

SKOKI LICZBY MILNORA
W RODZINACH OSOBLIWOŚCI II

Justyna Walewska (Łódź)

Streszczenie

W artykule podane są dowody oszacowań A. Bodina (zamieszczone w [1] bez dowodu) skoku liczby Milnora deformacji osobliwości w przypadku, gdy diagram Newtona tej osobliwości składa się z więcej niż jednego odcinka.

1. WPROWADZENIE

Artykuł ten jest kontynuacją artykułu [4] zamieszczonego w Materiałach XXIX Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespólonej. Przyjmujemy bez zmian wszystkie podane tam definicje i wprowadzone pojęcia.

Niech $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie osobliwością. W pierwszej części udowodni-
liśmy wzór na niezdegenerowany skok $\lambda'(f_0)$ osobliwości f_0 w przypadkach, gdy:
1. łamana Newtona $\Gamma(f_0)$ osobliwości f_0 składa się tylko z jednego odcinka,
2. łamana Newtona $\Gamma(f_0)$ osobliwości f_0 składa się z dwóch lub większej liczby
odcinków i czynniki rozkładu f_0 w $\mathbb{C}\{x, y\}$ według odcinków łamanej Newtona są
gładkie (wtedy $\lambda'(f_0) = 1$).

W tej części podamy oszacowania skoku $\lambda'(f_0)$ osobliwości f_0 w przypadku
ogólnym w terminach skoków czynników rozkładu f_0 .

2. PRZYPADEK DIAGRAMU NEWTONA SKŁADAJĄCEGO SIĘ Z WIĘCEJ NIŻ JEDNEGO ODCINKA

Niech $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie dowolną osobliwością niezdegenerowaną i dogodną. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że łamana Newtona $\Gamma(f_0)$ ma dwa lub więcej odcinków, gdyż przypadek osobliwości, której łamana Newtona składa się z jednego odcinka, został omówiony w [4].

Niech $f_0 = \prod_{i=1}^k (f_0)_i$, $k \geq 2$, będzie rozkładem niezdegenerowanej i dogodnej osobliwości f_0 według odcinków jej diagramu Newtona. W dalszym ciągu będziemy utożsamiali odcinek odpowiadający $(f_0)_i$ z odpowiednim odcinkiem diagramu Newtona osobliwości f_0 .

Oznaczmy przez $Q_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, k+1$ kolejne wierzchołki odcinków łamanej Newtona $\Gamma(f_0)$ licząc od lewej strony, γ_i odcinek o wierzchołkach Q_i i Q_{i+1} , $i = 1, \dots, k$, $(J_0)_i$ zbiór wszystkich jednomianów leżących w zwartym obszarze ograniczonym prostymi $x = x_i$, $y = y_{i+1}$ oraz odcinkiem γ_i dla $i = 1, \dots, k$. Niech L_{γ_i} będzie prostą przechodzącą przez punkty Q_i i Q_{i+1} , $i = 1, \dots, k$ oraz niech P będzie punktem realizującym skok $\lambda'(f_0)$ (patrz Twierdzenie 5 w [4]).

Najpierw podamy oszacowanie w przypadku, gdy w rozkładzie f_0 w $\mathbb{C}\{x, y\}$ według odcinków łamanej Newtona osobliwości f_0 żaden z czynników tego rozkładu nie jest gładki. Wyróżniamy ten przypadek, gdyż otrzymujemy tutaj lepsze oszacowanie niż w przypadku ogólnym. W obu przypadkach oszacowania te są "ostre", tzn. podamy przykłady pokazujące, że nie można ich poprawić.

Twierdzenie 1 *Niech $f_0 = \prod_{i=1}^k (f_0)_i$, $k \geq 2$, będzie rozkładem niezdegenerowanej i dogodnej osobliwości f_0 według odcinków jej diagramu Newtona. Jeśli żaden $(f_0)_i$ nie jest gładki, to*

$$\min_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) \leq \lambda'(f_0) \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i).$$

Dowód. Pokażemy najpierw, że $\min_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) \leq \lambda'(f_0)$. Zauważmy, że gdy $P \in (J_0)_i$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, k\}$, to mamy oczywiście $\lambda'((f_0)_i) \leq \lambda'(f_0)$. W przeciwnym przypadku tzn., gdy $P \notin (J_0)_i$ dla żadnego $i \in \{1, \dots, k\}$, to bez trudu znajdujemy punkt $\tilde{P} \in (J_0)_i$, dla pewnego $i \in \{1, \dots, k\}$ taki, że

