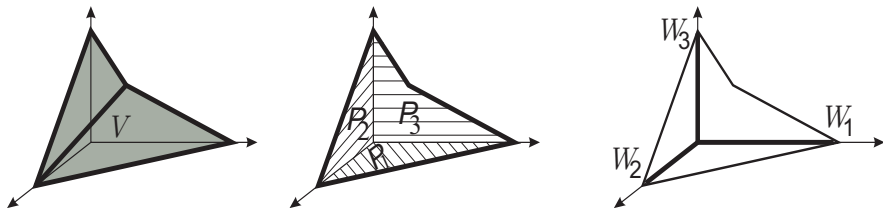
Osobliwość f_0 jest niezdegenerowana (w sensie Kouchnirenki) jeśli jest niezdegenerowana na każdej ściance $\Gamma(f_0)$.

Oznaczenia

W dalszym ciągu zakładamy, że f_0 jest dogodna. Oznaczmy

- $\Gamma_-(f_0)$ – zwarty wielościan ograniczony przez $\Gamma(f_0)$ i płaszczyznami \overline{OXY} , \overline{OXZ} , \overline{OYZ} ; innymi słowy,
 $\Gamma_-(f_0) := \mathbb{R}_+^3 \setminus \Gamma_+(f_0)$,
- V – objętość wielościanu $\Gamma_-(f_0)$,
- P_1, P_2, P_3 – pola dwuwymiarowych ścianek $\Gamma_-(f_0)$ leżące na płaszczyznach OXY , OXZ , OYZ , odpowiednio
- W_1, W_2, W_3 – długości krawędzi (= jednowymiarowe ścianki) $\Gamma_-(f_0)$ leżących na osiach OX , OY , OZ , odpowiednio.

Oznaczenia



Rysunek : Geometryczne znaczenie objętości V , pól P_i i długości W_j .

Liczba Newtona

Liczbą Newtona $\nu(f_0)$ osobliwości f_0 nazywamy

$$\nu(f_0) = 3!V - 2!(P_1 + P_2 + P_3) + 1!(W_1 + W_2 + W_3) - 1.$$

Twierdzenie 1 (Kouchnirenko)

Jeśli f_0 jest osobliwością dogodną, to

- 1 $\mu(f_0) \geq \nu(f_0)$,
- 2 jeśli f_0 jest niezdegenerowana, to $\mu(f_0) = \nu(f_0)$.

Skok liczby Milnora

Różnicę

$$\mu(f_0) - \mu(f_s) \quad s \neq 0$$

nazywamy **skokiem liczby Milnora deformacji** $(f_s)_{s \in S}$ i oznaczamy $\lambda((f_s))$.

Skokiem $\lambda(f_0)$ **kiełka** f_0 nazywamy minimalny z niezerowych skoków rodzin (f_s) po wszystkich możliwych deformacjach kiełka f_0 , czyli

$$\lambda(f_0) := \min_{(f_s) \in \mathcal{D}_0(f_0)} \lambda((f_s)),$$

gdzie przez $\mathcal{D}_0(f_0)$ oznaczamy wszystkie deformacje (f_s) kiełka f_0 , dla których $\lambda((f_s)) \neq 0$.

Niezdegenerowany skok liczby Milnora

Niech f_0 będzie osobliwością. **Deformacją niezdegenerowaną** f_0 nazywamy deformację $(f_s)_{s \in U}$ kielka f_0 taką, że f_s jest niezdegenerowana dla każdego $s \neq 0$. Zbiór wszystkich niezdegenerowanych deformacji osobliwości f_0 oznaczamy przez $\mathcal{D}^{\text{nd}}(f_0)$.

Niezdegenerowanym skokiem $\lambda^{\text{nd}}(f_0)$ osobliwości f_0 nzw. liczbę

$$\lambda^{\text{nd}}(f_0) := \min_{(f_s) \in \mathcal{D}_0^{\text{nd}}(f_0)} \lambda((f_s)),$$

gdzie przez $\mathcal{D}_0^{\text{nd}}(f_0)$ oznaczamy wszystkie niezdegenerowane deformacje (f_s) kielka f_0 , dla których $\lambda((f_s)) \neq 0$.

