Niezdegenerowane skoki liczby Milnora osobliwości quasijednorodnych

Tadeusz Krasiński i Justyna Walewska

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Łódzki

XL KONFERENCJA I WARSZTATY
"GEOMETRIA ANALITYCZNA I ALGEBRAICZNA"
07-11 stycznia 2019, Łódź

Niech $f_0 : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ będzie (izolowaną) osobliwością.

Zbiór wszystkich $f_0 \in \mathcal{O}_n$ mających izolowany punkt krytyczny w 0 będziemy oznaczać przez $\mathcal{O}_n^{\mathsf{iso}}$.

Dwie osobliwości f_0 i $g_0 \in \mathcal{O}_2^{\mathsf{iso}}$ są równoważne jeśli istnieją biholomorfizmy $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ i $H : (\mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}, 0)$ takie, że $f_0 = H \circ g_0 \circ \Phi$.

Klasę równoważności f_0 oznaczamy przez $[f_0]$ i nazywamy osobliwością izolowaną (krótko osobliwością).

Niech $(f_s)_{s \in S}$, $0 \in S \subset \mathbb{C}$, będzie jednoparametrową deformacją f_0 tzn.

1. $f(s, z) : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - kiełek funkcji holomorficznej w 0,
2. $f(0, z) = f_0(z)$
3. $f_s(s, 0) = 0.$

Kładziemy $f_s(z) := f(s, z)$.

Liczbą Milnora $\mu(f_0) \in \mathbb{N}$ osobliwości f_0 nzw.

$$\mu(f_0) = \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\, \mathcal{O}_n/(\nabla f_0)$$

$\mathcal{O}_n$ - pierścień funkcji holomorficznych w 0,
(∇f_0) - ideał $\mathcal{O}_n$.

Przypomnijmy, że

1. $\mu(f_s) = \mathsf{const}$ dla dostatecznie małych $s \neq 0$,
2. $\mu(f_s) \leqslant \mu(f_0)$.

Niech (f_s) będzie deformacją osobliwości f_0. Liczbę

$$\mu(f_0) - \mu(f_s) \geqslant 0, \quad s \neq 0,$$

nazywamy skokiem liczby Milnora deformacji $(f_s)_{s \in S}$ i oznaczamy $\lambda((f_s))$.

Skok $\lambda(f_0)$ osobliwości f_0 jest minimalną niezerową różnicą po wszystkich możliwych deformacjach osobliwości f_0, tzn.

$$\lambda(f_0) := \min_{(f_s) \in \mathcal{D}_0(f_0)} \lambda((f_s)),$$

gdzie przez $\mathcal{D}_0(f_0)$ oznaczamy wszystkie deformacje (f_s) osobliwości f_0, dla których $\lambda((f_s)) \neq 0$.

Niech

$$f_0(z) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0^n} a_i z^i$$

będzie osobliwością. Niech

$$\mathsf{supp}(f_0) = \{i \in \mathbb{N}_0^n : a_i \neq 0\}$$

będzie nośnikiem f_0. Wielościanem Newtona $\Gamma_+(f_0)$ nazywamy otoczkę wypukłą zbioru

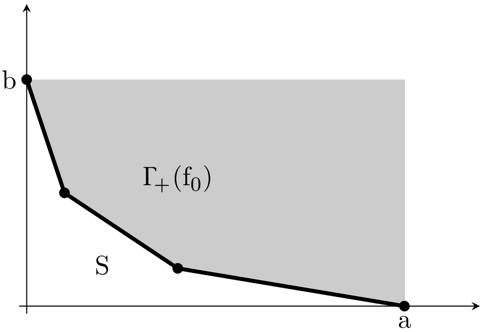
$$\bigcup_{i \in \mathsf{supp}(f_0)} (i + \mathbb{R}_+^n).$$

Skończony zbiór ścianek (wszystkich wymiarów) brzegu $\Gamma_+(f_0)$ tworzy brzeg wielościanu Newtona osobliwości f_0 i jest oznaczany $\Gamma(f_0)$.

Osobliwość f_0 nazywamy dogodną jeśli $\Gamma_+(f_0)$ przecina wszystkie osie układu współrzędnych w $\mathbb{R}^n$.