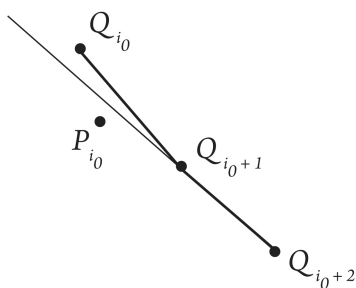
$$\lambda'(f_s^{\tilde{P}}) < \lambda'(f_s^P) = \lambda'(f_0).$$

Sprzeczność z wyborem punktu P . Zatem jest to przypadek niemożliwy.

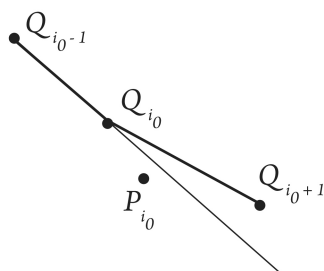
Pokażemy teraz, że $\lambda'(f_0) \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i)$. Ponieważ $(f_0)_i$, dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$ jest osobliwością niegładką, więc na mocy Twierdzenia 7 (patrz [4]) istnieje punkt $P_i \in (J_0)_i$ realizujący $\lambda'((f_0)_i)$. Oznaczmy przez $h_i := d(P_i, \gamma_i)$, $i = 1, \dots, k$. Weźmy pod uwagę odcinek γ_{i_0} diagramu f_0 taki, że $h_{i_0} = \min_{i=1, \dots, k} h_i$. Rozważmy przypadki:

I. $P_{i_0} \in (J_0)_{i_0}$ i P_{i_0} nie leży na prostych $x = x_{i_0}$, $y = y_{i_0+1}$. Twierdzimy, że punkt P_{i_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{i_0} . Istotnie, przypuścimy, że tak nie jest. Wówczas mogą się zdarzyć trzy przypadki:

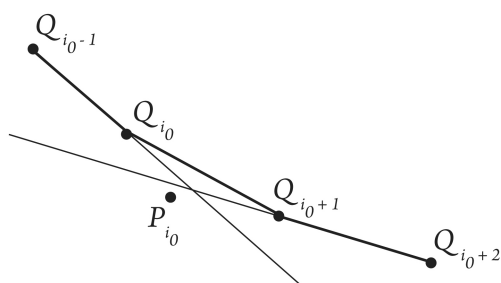
1⁰ P_{i_0} leży poniżej prostej $L_{\gamma_{i_0+1}}$ i powyżej prostej $L_{\gamma_{i_0-1}}$.



2⁰ P_{i_0} leży poniżej prostej $L_{\gamma_{i_0-1}}$ i powyżej prostej $L_{\gamma_{i_0+1}}$.

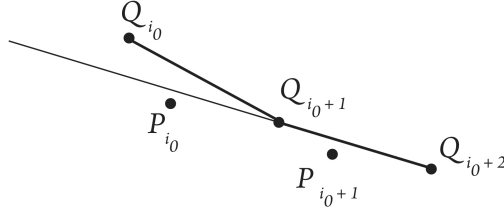


3⁰ P_{i_0} leży poniżej obu prostych $L_{\gamma_{i_0+1}}$ i $L_{\gamma_{i_0-1}}$.



Dla ustalenia uwagi rozpatrzmy przypadek 1⁰, gdyż przypadki 2⁰ i 3⁰ rozwa-

żamy podobnie. Weźmy pod uwagę odcinki γ_{i_0} i γ_{i_0+1} oraz punkty P_{i_0}, P_{i_0+1} .



Z założenia $h_{i_0} \leq h_{i_0+1}$. Zatem, jeśli przedłużymy odcinek γ_{i_0+1} do prostej $L_{\gamma_{i_0+1}}$, to $\tilde{h} := d(P_{i_0}, L_{\gamma_{i_0+1}}) < h_{i_0} \leq h_{i_0+1}$. Jeśli teraz przesuniemy punkt P_{i_0} o odpowiednią całkowitą wielokrotność wektora $\overrightarrow{Q_{i_0+1}Q_{i_0+2}}$, to przesunięty punkt, nazwijmy go \tilde{P}_{i_0+1} będzie miał współrzędne całkowite i będzie leżał w prostokącie o bokach długości $|\gamma_{i_0+1}|$ i \tilde{h} . Ponieważ $\tilde{h} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc przesunięty punkt będzie leżał w zbiorze $(J_0)_{i_0+1}$ oraz $d(\tilde{P}_{i_0+1}, \gamma_{i_0+1}) = d(P_{i_0}, L_{\gamma_{i_0+1}}) < h_{i_0+1}$. Otrzymaliśmy sprzeczność z wyborem punktu P_{i_0+1} .

