**MATERIAŁY XXII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2001 **Łódź** **str. 37**

TEORIA PRZECIĘĆ W ZESPOLONEJ GEOMETRII ANALITYCZNEJ I JEJ ZASTOSOWANIA

Część I

Piotr Tworzewski (Kraków)

1. Wstęp

1A. Uwagi wstępne. Praca ta jest pierwszą w planowanej serii publikacji dotyczących teorii przecięć w zespolonej geometrii analitycznej i jej zastosowań. Głównym celem tej serii jest przedstawienie pełnego obrazu teorii, co powoduje konieczność koncentracji uwagi na najtrudniejszych i mało zbadanych przecięciach niewłaściwych. Prace badawcze w tym zakresie biegną aktualnie w wielu kierunkach powodujące ciągłą zmianę poglądów i technik. Można przewidywać, że w ciągu najbliższych dwóch lat wyjaśni się większość problemów o charakterze podstawowym i teoria zacznie sprawnie działać podobnie jak opracowana w pracach [D] i [W] teoria przecięć właściwych. Równolegle do budowy samej teorii powstają prace stanowiące jej zastosowania w różnych gałęziach geometrii analitycznej i algebraicznej. Pozwalają one na kontrolę skuteczności teorii oraz pokrewnych metod opartych na uogólnieniach algorytmu Stückrada-Vogela.

Prezentowana, pierwsza część cyklu, poza obszernym wstępem i literaturą przedstawia zestaw pojęć, wybranych pod kątem późniejszych zastosowań przy kon-

Praca wykonana w ramach Grantu KBN 2 P03A 001 15.

strukcji teorii przecięć. Z naturalnych względów zakładana jest tutaj znajomość podstawowych pojęć analizy i geometrii analitycznej zespolonej. Pełny zestaw niezbędnych wiadomości z tego zakresu znajdujemy na przykład w książce [Ł].

1B. Teoria przecięć. Teoria, o której będziemy mówić, zajmuje się badaniem przecięć układów podzbiorów analitycznych rozmaitości zespolonych, co zazwyczaj przetłumaczyć można na badanie rozwiązań układów równań analitycznych. Już w prostych sytuacjach znajdujemy ciekawe elementy. Badając przykładowo przecięcie zbiorów:

$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = x^2(x - 1)\}$,

$Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y = 0\}$,

otrzymujemy $X \cap Y = \{(0, 0), (1, 0)\}$. Jednak przy dokładniejszej analizie widzimy, że przecięcie w każdym z punktów ma nieco inny charakter (krotność). Podkreślając tę różnicę piszemy $X \cdot Y = 2 \cdot \{(0, 0)\} + \{(1, 0)\}$.

Jest to teoria bardzo młoda gdyż za pierwsze systematyczne jej ujęcie uznaje się pracę [D] Richarda N. Drapera z 1969 roku. Badania prowadzone w jej zakresie odwołują się często do wzorców z zakresu teorii przecięć budowanej od ponad trzech wieków w ramach geometrii algebraicznej (w powyższym przykładzie równania są wielomianowe). Zapisane początki tej algebraicznej teorii znajdujemy w pracy Izaaka Newtona [N] z 1680 roku oraz serii publikacji Étienne Bézouta rozpoczętej pracą [B] w 1764 roku. Dotyczą one opisu rozwiązań układu równań algebraicznych dwóch lub większej ilości zmiennych – co jest aktualnie tłumaczone na badanie przecięć układu zbiorów algebraicznych. Burzliwy rozwój badań w ostatnich latach dostarcza dwóch, formalnie różnych, podejść w teoriach Fultona – MacPhersona (zob. [F]) oraz Stückrada – Vogela (zob. [StV]). Teorie te mają szereg wspólnych punktów; bardzo ścisłe relacje między nimi zbadał w ostatnich latach Leendert J. van Gastel w pracach [G_1] i [G_2].

Bardzo ważnym i ciągle aktualnym problemem teorii przecięć w zespolonej geometrii analitycznej jest podanie zadowolającej definicji iloczynu układu podzbiorów analitycznych $X_1, \ldots, X_t$ ustalonej rozmaitości zespolonej M. Użyteczna teoria wymaga ciekawszego obiektu niż zwykłe mnogościowe przecięcie $X_1 \cap \ldots \cap X_t$. Przyjmuje się, że wynik jest *cyklem analitycznym* na M czyli formalną sumą

$$A = \sum_{C \in T} \alpha_C C,$$

gdzie $\alpha_C \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dla $C \in T$, zaś T jest lokalnie skończoną rodziną parami różnych, nierozkładalnych podzbiorów analitycznych rozmaitości M. Gdy wszystkie składowe C mają ten sam ustalony wymiar k, to A nazywać będziemy k-cyklem.