Dla każdej ścianki $S \in \Gamma(f_0)$ definiujemy wagowo jednorodny wielomian

$$(f_0)_S(z) = \sum_{i \in S} a_i z^i.$$



Rysunek: Diagram Newtona osobliwości dogodnej f_0.

Powiemy, że osobliwość f_0 jest niezdegenerowana na $S \in \Gamma(f_0)$ jeśli układ równań

$$\frac{\partial (f_0)_S}{\partial z_i}(z) = 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

nie ma rozwiązań w $(\mathbb{C}^*)^n$.

Osobliwość f_0 jest niezdegenerowana (w sensie Kouchnirenki) gdy f_0 jest niezdegenerowana na każdej ściance $\Gamma(f_0)$.

- f_0 jest dogodna

$$\nu(f_0) = 2S - a - b + 1$$

- f_0 niedogodna

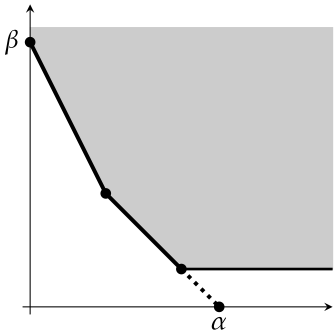
$$\nu(f_0) = \nu(f_0^{\mathsf{con}})$$

  gdzie $f_0^{\mathsf{con}} := f_0 + x^m + y^n$, m i n są dostatecznie dużymi liczbami naturalnymi.

Oczywiście $\nu(f_0^{\mathsf{con}})$ nie zależy od m, n.

Lemat

Jeśli $f_0 \in \mathcal{O}_2^{\mathsf{iso}}$, $\Gamma(f_0) \neq \emptyset$ i α, β są maksymalnymi współrzędnymi przecięcia osi Ox i Oy z odcinkami $\Gamma(f_0)$, wtedy $\nu(f_0) = \nu(f_0 + x^m + y^n)$ dla wszystkich $m \geqslant \alpha$, $n \geqslant \beta$ takich, że $(m, 0)$, $(0, n) \notin \mathsf{supp}(f_0)$.



Uwaga

Jeśli $f_0 \in \mathcal{O}_2^{\mathsf{iso}}$ oraz $\Gamma(f_0) = \emptyset$, to $f_0(x,y) = xyu(x,y)$, $u(0,0) \neq 0$.

Z powyższego Lematu otrzymujemy, że można "dodawać" i "odejmować" jednomiany x^m, $m \geqslant \alpha$ lub y^n, $n \geqslant \beta$ osobliwości f_0 bez zmiany jej liczby Newtona

W rozważaniach korzystamy z Twierdzenia Kouchnirenki w mocniejszej wersji podanej np. w pracy P. Cassou-Noguès i A. Płoskiego w 2011 roku

Twierdzenie 1

Niech $f_0 \in \mathcal{O}_2^{\mathsf{iso}}$. Wtedy

1. $\mu(f_0) \geqslant \nu(f_0)$,
2. f_0 jest niezdegenerowana wtedy i tylko wtedy, gdy $\mu(f_0) = \nu(f_0)$.

Uwaga

Implikacja odwrotna w punkcie (2) nie jest prawdziwa dla $n \geqslant 3$.

Niech f_0 będzie osobliwością. Deformację (f_s) osobliwości f_0 nazywamy niezdegenerowaną gdy f_s jest niezdegenerowana dla każdego $s \neq 0$. Zbiór wszystkich niezdegenerowanych deformacji osobliwości f_0 oznaczamy $\mathcal{D}^{\mathsf{nd}}(f_0)$.

Niezdegenerowany skok $\lambda^{\mathsf{nd}}(f_0)$ osobliwości f_0 jest minimalnym niezerowym skokiem po wszystkich niezdegenerowanych deformacjach osobliwości f_0, tzn.

$$\lambda^{\mathrm{nd}}(f_0) := \min_{(f_s)\in\mathcal{D}_0^{\mathrm{nd}}(f_0)} \lambda((f_s)),$$

gdzie przez $\mathcal{D}_0^{\mathrm{nd}}(f_0)$ oznaczamy wszystkie niezdegenerowane deformacje (f_s) osobliwości f_0, dla których $\lambda((f_s)) \neq 0$.