Wykazaliśmy, że punkt P_{i_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{i_0} . Stąd

$$\lambda'(f_0) \leq \lambda'((f_0)_{i_0}) \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i).$$

II. P_{i_0} leży na prostej $x = x_{i_0}$. Wtedy $P_{i_0} = P_1$ (bo w przeciwnym razie mielibyśmy $h_1 < h_{i_0} = \min_{i=1, \dots, k} h_i$). Z drugiej strony, gdyby punkt P_1 leżał poniżej prostej L_{γ_2} , to przesuując punkt P_1 o odpowiednią całkowitą wielokrotność wektora $\overrightarrow{Q_2Q_3}$, otrzymalibyśmy punkt, nazwijmy go $\tilde{P}_2 \in (J_0)_2$, o współrzędnych całkowitych taki, że $h_1 > d(P_1, L_{\gamma_2}) = d(\tilde{P}_2, \gamma_2) \geq d(P_2, \gamma_2) = h_2$. Sprzeczność z założeniem o h_1 . Stąd

$$\lambda'(f_0) \leq \lambda'(f_0)_1 \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i)$$

III. P_{i_0} leży na prostej $y = y_{i_0+1}$. Ten przypadek rozważamy podobnie do przypadku **II**. ■

Podamy teraz przykłady świadczące o "ostrości" oszacowań w twierdzeniu.

Przykład 1

1. Dla $f_0(x, y) = (x^8 - y^6)(x^3 - y^2)$ mamy $\lambda'(x^8 - y^6) = 2$, $\lambda'(x^3 - y^2) = 1$ oraz $\lambda'(f_0) = 2$. Realizuje to deformacja $f_s(x, y) = (x^8 - y^6)(x^3 - y^2) + sxy^7$. Stąd $\min_{i=1,2} \lambda'(f_i) < \lambda'(f_0) = \max_{i=1,2} \lambda'(f_i)$.

2. Dla $f_0(x, y) = (x^8 - y^6)(x^3 - y^2)(x^4 - y^4)$ mamy $\lambda'(x^8 - y^6) = 2$, $\lambda'(x^3 - y^2) = 1$, $\lambda'(x^4 - y^4) = 3$ oraz $\lambda'(f_0) = 2$. Realizuje to deformacja $f_s(x, y) = (x^8 - y^6)(x^3 - y^2)(x^4 - y^4) + sx^5y^7$. Stąd $\min_{i=1,2,3} \lambda'(f_i) < \lambda'(f_0) < \max_{i=1,2,3} \lambda'(f_i)$.

3. Dla $f_0(x, y) = (x^3 - y^2)(x^6 - y^3)$ mamy $\lambda'(x^3 - y^2) = 1$, $\lambda'(x^6 - y^3) = 2$ oraz $\lambda'(f_0) = 1$. Realizuje to deformacja $f_s(x, y) = (x^3 - y^2)(x^6 - y^3) + sxy^4$. Stąd $\min_{i=1,2} \lambda'(f_i) = \lambda'(f_0) < \max_{i=1,2} \lambda'(f_i)$.

W ogólnym przypadku mamy następujące

Twierdzenie 2 Niech $f_0 = \prod_{i=1}^k (f_0)_i$, $k \geq 2$, będzie rozkładem niezdegenerowanej i dogodnej osobliwości f_0 według odcinków jej diagramu Newtona. Jeśli istnieje $l \in \{1, \dots, k\}$, dla którego $(f_0)_l$ jest gładki oraz istnieje $j \in \{1, \dots, k\}$, dla którego $(f_0)_j$ jest osobliwością niégładką, to

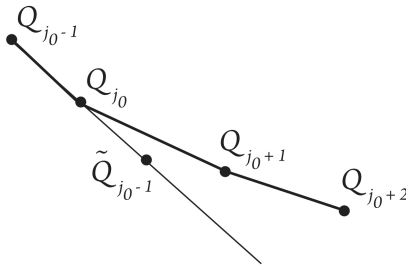
$$1 \leq \lambda'(f_0) \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) + 1.$$