Załóżmy, że zbiory analityczne $X_1, \ldots, X_t$ są nierozkładalne wymiarów odpowiednio $k_1, \ldots, k_t$, zaś M jest rozmaitością wymiaru m. Mamy $X_1 \cap \ldots \cap X_t = \bigcup_{C \in J} C$, gdzie J jest rodziną wszystkich składowych nierozkładalnych $X_1 \cap \ldots \cap X_t$. W fundamentalnej pracy [D] określony jest iloczyn $X_1 \cdot \ldots \cdot X_t$ zbiorów $X_1, \ldots, X_t$ w M, będący cyklem analitycznym na M zadanym formułą

$$X_1 \cdot \ldots \cdot X_t = \sum_{C \in I} i(X_1 \cdot \ldots \cdot X_t, C)\, C,$$

w której $I \subset J$ jest rodziną wszystkich składowych nierozkładalnych przecięcia $X_1 \cap \ldots \cap X_t$ wymiaru $k_1 + \cdots + k_t - (t-1)m$ (zwanych *składowymi właściwymi*) zaś $i(X_1 \cdot \ldots \cdot X_t, C)$ *jest krotnością przecięcia wzdłuż składowej* C. W naturalny sposób definicję tę możemy rozszerzyć (t-liniowo) na iloczyny cykli analitycznych. Należy stwierdzić, że głównym (i ogólnie znanym) mankamentem podanej definicji jest ominięcie składowych wymiarów wyższych od $k_1 + \cdots + k_t - (t-1)m$, czyli często najciekawszej części przecięcia $X_1 \cap \ldots \cap X_t$. Zbudowana przez Drapera teoria dobrze pracuje jedynie przy badaniu *przecięć właściwych*, czyli sytuacji gdy wszystkie składowe nierozkładalne są właściwe. Znacznie łatwiejsze podejście do tej teorii prezentuje praca [W], dająca również szereg wygodnych narzędzi do rozwoju całej teorii. Przecięcia właściwe badane są w pracy [TW_4], mającej dla późniejszych badań znaczenie podstawowe.

W pracach [ATW] i [T_2] rozważania wchodzą w zakres znacznie bardziej złożonych przecięć niewłaściwych, dość intensywnie badanych w geometrii algebraicznej, zaś mało popularnych w geometrii analitycznej. Powodem tej sytuacji są trudności w stosowaniu aparatu algebraicznego, a głównie brak "globalnego pierścienia" o dobrych własnościach. Praca [ATW] dotyczy przecięć izolowanych. Przy przyjętych uproszczeniach, odpowiada to ograniczeniu badań do przypadku $t = 2, X_1 \cap X_2 = \{a\}$, gdzie $a \in M$. Można przyjąć, że w pracy tej została opracowana pełna teoria krotności w tym zakresie. Teoria jest uznawana za kompletną i zgodną z ideami algebraicznymi. Wstępną kontynuację badań przecięć niewłaściwych w ogólnym przypadku znajdujemy w pracy [AM_1].

Praca [T_2] zawiera propozycję pełnej definicji iloczynu zbiorów X_1 i X_2 będącego cyklem analitycznym $X_1 \bullet X_2$ na M

$$X_1 \bullet X_2 = \sum_{C \in T} \alpha_z C.$$

W pojawiającej się tutaj rodzinie nierozkładalnych podzbiorów analitycznych T występują wszystkie składowe nierozkładalne przecięcia $X_1 \cap X_2$, czyli $J \subset T$ a ponadto (podobnie jak w geometrii algebraicznej) nigdziegęste podzbiory analityczne, opisujące głębsze związki zachodzące między X_1 i X_2. W pracy pojawia się zupełnie nowy sposób określania cyklu będącego iloczynem. Dla każdego $a \in M$ określamy (Definicja 6.1) *krotność przecięcia* $d(a) = d(a)(X_1, X_2)$ zbiorów X_1 i X_2 w punkcie a, według algorytmu (Algorytm 4.1) będącego lokalnym odpowiednikiem konstrukcji Stückrada–Vogela (zob. [G_2], [G_2], [SV], [V]). Kluczowy dla konstruowanej teorii problem jest rozwiązywany w następującym twierdzeniu ([T_2], Tw. 6.2).

Twierdzenie. *Funkcja* $d : M \ni a \longrightarrow d(a) \in \mathbb{Z}$ *jest analitycznie konstruowalna.*

Jednoznaczny rozkład funkcji d prowadzi do określenia *iloczynu* $X_1 \bullet X_2$ (Definicja 6.3). Naturalne kroki pozwalają na rozszerzenie tej definicji na przypadek dwóch (dwuliniowo) lub układu cykli analitycznych. Główne trudności pracy [T_2] koncentrują się przy dowodach układu faktów prowadzących do kluczowych rozważań dotyczących aproksymacji i ciągłości przecięć przy przybliżaniu cykli analitycznych. Potrzebna teoria rozwijana jest w oparciu o [TW_4] oraz [W]. Szczególnie cenne są tutaj fakty dające informacje o ciągłości przecięć niewłaściwych.

Teoria zbudowana w pracy [T_2] (na bazie przygotowań prowadzonych w [TW_4] i [ATW]) daje, poza centralną konstrukcją iloczynu $X_1 \bullet X_2$, cały szereg lokalnych niezmienników biholomorfizmów opisujących wzajemne usytuowanie zbiorów przy ustalonym punkcie. Teorię tę bez problemu możemy rozszerzyć do przypadku układu zbiorów nierozkładalnych czy cykli analitycznych.