Definiujemy

$$\lambda^{\mathsf{nd}}([\mathrm{f}_0]) := \min_{\mathrm{g}_0 \in [\mathrm{f}_0]} \lambda^{\mathsf{nd}}(\mathrm{g}_0)$$

skok osobliwości $[\mathrm{f}_0]$ generowanej przez f_0.

1. Dla każdej osobliwości f_0 prawdziwa jest nierówność

$$\lambda([f_0]) \leqslant \lambda^{nd}([f_0]).$$

2. Jeśli f_0 jest zdegenerowana, to

$$\lambda^{\mathsf{nd}}(f_0) = \mu(f_0) - \mu(f_0^{\mathsf{nd}}), \qquad \text{gdy } \mu(f_0) - \mu(f_0^{\mathsf{nd}}) > 0$$

Niech $f_0 \in \mathcal{O}_2^{\mathsf{iso}}$ będzie guasijednorodną funkcją z wagami (w_x, w_y) i stopniem ważonym D w ustalonym układzie współrzędnych (x, y). Wtedy f_0 jest niezdegenerowany i po prostej zamianie współrzednych $x \mapsto \alpha x$, $y \mapsto \beta y$ i możliwej permutacji zmiennych $x \mapsto y$, $y \mapsto x$ (żadna z tych zmian nie wpływa na liczbę Newtona czy liczbę Milnora) możemy założyć, że f_0 ma postać

$$f_0(x, y) = x^k y^l (x^p + \ldots + \gamma_{ij} x^i y^j + \ldots + y^q),\ k, l \in \{0, 1\},\ p \leqslant q, \\ k + l + p \geqslant 2,$$

gdzie dla każdego niezerowego czynnika $\gamma_{ij} x^i y^j$, $\gamma_{ij} \neq 0$, spełnione jest $(i + k)w_x + (j + l)w_y = D$.

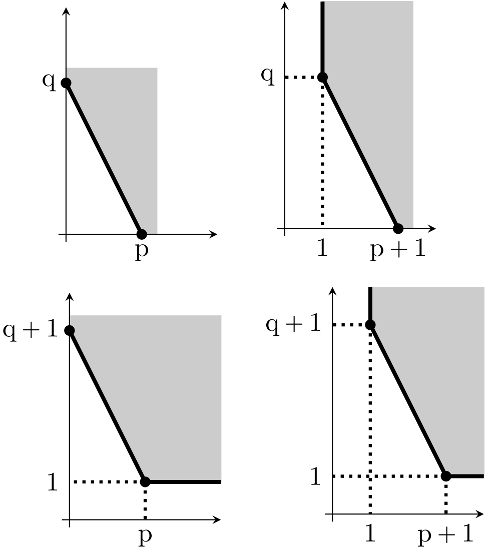
Główny wynik to wzór na niezdegenerowany skok liczby Milnora $\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0])$ osobliwości $[f_0]$ generowanej przez quasijednorodne f_0 Oddzielnie rozpatrujemy przypadek, gdy $\operatorname{ord} f_0 = 2$.

Własność

Niech $f_0 \in \mathcal{O}_2^{\mathsf{iso}}$ będzie quasijednorodną funkcją taką, że $\operatorname{ord}(f_0) = 2$. Wtedy $\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0]) = 1$. W konsekwencji $\lambda([f_0]) = 1$.

Możemy teraz założyć, że $\operatorname{ord} f_0 \geqslant 3$. Wtedy f_0 przyjmuje jedną z następujących postaci:

$$
\text{(A)}\quad
\begin{array}{ll}
1. & f_0(x,y) = x^p + \ldots + \gamma_{ij}x^iy^j + \ldots + y^q, \quad 3 \leqslant p \leqslant q, \\
2. & f_0(x,y) = x(x^p + \ldots + \gamma_{ij}x^iy^j + \ldots + y^q), \quad 2 \leqslant p \leqslant q, \\
3. & f_0(x,y) = y(x^p + \ldots + \gamma_{ij}x^iy^j + \ldots + y^q), \quad 2 \leqslant p \leqslant q, \\
4. & f_0(x,y) = xy(x^p + \ldots + \gamma_{ij}x^iy^j + \ldots + y^q), \quad 1 \leqslant p \leqslant q.
\end{array}
$$



Rysunek: Diagramy Newtona f_0 typów I, II, III, IV.