Własności niezdegenerowanego skoku osobliwości

- 1 Dla dowolnej osobliwości f_0 zachodzi nierówność

$$\lambda(f_0) \leq \lambda^{\text{nd}}(f_0).$$

- 2 Jeżeli f_0 jest zdegenerowana, to

$$\lambda^{\text{nd}}(f_0) = \begin{cases} \mu(f_0) - \mu(f_0^{\text{nd}}), & \text{gdym } \mu(f_0) - \mu(f_0^{\text{nd}}) > 0 \\ \lambda^{\text{nd}}(f_0^{\text{nd}}), & \text{gdym } \mu(f_0) - \mu(f_0^{\text{nd}}) = 0 \end{cases}.$$

O monotoniczności liczby Newtona

Twierdzenie 2 ([Gwo08] i [Fur04])

Niech $f_0, \tilde{f}_0 \in \mathcal{O}_n$ będą osobliwościami dogodnymi takimi, że $\Gamma_+(f_0) \subset \Gamma_+(\tilde{f}_0)$. Wtedy $\nu(f_0) \geq \nu(\tilde{f}_0)$.

Niech $J := \Gamma_-(f_0) \cap \mathbb{Z}^n$. Oczywiście J jest zbiorem skończonym. Dla każdego $i = (i_1, \dots, i_n) \in J$ definiujemy deformację $(f_s^i)_{s \in \mathbb{C}}$ osobliwości f_0 następująco

$$f_s^i(z_1, \dots, z_n) := f_0(z_1, \dots, z_n) + sz_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}.$$

Dla każdego $i \in J$ deformacja (f_s^i) osobliwości f_0 jest niezdegenerowana i dogodna dla dostatecznie małych s .

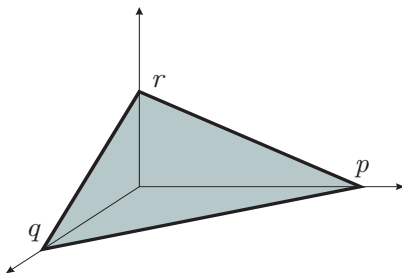
Twierdzenie

Twierdzenie 3

Jeśli f_0 jest dogodną i niezdegenerowaną osobliwością, to

$$\lambda^{\text{nd}}(f_0) = \min_{i \in J_0} \lambda((f_s^i)),$$

gdzie $J_0 \subset J$ jest zbiorem takich $i \in J$ dla których $\lambda^{\text{nd}}((f_s^i)) > 0$.



Rysunek : $f_0(x, y, z) = ax^p + by^q + cz^r + \dots$

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy, że

Wniosek

Jeśli f_0 i \tilde{f}_0 są niezdegenerowane i dogodne oraz $\Gamma(f_0) = \Gamma(\tilde{f}_0)$, to $\lambda^{\text{nd}}(f_0) = \lambda^{\text{nd}}(\tilde{f}_0)$.

Algorytm

Algorytm na obliczanie $\lambda^{\text{nd}}(f_0)$ w przypadku, gdy:

- 1 f_0 osobliwość dogodna
- 2 f_0 osobliwość niezdegenerowana
- 3 f_0 ma tylko jedną ściankę dwuwymiarową w diagramie Newtona f_0 . Z Twierdzenia Kouchnirenki wynika, że możemy założyć, że $f_0(x, y, z) = x^p + y^q + z^r$. Wtedy $\mu(f_0) = (p-1)(q-1)(r-1)$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $p \geq q \geq r \geq 2$

Algorytm

Zakładamy dodatkowo, że

$$\text{NWD}(p, q) = \text{NWD}(p, r) = \text{NWD}(q, r) = 1.$$

Z Twierdzenia 3 wystarczy obliczyć skoki deformacji $(f_s^i)_{s \in \mathbb{C}}$, gdzie $i \in J$. Rozważmy przypadki:

1. Niech $i \in OX$ lub $i \in OY$ lub $i \in OZ$. Ze wzoru Kouchnirenki oraz z założenia $p \geq q \geq r$ łatwo sprawdzamy, że najmniejszy skok na osiach układu współrzędnych jest realizowany przez deformację $(f_s^{(p-1,0,0)})$, tzn.

$$(f_s^{(p-1,0,0)}) = x^p + y^q + z^r + sx^{p-1},$$

i jest równy $(q-1)(r-1)$.