W ostatnich kilku latach podjęto szereg badań dających inne spojrzenie na konstrukcję krotności. W [AM_2] zaproponowana została ogólniejsza konstrukcja algebraiczna oraz postawiono pytanie o jej zgodność z konstrukcją podstawową w przypadku przecinania zbiorów analitycznych. W serii odpowiedzi na ten problem ([AR], [N_1], [N_2]) uzyskano nie tylko potwierdzenie zgodności ale również odpowiedzi na szereg istotnych pytań znacznie lepsze od wstępnych z pracy [T_2]. Wiadomo z nich, że funkcja krotności jest nie tylko konstruowalna ale nawet półciągła z góry w topoogii Zariskiego.

Aktualnie prace w zakresie teorii przecięć w zespolonej geometrii analitycznej idą w kierunku uzyskania charakteryzacji zbliżonych do otrzymanych w przypadku przecięcia właściwego. W [R_2] a następnie [N_1], [N_2], [AR] pokazana została niezależność wyniku przecięcia od zanurzenia, co pozwala w szczególności na przeniesienie całej teorii na zredukowane przestrzenie analityczne.

Różnorodne możliwości zastosowań teorii przecięć możemy zilustrować badaniami prowadzonymi ostatnio w następujących kierunkach:
- teoria przecięć a separacja regularna,
- efektywne Twierdzenie Hilberta o zerach,
- geometria krzywych analitycznych w przestrzeni $\mathbb{C}^m$,

omówionych w kolejnych częściach wstępu. Można ponadto liczyć na ciekawe zastosowania w zakresie rozwiązywania osobliwości zbiorów analitycznych.

1C. Teoria przecięć a separacja regularna. Dla ułatwienia prezentacji wyników przypuśćmy teraz, że rozważana rozmaitość M jest podzbiorem otwartym unormowanej, zespolonej przestrzeni wektorowej i oznaczmy przez $\varrho(\cdot, Z)$ funkcję odległości od zbioru $Z \subset M$. Ustalając $a \in X_1 \cap X_2$ i $p \geqslant 1$ mówimy, że X_1 i X_2 są *p-oddzielone w punkcie a* gdy

$$\varrho(z, X_1) + \varrho(z, X_2) \geqslant c\varrho(z, X_1 \cap X_2)^p,$$

dla z z dostatecznie małego otoczenia punktu a, przy pewnej stałej $c > 0$.

Każda para zbiorów analitycznych spełnia ten (w powyższy sposób zapisany) warunek separacji regularnej ze stosownie dużym wykładnikiem p ([Ł], IV.7). Znalezienie jednak przynajmniej jednego, konkretnego p jest zwykle dość trudnym zadaniem, będącym przedmiotem serii badań prowadzonych tak w konkretnych przykładach jak i w szczególnych sytuacjach teoretycznych (zob. [ChK_1], [ChKT],

[C_1], [C_2], [CKT], [CT], [Ko_1], [Ko_2], [Ł], [P], [T_1]).

Prace [C_1], [C_2], [CT], [T_1] poświęcone są ustaleniu związków między wykładnikiem p a własnościami iloczynu zbiorów X i Y. Najłatwiej zapisać jest przy pomocy krotności przecięcia $d(a)$ zbiorów X i Y w ustalonym punkcie wprowadzonej w pracy [T_2]. W nieco uproszczonej formie, główne wyniki czterech wyżej omawianych prac przedstawia następujące

Twierdzenie. *Jeśli $a \in X_1 \cap X_2$, to zbiory X_1 i X_2 są $d(a)$-oddzielone w punkcie a.*

Jest to w zasadzie wniosek z głównych wyników prac [C_1], [C_2]. W pracy [T_1] wynik został uzyskany dla przecięć izolowanych (również niewłaściwych) zaś w [CT] dla dowolnych przecięć właściwych.

W kolejnych pracach z tego nurtu zastosowań wykazywane są różnego typu oszacowania wzmacniające wyniki z prac [ChK_1], [JKS], [Ko_1]. Znajdujemy je we wstępnej formie w pracy [C_2] oraz w pracach [ChK_2], [CKT], [Ko_2] i [S_2]

1D. Efektywne Twierdzenie Hilberta o zerach. Ten nurt zastosowań realizowany był już w pracach [JKS], [Ko_1] i [Ko_2]. W pracy [PT] pojawiły się istotne sygnały, że wykładnik Noethera pozostaje w związkach z krotnościami przecięć występujących przy nim obiektów geometrycznych. Dotychczas uzyskane wyniki mieszczą się w zakresie teorii przecięć właściwych. Jednak wnioski otrzymywane w szczególnych sytuacjach pokazują, że podejście pozwala uzyskiwać bardzo ciekawe wyniki również dla przecięć niewłaściwych.

1E. Geometria krzywych analitycznych w $\mathbb{C}^m$. Temat ten dotyczy uzyskiwania efektywnych związków między różnymi parametrami opisującymi krzywe w przestrzeni wielowymiarowej. Podjęły go prace [ChK_1] i [ChKT] w zakresie efektywnych formuł na wykładnik Łojasiewicza i krotność przecięcia krzywych, wyliczaną na podstawie ich parametryzacji. Przejście z dawno znanego, dość łatwego przypadku dwuwymiarowego do wyższych wymiarów okazało się niespodziewanie trudne. Trwają prace nad wyjaśnieniem sytuacji geometrycznej w oparciu o postać relatywnych stożków stycznych. Spotykamy je w pracach [Cie], [K_1] i [K_3].