Co więcej

$$\mu(\mathrm{f}_0) = \begin{cases} (\mathrm{p}-1)(\mathrm{q}-1) & \text{w przypadku I} \\ \mathrm{p}(\mathrm{q}-1)+\mathrm{q} & \text{w przypadku II} \\ \mathrm{q}(\mathrm{p}-1)+\mathrm{p} & \text{w przypadku III} \\ (\mathrm{p}+1)(\mathrm{q}+1) & \text{w przypadku IV} \end{cases}.$$

W każdym przypadku I, II, III, IV brzeg diagramu Newtona składa się z jednego odcinka. Korzystając z pracy A. Bodina z 2007 roku możemy podać wzory na niezdegenerowany skok (w ustalonym układzie współrzędnych (x, y)).

Jeśli $d = GCD(p, q) \geqslant 1$, to dla poszczególnych postaci I, II, III, IV f_0 mamy

(B)

1. $\lambda^{\mathsf{nd}}_{(x,y)}(f_0) = \begin{cases} d & \text{gdy} \quad d < p \\ d-1 & \text{gdy} \quad d = p, \end{cases}$
2. $\lambda^{\mathsf{nd}}_{(x,y)}(f_0) = \begin{cases} d & \text{gdy} \quad p < q \\ d-1 & \text{gdy} \quad p = q, \end{cases}$
3. $\lambda^{\mathsf{nd}}_{(x,y)}(f_0) = \begin{cases} d & \text{gdy} \quad d < p \\ d-1 & \text{gdy} \quad d = p, \end{cases}$
4. $\lambda^{\mathsf{nd}}_{(x,y)}(f_0) = d.$

W głównym twierdzeniu podajemy wzory na niezdegenerowany skok liczby Milnora dla osobliwości $[f_0]$ generowanej przez quasijednorodne f_0.

Twierdzenie 2

Niech $f_0 : (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ będzie quasijednorodną osobliwością. Jeśli $\mathsf{ord}(f_0) = 2$, to $\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0]) = 1$. Jeśli $\mathsf{ord}(f_0) \geqslant 3$ to dla postaci I, II, III, IV f_0 podanych (A) mamy:

(C)

1. $$\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0]) = \begin{cases} d & \text{gdy} \quad d < p \\ d-1 & \text{gdy} \quad d = p < q \\ d-2 & \text{gdy} \quad d = p = q \end{cases}$$
2. $$\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0]) = \begin{cases} d & \text{gdy} \quad p < q \\ d-1 & \text{gdy} \quad p = q \end{cases}$$
3. $$\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0]) = \begin{cases} d & \text{gdy} \quad d < p \\ d-1 & \text{gdy} \quad d = p, \end{cases}$$
4. $\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0]) = d.$

Uwaga

Wzory (C) są identyczne z wzorami (B) z wyjątkiem przypadku I. Zatem niezdegenerowany skok $\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0])$ quasijednorodnej osobliwości $[f_0]$ obliczona w wyjściowym układzie współrzędnych (w którym f_0 jest quasijednorodne) jest "najlepszy" z wyjątkiem przypadku, gdy f_0 jest jednorodny i dogodny.

W tym przypadku, aby uzyskać "lepszy" (czyli mniejszy) skok, musimy zmienić układ współrzędnych

Przykład 1

Mamy $\lambda^{\mathsf{nd}}(x^3+y^3)=2$ oraz $\lambda^{\mathsf{nd}}(x(x^2+y^2))=1$, chociaż funkcje x^3+y^3 oraz $x(x^2+y^2)$ są równoważne.

Przykład 2

Dla $f_0(x,y)=xy(x^3+y^3)$ mamy $\lambda^{\mathsf{nd}}_{(x,y)}(f_0)=\lambda^{\mathsf{nd}}([f_0])=3$.