Algorytm

2. Niech $i \in OXY$ lub $i \in OXZ$ lub $i \in OYZ$. Wtedy z wyników [Bod07] łatwo znajdujemy punkty realizujące skoki na odpowiednich płaszczyznach.
- 1 deformacja $(f^{(b_1, q - a_1, 0)})$, gdzie $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ są takie, że $a_1 p - b_1 q = 1$ i $0 < a_1 < q$, $b_1 > 0$; to daje skok na płaszczyźnie OXY równy $(r - 1)$.
 - 2 $(f^{(0, b_2, r - a_2)})$, gdzie $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ są takie, że $a_2 q - b_2 r = 1$ i $0 < a_2 < r$, $b_2 > 0$; to daje skok na płaszczyźnie OYZ równy $(p - 1)$.
 - 3 $(f^{(b_3, 0, p - a_3)})$, gdzie $a_3, b_3 \in \mathbb{Z}$ są takie, że $a_3 p - b_3 r = 1$ i $0 < a_3 < p$, $b_3 > 0$; to daje skok na płaszczyźnie OXZ równy $(q - 1)$.

Z powyższych rozważań dostajemy, że skok realizowany punktem leżącym na osiach lub płaszczyźnie wynosi $r - 1$.

Algorytm

3. Rozważmy punkty leżące wewnątrz ostrosłupa o wierzchołkach $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$, $(0, 0, r)$, $(0, 0, 0)$. Weźmy jeden taki punkt $i = (\alpha, \beta, \gamma)$. Oznacza to, że

$$(A) \quad 0 < \alpha < p, \quad 0 < \beta < q, \quad 0 < \gamma < r$$

$$(B) \quad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \frac{\gamma}{r} < 1 \iff \alpha qr + \beta pr + \gamma pq < pqr$$

Co więcej

$$\lambda(f_s^{(\alpha, \beta, \gamma)}) = pqr - \alpha qr - \beta pr - \gamma pq.$$

Problem

Dla danych liczb naturalnych $p > q > r \geq 2$ parami względnie pierwszych znaleźć liczby naturalne α, β, γ spełniające warunki (A) i (B), dla których wyrażenie $pqr - \alpha qr - \beta pr - \gamma pq$ osiąga niezerowe minimum.

Algorytm

Zauważmy, że

- 1 NWD(qr, pr, pq) = 1.
- 2 Zatem istnieją liczby całkowite $a, b, c \in \mathbb{Z}$ takie, że

$$aqr + bpr + cpq = 1. \quad (1)$$

Niech (a, b, c) będzie taką trójką.

- 3 $abc \neq 0$

Korzystając z Algorytmu Euklidesa przekształcamy równanie (1) do postaci unormowanej

$$-aqr - bpr + cpq = 1,$$

gdzie $a < p$, $b < q$ i $c > 0$ – dowolne.

Algorytm

- ❶ jeśli $c > 0$ i $c < r$ wtedy $\alpha = -a$, $\beta = -b$, $\gamma = r - c$, spełnia (A) oraz

$$pqr + aqr + bpr - (r - c)pq = 1.$$

Zatem (α, β, γ) realizuje problem.

- ❷ Jeśli $c > 0$ i $c \geq r$ wtedy nie istnieje punkt (α, β, γ) spełniający (A) oraz (B), dla którego

$$pqr - \alpha qr - \beta pr - \gamma pq = 1.$$

Powtarzamy rozumowanie dla kolejnych równości

$$-aqr - bpq + cpq = i \quad \text{dla} \quad i = 2, \dots, r - 2.$$

Główny wynik

Niech $f_0 \in \mathcal{O}_3$ będzie dogodną i niezdegenerowaną osobliwością, której diagram Newtona ma tylko jedną dwuwymiarową ściankę. Załóżmy, że wierzchołki $(p, 0, 0)$, $(0, q, 0)$, $(0, 0, r)$ tej ścianki są takie, że $p \geq q \geq r \geq 2$ i liczby p, q, r są parami względnie pierwsze. Wtedy