1. Podstawowe pojęcia

1A. Stopień zbioru analitycznego w punkcie. Na wstępie określimy tak zwany stopień w punkcie dla afinicznych zbiorów analitycznych. Wprowadzenie tu struktury unitarnej w rozpatrywanej przestrzeni ma jedynie znaczenie techniczne, ułatwiające zapis.

Niech więc M będzie m-wymiarową, zespoloną przestrzenią unitarną, Z podzbiorem analitycznym zbioru otwartego Ω stałego wymiaru k, a ustalonym punktem Z, zaś ξ podprzestrzenią liniową M, wymiaru $(m-k)$ taką, że a jest punktem izolowanym $Z \cap (a+\xi)$. Mamy $M = \xi^{\perp} + \xi$. Wówczas istnieje stała $d \in \mathbb{N}$ oraz dowolnie małe otoczenie a, postaci $D = U + W$, gdzie $U \subset \xi^{\perp}, W \subset \xi$ są kulami takie, że $\pi_{\xi}|Z : D \cap Z \ni x + y \to x \in U$ jest d-krotnym nakryciem rozgałęzionym.

Definicja 1.1. *Wyżej określoną liczbę d będziemy oznaczać $\mu_a(\pi_{\xi}|Z)$ i nazywać krotnością rzutowania $\pi_{\xi}|Z$ w punkcie a.*

Liczbę tę wykorzystamy do określenia stopnia zbioru analitycznego w punkcie. Następne twierdzenie jest bezpośrednią konsekwencją ([Chi], 2.11.1-2) w rozpatrywanej sytuacji w której przez $C(Z,a)$ oznaczamy stożek styczny do zbioru Z w punkcie a.

Twierdzenie 1.2. *Istnieje liczba $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ taka, że:*

(1) *$\mu_a(\pi_{\xi}|Z) = d$, dla $(m-k)$ wymiarowych ξ takich, że $\xi \cap C(Z,a) = \{0\}$,*
(2) *$\mu_a(\pi_{\xi}|Z) > d$, dla $(m-k)$ wymiarowych ξ takich, że $\xi \cap C(Z,a) \neq \{0\}$ ale a jest punktem izolowanym $(\xi + a) \cap Z$.*

Warto tutaj zauważyć, że warunek $\xi \cap C(Z,a) = \{0\}$ w pierwszej części twierdzenia łatwo pociąga informację, że a jest punktem izolowanym $(\xi + a) \cap Z$, wymaganą do określenia krotności projekcji. Możemy postawić następującą definicję

Definicja 1.3. *Liczbę d określoną dla zbioru Z i punktu $a \in Z$ nazywamy stopniem Z w tym punkcie. Piszemy wtedy $\nu(Z,a) = d$.*

Uzyskana liczba, opisująca strukturę zbioru Z przy punkcie a posiada dwie ważne własności wymagane w geometrii analitycznej, jest pojęciem lokalnym i niezmiennikiem biholomorfizmów (zob. [Chi] 2.11.1).

Twierdzenie 1.4. *Niech $\Omega \subset \Omega_1$ będą otwartymi podzbiorami przestrzeni unitarnej M_1 zaś Ω_2 otwarty w przestrzeni unitarnej M_2. Jeśli $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ jest biholomorfizmemi, to to dla podzbioru analitycznego Z stałego wymiaru k zbioru Ω oraz dowolnego punktu $a \in \Omega_1$ mamy równość $\nu(Z,a) = \nu(\phi(Z \cap \Omega_1), \phi(a))$.*

Przechodząc od przypadku afinicznego do ogólnej sytuacji ustalmy M, m-wymiarową rozmaitość zespoloną, Z podzbiór lokalnie analityczny M stałego wymiaru k oraz $a \in Z$. Zakładać będziemy, że wszystkie rozpatrywane tu rozmaitości spełniają drugi aksjomat przeliczalności. W klasyczny sposób Twierdzenie 1.4 da nam możliwość przeniesienia pojęcia stopnia zbioru w jego punkcie na ten przypadek.

Definicja 1.5. *Jeśli (U, φ) jest mapą na M w otoczeniu punktu a taką, że $Z \cap U$ jest analityczny w U, to stopniem Z w punkcie a nazywamy liczbę $\nu(\varphi(Z \cap U), \varphi(a))$ nie zależącą od wyboru mapy. Oznaczać ją będziemy $\nu(Z,a)$.*

Łatwo zauważyć, że jest to rozszerzenie definicji z przypadku afinicznego. Gdy zbiór Z jest analityczny w podzbiorze otwartym Ω rozmaitości M, przyjmujemy dodatkowo $\nu(Z,a) = 0$ dla $a \in \Omega \setminus Z$ otrzymując naturalne rozszerzenie funkcji krotności do zbioru Ω.

1B. Cykle analityczne. Niech będzie dana M, m-wymiarową rozmaitość zespolona. Wprowadzimy tutaj podstawowy zestaw pojęć opisujących cykle analityczne zwane także często łańcuchami holomorficznymi.