Dowód. Nierówność $\lambda'(f_0) \geq 1$ jest oczywista. Pokażemy, że $\lambda'(f_0) \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'(f_0)_i + 1$. Ponieważ istnieje $j \in \{1, \dots, k\}$, dla którego $(f_0)_j$ jest osobliwością niégładką, więc na mocy Twierdzenia 7 (patrz [4]) istnieje punkt $P_j \in (J_0)_j$ realizujący $\lambda'((f_0)_j)$. Oznaczmy przez $h_j := d(P_j, \gamma_j)$. Weźmy pod uwagę odcinek γ_{j_0} diagramu f_0 taki, że $h_{j_0} = \min h_j$. Oznaczmy przez \tilde{Q}_{i_0-1} i \tilde{Q}_{i_0+2} punkty Q_{i_0-1} i Q_{i_0+2} przesunięte odpowiednio o wektory $2\overrightarrow{Q_{i_0-1}Q_{i_0}}$ oraz $2\overrightarrow{Q_{i_0+2}Q_{i_0+1}}$. Rozważmy przypadki:

I. $P_{j_0} \in (J_0)_{j_0}$ oraz P_{j_0} nie leży na prostych $x = x_{j_0}$, $y = y_{j_0+1}$. Oznaczmy przez \tilde{Q}_{j_0} punkt o współrzędnych $\tilde{Q}_{j_0} = (x_{j_0}, 2y_{j_0} - y_{j_0-1})$. Rozważmy podprzypadki:

1^0 $(f_0)_{j_0-1}$ jest gładki, $(f_0)_{j_0+1}$ jest osobliwością niégładką. Wówczas, gdy

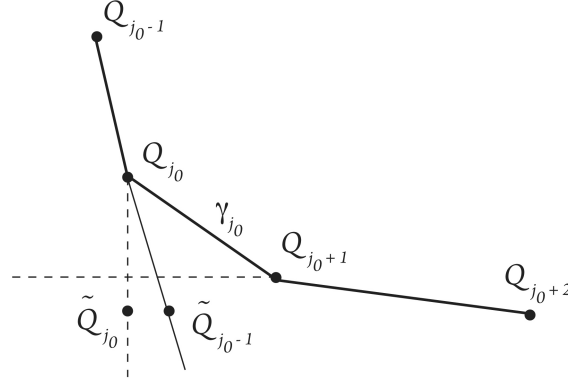
a) $y_{j_0-1} - y_{j_0} = 1$, to punkt $\tilde{Q}_{j_0-1} \in (J_0)_{j_0}$ oraz nie leży na prostych $x = x_{j_0}$, $y = y_{j_0+1}$.



Oznacza to, że $d(P_{j_0}, \gamma_{j_0}) \leq d(\tilde{Q}_{j_0-1}, \gamma_{j_0})$. Zatem punkt P_{j_0} leży powyżej prostej $L_{\gamma_{j_0-1}}$. Stąd i z dowodu poprzedniego twierdzenia (patrz przypadek **I**) mamy, że punkt P_{j_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} .

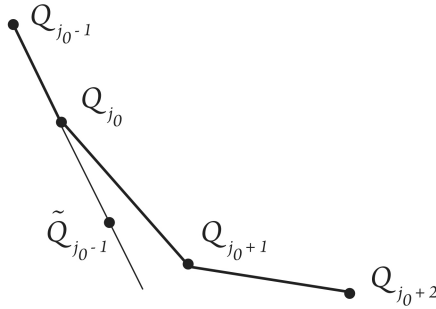
b) $x_{j_0} - x_{j_0-1} = 1$. Rozważmy podprzypadki:

(i) $y_{j_0-1} - y_{j_0} \geq y_{j_0} - y_{j_0+1}$.



Zauważmy, że w trójkącie o wierzchołkach Q_{j_0} , \tilde{Q}_{j_0-1} , \tilde{Q}_{j_0} i na odcinku $\overline{Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}}$ (oprócz końców) nie ma punktów o współrzędnych całkowitych. Oznacza to, że punkt P_{j_0} leży powyżej odcinka $\overline{Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}}$. Stąd i z dowodu poprzedniego twierdzenia (patrz przypadek **I**) mamy, że punkt P_{j_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} .