$$\lambda^{\text{nd}}(f_0) = \begin{cases} i_0 & \begin{array}{l} \text{jeśli istnieją liczby całkowite } a, b, c \text{ takie, że} \\ aqr + bpr + cpq = i_0, \quad 1 \leq i_0 \leq r - 2, \\ 0 < a < p, \quad 0 < -b < q, \quad 0 < -c < r, \\ i_0 - \text{najmniejsze,} \end{array} \\ r - 1 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Co więcej, i_0 można wyznaczyć korzystając z algorytmu Euklidesa.

Przykład

Dla $f_0(x, y, z) := x^{11} + y^6 + z^5$ mamy $p = 11$, $q = 6$, $r = 5$ i

- $-5 \cdot qr - 6 \cdot pr + 6 \cdot pq = 1$ – nie spełnia warunków twierdzenia
- $-8 \cdot qr - 4 \cdot pr + 7 \cdot pq = 2$ – nie spełnia warunków twierdzenia
- $-1 \cdot qr - 3 \cdot pr + 3 \cdot pq = 3$ – spełnia warunki twierdzenia.

Stąd $\lambda^{\text{nd}}(f_0) = 3$. Skok ten jest realizowany przez deformację

$$f_s^{(1,3,2)}(x, y, z) := x^{11} + y^6 + z^5 + sxy^3z^2.$$

Minimalny skok realizowany przez punkty leżące na ściankach jednowymiarowych lub osiach układu współrzędnych jest równy $r - 1 = 4$.

Dziękuję za uwagę!

Literatura



Vladimir Igorevich Arnold, Sabir Medgidovich Gusein-Zade, and Aleksandr Nikolaevich Varchenko.

Singularities of differentiable maps. Vol. I. The classification of critical points, caustics and wave fronts, volume 82 of Monographs in Mathematics.

Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1985.

Translated from the Russian by Ian Porteous and Mark Reynolds.



Szymon Brzostowski and Tadeusz Krasieński.

The jump of the Milnor number in the X_9 singularity class.

Cent. Eur. J. Math., 12(3):429–435, 2014.



Szymon Brzostowski, Tadeusz Krasieński, and Justyna Walewska.

Milnor numbers in deformations of homogeneous singularities.

ArXiv e-prints, <http://arxiv.org/abs/1404.7704v1>, April 2014.



Arnaud Bodin.

Jump of Milnor numbers.

Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.), 38(3):389–396, 2007.



Masako Furuya.

Lower bound of Newton number.

Tokyo J. Math., 27:177–186, 2004.



Gert-Martin Greuel, Christoph Lossen, and Eugenii Shustin.

Introduction to Singularities and Deformations.

Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.



Janusz Gwoździewicz.

Note on the Newton number.

Univ. Jagel. Acta Math., 46:31–33, 2008.

Literatura



Sabir Medgidovich Gusein-Zade.

On singularities from which an A_1 can be split off.
Funct. Anal. Appl., 27(1):57–59, 1993.



Anatoly Georgievich Kouchnirenko.

Polyèdres de Newton et nombres de Milnor.
Invent. Math., 32(1):1–31, 1976.



Mutsuo Oka.

On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary.
J. Math. Soc. Japan, 31(3):435–450, 1979.



Arkadiusz Płoski.

Newton polygons and the Łojasiewicz exponent of a holomorphic mapping of \mathbb{C}^2 .
Ann. Polon. Math., 51:275–281, 1990.



Arkadiusz Płoski.

Milnor number of a plane curve and Newton polygons.
Univ. Iagel. Acta Math., 37:75–80, 1999.
Effective methods in algebraic and analytic geometry (Bielsko-Biała, 1997).



Justyna Walewska.

The second jump of Milnor numbers.
Demonstratio Math., 43(2):361–374, 2010.



Justyna Walewska.

Jumps of Milnor numbers in families of non-degenerate and non-convenient singularities.
In Analytic and Algebraic Geometry, pages 141–153. Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013.