Definicja 1.6. *Cyklem analitycznym na rozmaitości M nazywamy sumę formalną*

$$A = \sum_{C \in T} \alpha_C C,$$

gdzie T jest lokalnie skończoną rodziną, parami różnych, nierozkładalnych podzbiorów analitycznych rozmaitości M, zaś $\alpha_C \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dla $C \in T$.

Zbiór analityczny $|A| = \bigcup_{C \in T} C$ nazywamy *nośnikiem* cyklu. Jeśli wszystkie składowe C cyklu A mają ten sam wymiar k, to A nazywamy $k-cyklem$. Mówimy, że cykl A jest *dodatni*, jeśli $\alpha_C > 0$ dla każdego $C \in T$. Przez $\mathcal{G}(M)$ oznaczać będziemy rodzinę cykli analitycznych na M z naturalną strukturą grupy przemiennej. Dla $k \in \mathbb{N}$, podgrupę k-cykli w $\mathcal{G}(M)$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{G}^k(M)$.

W naturalny sposób rozszerzyć możemy pojęcie stopnia zbioru analitycznego na cykl analityczny. Jeżeli $A = \sum_{C \in T} \alpha_C C$ jest cyklem analitycznym na M, to dla $a \in M$ suma

$$\nu(A, a) = \sum_{C \in T} \alpha_C \nu(C, a)$$

jest poprawnie określona i nazywamy ja *stopniem cyklu* A w punkcie a.

Niech teraz A będzie cyklem analitycznym na m-wymiarowej rozmaitości M. Wtedy istnieje jednoznaczny rozkład $A = A_{(m)} + A_{(m-1)} + ... + A_{(0)}$, gdzie $A_{(j)}$ jest j-cyklem, dla $j = 0, ..., m$. Określimy teraz *uogólniony stopień* cyklu A w punkcie a za pomocą następującej równości:

$$\tilde{\nu}(A, a) = (\nu(A_{(m)}, a), ..., \nu(A_{(0)}, a)) \in \mathbb{Z}^{m+1}.$$

Przez $\nu(A)$ i $\tilde{\nu}(A)$ będziemy oznaczać funkcje:

$$\nu(A) : M \ni a \to \nu(A, a) \in \mathbb{Z},$$
$$\tilde{\nu}(A) : M \ni a \to \tilde{\nu}(A, a) \in \mathbb{Z}^{m+1}.$$

Zauważmy, że $\nu(A, a) = \widehat{\tilde{\nu}(A, a)}$, gdzie $\widehat{\nu}$ oznacza sumę współrzędnych $\nu \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

1C. Funkcje półciągłe z góry. Będziemy tutaj mówić o półciągłości bardzo ogólnie, rozrzerzając to pojęcie do przypadku odwzorowań określonych na przestrzeni topologicznej Y, prowadzących w zbiór liniowo uporządkowany R.

Definicja 1.7. *Odwzorowanie $f : Y \to R$ nazywamy półciągłym z góry jeśli dla wszelkich $c \in R$ zbiór $f^{[c]} = \{y \in Y : f(y) \geqslant c\}$ jest domknięty w Y.*

Interesować nas będą funkcje o wartościach w $\mathbb{Z}^n$, (uporządkowanym leksykograficznie), półciągłe z góry w topologii Zariskiego na ustalonej rozmaitości zespolonej M. Oznaczmy

$$\mathcal{U}^n(M) = \{f : M \to \mathbb{Z}^n \mid f \text{ jest półciągła z góry w topologii Zariskiego}\}.$$

Lemat 1.8. *Jeśli* $f_\alpha \in \mathcal{U}^n(M)$ *dla* $\alpha \in S$, $f : M \to \mathbb{Z}^n$ *oraz* $f(x) = \min\{f_\alpha(c) : \alpha \in S\}$, *to* $f \in \mathcal{U}^n(M)$.

D o w ó d. Wystarczy zauważyć, że $f^{[c]} = \bigcap_{\alpha \in S} f_\alpha^{[c]}$ dla $c \in \mathbb{Z}^n$. □

Lemat 1.9. *Jeśli* M *jest rozmaitością spójną oraz* $f \in \mathcal{U}^n(M)$ *to* f *jest ograniczona z dołu oraz lokalnie ograniczona z góry.*

D o w ó d. Lokalna ograniczoność z góry wynika ze związku $a \in M \setminus f^{[c]}$ dla $c > f(a)$. Ograniczoność z dołu otrzymujemy gdyż w przeliczalnej sumie zbiorów analitycznych $M = \bigcup_{c \in \mathbb{Z}^n} f^{[c]}$ musi istnieć element równy całej (spójnej) rozmaitości. □

Lemat 1.10. *Jeśli* M *jest rozmaitością zespoloną oraz* $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{U}^1(M)$ *to:*

(1) $f_1 + \ldots + f_n \in \mathcal{U}^1(M)$,
(2) $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathcal{U}^n(M)$.