(ii) $y_{j_0-1} - y_{j_0} < y_{j_0} - y_{j_0+1}$. Zauważmy, że $\tilde{Q}_{j_0-1} \in (J_0)_{j_0}$ oraz nie leży na prostych $x = x_{j_0}$ i $y = y_{j_0+1}$.



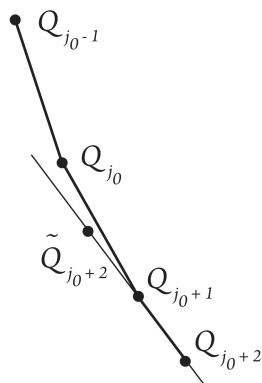
Oznacza to, że $d(P_{j_0}, \gamma_{j_0}) \leq d(\tilde{Q}_{j_0-1}, \gamma_{j_0})$, czyli punkt P_{j_0} leży powyżej prostej $L_{\gamma_{j_0-1}}$. Stąd i z dowodu poprzedniego twierdzenia (patrz przypadek **I**) mamy, że P_{j_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} . Zatem we wszystkich przypadkach 1^0 otrzymaliśmy

$$\lambda'(f_0) \leq \lambda'((f_0)_{j_0}) \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) < \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) + 1.$$

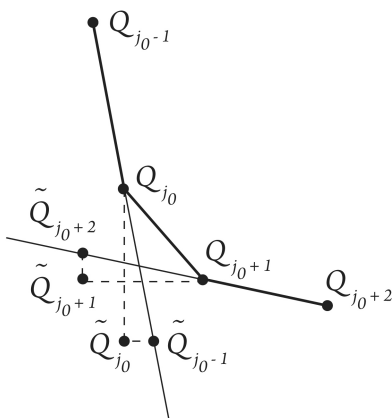
2^0 $(f_0)_{j_0-1}$ jest osobliwością niegładką i $(f_0)_{j_0+1}$ gładki. Rozważamy podobnie do 1^0 .

3^0 $(f_0)_{j_0-1}, (f_0)_{j_0+1}$ gładkie. Możliwe są trzy sytuacje:

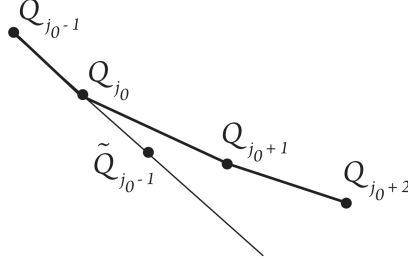
a) $x_{j_0} - x_{j_0-1} = 1$ i $x_{j_0+2} - x_{j_0+1} = 1$



b) $x_{j_0} - x_{j_0-1} = 1$ i $y_{j_0+1} - y_{j_0+2} = 1$



c) $y_{j_0-1} - y_{j_0} = 1$ i $y_{j_0+1} - y_{j_0+2} = 1$



Ad. a) Zauważmy, że punkt $\tilde{Q}_{j_0+2} \in (J_0)_{j_0}$ i \tilde{Q}_{j_0+2} nie leży na prostych $x = x_{j_0}$, $y = y_{j_0+1}$. Rozważmy podprzypadki:

(i) $\tilde{Q}_{j_0-1} \notin (J_0)_{j_0}$. Zauważmy, że na odcinku $\overline{Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}}$ (bez końców) oraz wewnątrz trójkąta o wierzchołkach $Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}\tilde{Q}_{j_0}$ nie ma punktów o współrzędnych całkowitych. Z drugiej strony, $\tilde{Q}_{j_0+2} \in L_{\gamma_{j_0+1}}$. Oznacza to, że \tilde{Q}_{j_0+2} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} . Ponieważ $d(P_{j_0}, \gamma_{j_0}) \leq d(\tilde{Q}_{j_0+2}, \gamma_{j_0})$, więc punkt P_{j_0} tym bardziej zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} .

(ii) $\tilde{Q}_{j_0-1} \in (J_0)_{j_0}$. Wtedy bierzemy $\min(d(\tilde{Q}_{j_0-1}, \gamma_{j_0}), d(\tilde{Q}_{j_0+2}, \gamma_{j_0}))$. Zauważmy, że ten z punktów, dla którego jest realizowane powyższe minimum zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} . Co więcej

$$d(P_{j_0}, \gamma_{j_0}) \leq \min(d(\tilde{Q}_{j_0-1}, \gamma_{j_0}), d(\tilde{Q}_{j_0+2}, \gamma_{j_0})),$$

zatem P_{j_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} .