D o w ó d. Możemy założyć, że wyjściowe funkcje są ograniczone przez stałą K, mamy wtedy $(f_1 + \ldots + f_n)^{[c]} = \bigcup\{\bigcap_{i=1}^n f^{[c_i]} : c_1 + \ldots + c_n = c,\ c_i \leqslant K \text{ dla } i = 1, \ldots, n\}$ co ze względu na skończoność sumy daje (1). Niech $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ otrzymujemy
$(f_1, \ldots, f_n)^{[c]} =$
$((f_1)^{[c_1+1]}) \cup ((f_1)^{[c_1]} \cap (f_2)^{[c_2+1]}) \cup \ldots \cup ((f_1)^{[c_1]} \cap (f_2)^{[c_2]}) \cap \ldots \cap (f_{n-1})^{[c_{n-1}+1]}) \cup$
$((f_1)^{[c_1]} \cap (f_2)^{[c_2]}) \cap \ldots \cap (f_{n-1})^{[c_{n-1}]} \cap (f_n)^{[c_n]})$
skąd łatwo wynika (2). □

Zachodzi następujące bardzo ważne twierdzenie (zob. [Wh], str. 237, [Chi] 2.11.4)

Twierdzenie 1.11. *Jeśli* Z *jest podzbiorem analitycznym stałego wymiaru* k *rozmaitości* M, *to funkcja* $\nu(Z) : M \ni a \to \nu(Z, a) \in \mathbb{Z}$ *jest półciągła z góry w topologii Zariskiego.*

Twierdzenie 1.11, oraz proste przeliczenia oparte na Lemacie 1.10 dają następujące

Twierdzenie 1.12. *Jeśli cykl* A *jest dodatni to:* $\nu(A) \in \mathcal{U}^1(M)$ *oraz* $\tilde{\nu}(A) \in \mathcal{U}^{m+1}(M)$.

Przykład 1.13. *Półciągłość zestawienia, na ogół nie pociąga półciągłości składowych. Zauważmy, że funkcja*

$$f : \mathbb{C} \ni x \to f(x) = \begin{cases} (1,0), \textit{gdy } x = 0, \\ (0,1), \textit{gdy } x \neq 0. \end{cases}$$

jest półciągła z góry ale jej druga składowa nie jest półciągła z góry.

1D. Funkcje konstruowalne analitycznie i ich rozkłady. Ustalmy rozmaitości zespolone M i N. Rozpatrywać będziemy klasę funkcji analitycznie konstruowalnych prowadzących z M do N.

Definicja 1.14. *Funkcję $f : M \to N$ nazywać będziemy analitycznie konstruowalną na M* jeśli jej wykres jest podzbiorem analitycznie konstruowalnym $M \times N$.

Klasa zbiorów analitycznie konstruowalnych opisana jest w książce [Ł], (Rozdział IV.8). Należy podkreślić, że rozpatrywane tutaj funkcje konstruowalne analitycznie określone będą zawsze na całej rozmaitości (a nie tylko jej podzbiorze) co ma znaczące następstwa. Interesować nas będą szczególnie funkcje konstruowalne o wartościach w $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{C}^n$. Oznaczmy

$$\mathcal{K}^n(M) = \{f : M \to \mathbb{Z}^n \mid f \textit{ jest analitycznie konstruowalna}\}.$$

Lemat 1.15. *Jeśli $f : M \to \mathbb{Z}^n$, to $f \in \mathcal{K}^n(M)$ dokładnie wtedy gdy wszystkie włókna f są podzbiorami analitycznie konstruowalnymi rozmaitości M.*

D o w ó d. Mamy $f^{-1}(c)\times\{c\} = f\cap(M\times\{c\})$ więc włókna funkcji konstruowalnej są konstruowalne. Zauważmy ponadto, że $f = \bigcup_{c\in\mathbb{Z}}(f^{-1}(c) \times \{c\})$. Ponieważ suma ta jest lokalnie skończona więc konstruowalność włókien pociąga konstruowalność funkcji. To kończy dowód lematu. □

Wniosek 1.16. *Jeśli M jest rozmaitością zespoloną oraz $n \geqslant 1$ to $\mathcal{U}^n(M) \subset \mathcal{K}^n(M)$.*

Dowód. Dla dowolnego $c \in \mathbb{Z}^n$ oznaczmy przez c' element następny w $\mathbb{Z}^n$ w porządku leksykograficznym. Wtedy $f^{-1}(c) = f^{[c]} \setminus f^{[c']}$ jest zbiorem konstruowalnym jako różnica dwóch zbiorów analitycznych. □

Twierdzenie 1.17. *Niech M będzie rozmaitością oraz $f \in \mathcal{K}^n(M)$. Wtedy:*

(1) *Jeśli C jest nierozkładalnym podzbiorem analitycznym M, to istnieje $c \in \mathbb{Z}^n$ takie, że $\overline{C \cap f^{-1}(c)} = C$,*
(2) *włókna f stanowią rodzinę lokalnie skończoną na M.*

D o w ó d. Aby wykazać (1) wystarczy zauważyć, że $C = \bigcup_{c\in\mathbb{Z}^n} \overline{C \cap f^{-1}(c)}$.

Dla dowodu (2) z rodziny $\mathcal{K}^n(M)$ wybierzmy funkcję konstruowalną g, która nie spełnia rozpatrywanego warunku oraz jej nośnik (analityczny w M) $\mathrm{supp}\,(g) = \overline{\{x \in M : g(x) \neq 0\}}$ ma najmniejszy wymiar. Weźmy $\{C_j\}_{j\in J}$ rodzinę, składowych nierozkładalnych $\mathrm{supp}\,(g)$. Na podstawie (1) otrzymujemy "wartości generyczne" $\alpha_j \in \mathbb{Z}^n$ funkcji g na C_j dla $j \in J$. Określmy $h = g - p$ gdzie $p = \sum_{j\in J} \alpha_j \nu(C_j)$. Poniweważ $p \in \mathcal{K}^n(M)$ oraz lokalnie przyjmuje skończoną liczbę wartości, więc $h \in \mathcal{K}^n(M)$, $\dim(\mathrm{supp}\,(h)) < \dim(\mathrm{supp}\,(g))$ oraz rodzina włókien h nie może być lokalnie skończona. Jest to sprzeczne z wyborem funkcji g. □

Wniosek 1.18. *$\mathcal{K}^n(M)$ jest $\mathbb{Z}$ modułem.*

D o w ó d. Wynika to natychmiast z Twierdzenia 1.18 oraz Lematu 1.15. □

Twierdzenie 1.19. *Dla odwzorowania $f = (f_1, \dots, f_n) : M \to \mathbb{Z}^n$ następujące warunki są równoważne:*

(1) $f \in \mathcal{K}^n(M)$,
(2) $f_i \in \mathcal{K}^1(M)$ *dla* $i = 1, \dots, n$.

D o w ó d. Bez kłopotu zauważamy, że (2) $\Longrightarrow$ (1) gdyż przecięcie skończonej rodziny zbiorów konstruowalnych jest konstruowalne. Dla dowodu przeciwnej implikacji zauważmy, że włókno składowej jest sumą pewnej rodziny włókien f. Na podstawie twierdzenia 1.17 otrzymujemy tezę. □

Korzystając z poprzednio wprowadzonych oznaczeń możemy wprowadzić odwzorowanie:

$$\nu : \mathcal{G}(M) \ni A \to \nu(A) \in \mathcal{K}^1(M)$$

Jest ono poprawnie określone dla zbiorów C nierozkładalnych w M więc na podstawie Wniosku 1.18 również dla cykli analitycznych. Kluczową rolę będzie odgrywało następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.20. *Odwzorowanie $\nu : \mathcal{G}(M) \ni A \to \nu(A) \in \mathcal{K}^1(M)$ jest izomorfizmem $\mathbb{Z}$ modułów*

D o w ó d. Łatwo zauważyć, że ν jest monomorfizmem. Przypuśćmy więc teraz, że $\nu(\mathcal{G}(M)) \neq \mathcal{K}^1(M)$ i wybierzmy $f \in \mathcal{K}^1(M) \setminus \nu(\mathcal{G}(M))$ taką, że zbiór

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}.$$

ma najmniejszy wymiar. Niech $\{C_j\}_{j \in J}$ będzie rodziną składowych nierozkładalnych zbioru $\operatorname{supp}(f)$. Na podstawie Twierdzenia 1.17 (1) otrzymujemy "wartości generyczne" α_j funkcji f na C_j dla $j \in J$. Określmy $g = f - \sum_{j \in J} \alpha_j \nu(C_j)$. Wtedy $g \in \mathcal{K}^1(M) \setminus \nu(\mathcal{G}(M))$ oraz $\dim(\operatorname{supp}(g)) < \dim(\operatorname{supp}(f))$, co jest sprzeczne z wyborem f. □

Literatura

[AM$_1$] R. Achilles, M. Manaresi, *Multiplicities for improper intersections of analytic subsets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino 48, 4 (1990), 539–552.

[AM$_2$] R. Achilles, M. Manaresi, *Multiplicities of bigraded rings and intersection theory*, Math. Ann. 309 (1997), 573–591.

[AR] R. Achilles, S. Rams, *Intersection numbers, Segre numbers and generalized Samuel multiplicities*, (to appear).

[ATW] R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski, *On improper isolated intersection in complex analytic geometry*, Ann. Polon. Math. 51 (1990), 21–36.

[AV] R. Achilles, W. Vogel , *On Multiplicities for Improper Intersections*, J.Algebra 168 (1994), 123–142.

[B] E. Bézout, *Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnus*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut de France (1764).

[Br] W. D. Brownawell, *Bounds for the degree in Nulstellensatz*, Ann. of Math. 126 (1987), 577–592.

[ChK$_1$] J. Chądzyński, T. Krasiński, *On the Łojasiewicz exponent for analytic curves*, Banach Cent. Publ. 44 (1998), 73–80.

[ChK$_2$] J. Chądzyński, T. Krasiński, *On Kollàr's type estimations of polynomial mappings*, Univ. Iagellonicae Acta Math. 37 (1999).

[ChKT] J. Chądzyński, T. Krasiński, P. Tworzewski, *On the Intersection Multiplicity of Analytic Curves in $\mathbb{C}^m$*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 45, No. 2 (1997), 163–169.

[Chi] E. M. Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer Acad. Publishers, 1989.

[Cie] D. Ciesielska, *Relative tangent cone of analytic curves*, Ann. Polon. Math. 72.2 (1999), 191–195.

[C$_1$] E. Cygan, *Intersection Theory and Separation Exponent in Complex Analytic Geometry*, Ann. Polon. Math. 69.3 (1998), 287–299.