Ad. b) Rozważmy podprzypadki:

(i) $\tilde{Q}_{j_0-1}, \tilde{Q}_{j_0+2} \notin (J_0)_{j_0}$. Oznaczmy przez \tilde{Q}_{j_0+1} punkt o współrzędnych $(2x_{j_0+1} - x_{j_0+2}, y_{j_0+1})$. Zauważmy, że na odcinkach $\overline{Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}}$, $\overline{\tilde{Q}_{j_0+2}Q_{j_0+1}}$ (oprócz końców) oraz wewnątrz trójkątów o wierzchołkach $\tilde{Q}_{j_0+2}Q_{j_0+1}\tilde{Q}_{j_0+1}$ oraz $Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}\tilde{Q}_{j_0}$ nie ma punktów o współrzędnych całkowitych. Oznacza to, że punkt P_{j_0} musi leżeć powyżej odcinków $\overline{Q_{j_0}\tilde{Q}_{j_0-1}}$, $\overline{\tilde{Q}_{j_0+2}Q_{j_0+1}}$. Z założenia mamy, że $P_{j_0} \in (J_0)_{j_0}$, zatem P_{j_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} .

(ii) Gdy co najmniej jeden z punktów \tilde{Q}_{j_0+2} , \tilde{Q}_{j_0-1} należy do zbioru $(J_0)_{j_0}$, postępujemy podobnie jak w przypadku a).

Ad c) Postępujemy podobnie jak w przypadku a).

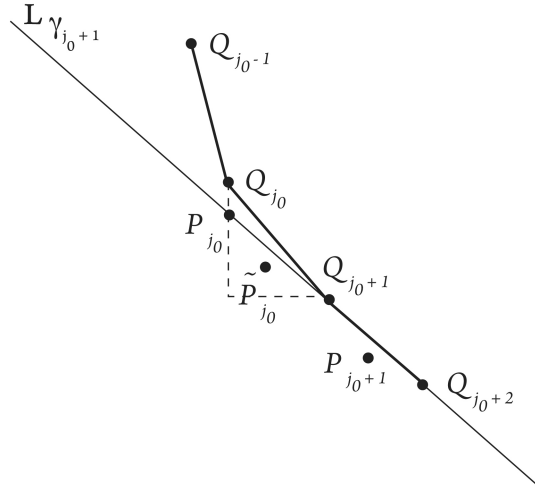
We wszystkich przypadkach otrzymaliśmy, że

$$\lambda'(f_0) \leq \lambda'(f_0)_{j_0} \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) < \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) + 1.$$

II. P_{j_0} leży na prostej $x = x_{j_0}$. Oznacza to, że $\text{NWD}(x_{j_0+1} - x_{j_0}, y_{j_0} - y_{j_0+1}) = x_{j_0+1} - x_{j_0}$. Zatem $c := \frac{y_{j_0} - y_{j_0+1}}{x_{j_0+1} - x_{j_0}}$ jest liczbą naturalną. Zauważmy, że wśród $(f_0)_n$, $n \in \{1, \dots, j_0 - 1\}$ nie ma osobliwości niegładkich (bo gdyby tak było, to dla pewnego $n \in \{1, \dots, j_0 - 1\}$, $h_n < h_{j_0}$ co byłoby sprzeczne z określeniem h_{j_0}). Zatem $(f_0)_n$, $n \in \{1, \dots, j_0 - 1\}$ są gładkie, co więcej $x_{n+1} - x_n = 1$, dla każdego $n \in \{1, \dots, j_0 - 1\}$. Niech $\tilde{P}_{j_0} = (x_{j_0} + 1, y_{j_0} - c - 1)$. Zauważmy, że $\tilde{P}_{j_0} \in (J_0)_{j_0}$ oraz $d(P_{j_0}, \gamma_{j_0}) = d(\tilde{P}_{j_0}, \gamma_{j_0})$. Ponieważ $\mathbb{N} \ni \frac{y_{j_0} - 1 - (y_{j_0} - c - 1)}{x_{j_0} + 1 - x_{j_0}} < \frac{y_{j_0} - (y_{j_0} - c - 1)}{x_{j_0} + 1 - x_{j_0}} \leq \frac{y_{j_0-1} - y_{j_0}}{1}$, więc \tilde{P}_{j_0} leży powyżej prostej $L_{\gamma_{j_0-1}}$ lub na tej prostej. Zauważmy również, że $\lambda'(f_s^{\tilde{P}_{j_0}}) = \lambda((f_0)_{j_0}) + 1$. Rozważmy przypadki:

1^0 $(f_0)_{j_0+1}$ jest osobliwością niegładką. Z dowodu poprzedniego twierdzenia (patrz przypadek **II**) mamy, że \tilde{P}_{j_0} leży powyżej prostej $L_{\gamma_{j_0+1}}$. Zatem

$$\lambda'(f_0) \leq \lambda'(f_s^{\tilde{P}_{j_0}}) = \lambda((f_0)_{j_0}) + 1 \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) + 1.$$



2^0 $(f_0)_{j_0+1}$ jest gładki. Łatwo widać, że \tilde{P}_{j_0} leży na prostej $L_{\gamma_{j_0+1}}$ lub powyżej niej. Oznacza to, że \tilde{P}_{j_0} zmienia diagram Newtona osobliwości f_0 tylko na odcinku γ_{j_0} . Zatem

$$\lambda'(f_0) \leq \lambda'(f_s^{\tilde{P}_{j_0}}) = \lambda((f_0)_{j_0}) + 1 \leq \max_{i=1, \dots, k} \lambda'((f_0)_i) + 1.$$

III. P_{j_0} leży na prostej $y = y_{j_0+1}$. Ten przypadek rozważamy podobnie do przypadku **II**. ■

Poniższe przykłady pokazują, że oszacowań w powyższych nierównościach nie można poprawić.

Przykład 2

1. Dla $f_0(x, y) = (x + y^3)(x^4 + y^4)(x^2 + y)$ mamy $\lambda'(x^4 + y^4) = 3$, $\lambda'(x^2 + y) = 1$, $\lambda'(x + y^3) = 1$ oraz $\lambda'(f_0) = 4$. Realizuje to deformacja $f_s(x, y) = (x + y^3)(x^4 + y^4)(x^2 + y) + sx^3y^2$. Stąd $\min_{i=1,2} \lambda'(f_i) < \lambda'(f_0) = \max_{i=1,2} \lambda'(f_i) + 1$.

2. Dla $f_0(x, y) = (x^3 - y^2)(x^5 + y)$ mamy $\lambda'(x^3 - y^2) = 1$, $\lambda'(x^5 + y) = 1$ oraz $\lambda'(f_0) = 1$. Realizuje to deformacja $f_s(x, y) = (x^3 - y^2)(x^5 + y) + sxy^2$. Stąd $\min_{i=1,2} \lambda'(f_i) = \lambda'(f_0) < \max_{i=1,2} \lambda'(f_i) + 1$.

3. Dla $f_0(x, y) = (x^5 + y^5)(x^8 + y^6)(x^3 + y)$ mamy $\lambda'(x^5 + y^5) = 4$, $\lambda'(x^8 + y^6) = 2$, $\lambda'(x^3 + y) = 1$ oraz $\lambda'(f_0) = 2$. Realizuje to deformacja $f_s(x, y) = (x^5 + y^5)(x^8 + y^6)(x^3 + y) + sx^6y^6$. Zatem $\min_{i=1,2,3} \lambda'(f_i) < \lambda'(f_0) < \max_{i=1,2,3} \lambda'(f_i) + 1$.

Literatura

- [1] A. Bodin, *Jump of Milnor numbers*, preprint arXiv:math. AG/0502052 v2, (2005).
- [2] A. Kouchnirenko, *Polyédres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math. 32, (1976), 1-31.
- [3] A. Płoski, *Szeregi Puiseux, diagramy Newtona i odwzorowania holomorficzne płaszczyzny \mathbb{C}^2* , Materiały z X Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, 1989.
- [4] J. Walewska, *Skoki liczby Milnora w rodzinach osobliwości I*, Materiały z XXIX Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespółonej, 2008.

JUMPS OF MILNOR NUMBERS IN FAMILIES OF SINGULARITIES II

Summary. In the article proofs of A. Bodin estimations of the jump of Milnor number of singularity deformations (announced in [1] without proofs) are given in the case when the Newton diagram of a singularity consists of more than one segment.

Łódź, 12 – 16 stycznia 2009 r.