[C$_2$] E. Cygan, *Separacja regularna i teoria przecięć w zespolonej geometrii analitycznej*, Rozprawa doktorska IM UJ - 1997, 1–40.

[CKT] E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski, *Separation of algebraic sets and Łojasiewicz exponent of polynomial mappings*, Invent. math. 136.1 (1999), 75–87.

[CT] E. Cygan, P. Tworzewski, *Proper intersection multiplicity and regular separation of analytic sets*, Ann. Polon. Math. 59.3 (1994), 293–298.

[D] R. Draper, *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Ann. 180 (1969), 175–204.

[F] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1984.

[G$_1$] L. J. van Gastel, *Excess intersections*, Thesis, Univ. of Utrecht, The Netherlands (1989).

[G$_2$] L. J. van Gastel, *Excess intersections and correspondence principle*, Invent. Math. 103 (1991), 197–221.

[JKoS] S. Ji, J. Kollàr, B. Shiffman, *A global Łojasiewicz inequality for algebraic varieties* 329 (2) (1992), Transaction of Amer. Math. Soc., 813–818.

[Ko$_1$] J. Kollàr, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Am. Math. Soc. 1 (1988), 963–975.

[Ko$_2$] J. Kollár, *Effective Nullstellensatz for arbitrary ideals*, (preprint) (1998), 1–25.

[K$_1$] T. Krasiński, *Relative tangent cone to analytic curves*, Preprint Wydz. Mat. UŁ 1999/12.

[K_2] T. Krasiński, *The join of algebraic curves*, Preprint Wydz. Mat. UŁ 2000/09.

[K_3] T. Krasiński, *Improper intersection of analytic curves*, Preprint Wydz. Mat. UŁ 2000/13.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Introduction to Complex Analytic Geometry*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[N] I. Newton, *Geometria analytica*, 1680.

[N_1] K. J. Nowak, *Analytic Improper Intersections I. Deformation to the Normal Cone*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48.2 (2000), 121–130.

[N_2] K. J. Nowak, *Analytic Improper Intersections II. Deformation to an Algebraic Bicone and Applications*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48.2 (2000), 131–140.

[OP] L. O'Carroll, T. Pruschke, *Deformation to the Normal Cone, Rationality and the Stückrad-Vogel Cycle*, Contr. to Algebra and Geometry 40.1 (1999), 229–242.

[P] A. Płoski, *Une évaluation pour les sous–ensembles analytiques complexes*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 31 (1983), 259–262.

[PT_1] A. Płoski, P. Tworzewski, *A separation condition for polynomial mappings*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 44.3, (1996), 327–331.

[PT_2] A. Płoski, P. Tworzewski, *Effective Nullstellensatz on analytic and algebraic varieties*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 46.1, (1998), 31–38.

[R_1] S. Rams, *Convergence of holomorphic chains*, Ann. Polon. Math. 65. 3 (1997), 227-234.

[R_2] S. Rams, *On the intersection product of analytic cycles*, Ann. Polon. Math. 73.2 (2000), 135-146.

[R_3] S. Rams, *On Intersections with Hypersurfaces and Normal Pseudo-flatness*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48.3 (2000), 335-340.

[RT] S. Rams, P. Tworzewski, *Zbieżność łańcuchów holomorficznych*, Materiały XVIII Konf. Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź (1997).

[S_1] S. Spodzieja, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, Ann. Polon. Math. 73.3 (2000), 257-267.

[S_2] S. Spodzieja, *The Łojasiewicz exponent at infinity for overdetermined polynomial mappings*, Preprint Wydz. Mat. UŁ 1999/5.

[StV] J. Stückrad, W. Vogel, *An algebraic approach to the intersection theory; In: The curves seminar at Queen's University Vol.II*, Queens Papers in Pure and Applied Math. 61 (1982), 1–32, Kingston, Ontario.

[T_1] P. Tworzewski, *Isolated intersection multiplicity and regular separation of analytic sets*, Ann. Polon. Math. 58.2 (1993), 213–219.

[T_2] P. Tworzewski, *Intersection Theory in Complex Analytic Geometry*, Ann. Polon. Math. 62.2 (1995), 177–191.

[TW_1] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Analytic sets with proper projections*, J. reine angew. Math. 337 (1982), 68–76.

[TW_2] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Zbiory analityczne z właściwym rzutowaniem*, IV Konferencja Funkcji Analitycznych w Błażejewku, Łódź (1983), 131–159.

[TW_3] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Continuity of intersection of analytic sets*, Ann. Polon. Math. 42 (1983), 387–393.

[TW_4] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Cycles of Zeroes of Holomorphic Mappings*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 37 (1989), 95–101.

[V] W. Vogel, *Results on Bezout's Theorem, Tata Lecture Notes, Bombay*, Vol.74, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1984.

[Wh] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison–Wesley, 1972.

[W] T. Winiarski, *Continuity of total number of intersection*, Ann. Polon. Math. 47 (1986), 155–178.

INTERSECTION THEORY IN COMPLEX ANALYTIC GEOMETRY AND APPLICATIONS

Summary. This paper is to be treated as the first in the series on intersection theory in complex analytic geometry and applications. As for prerequisites, the reader is expected to be familiar with basic result of complex analytic geometry.

Będlewo, 8 – 12 stycznia 2001 r.