Konfiguracje typu Fermata i systemy liniowe

Justyna Szpond

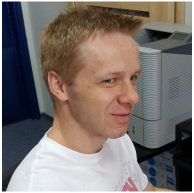
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie
Instytut Matematyki

XL Conference and Workshop Analytic and Algebraic Geometry
Łódź, 7-11 stycznia 2019

Współautorzy

Wykład przygotowany jest na postawie wspólnych prac z

Thomasem Bauerem (Marburg), 

Grzegorzem Malarą (Kraków), 

Tomaszem Szembergiem (Kraków). 

Konfiguracje Fermata

Definicja

Konfiguracją Fermata prostych na płaszczyźnie $\mathbb{P}^2$ *nazywamy zbiór zer liniowych czynników wielomianu*

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n).$$

Konfiguracje Fermata

Definicja

Konfiguracją Fermata prostych na płaszczyźnie $\mathbb{P}^2$ nazywamy zbiór zer liniowych czynników wielomianu

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n).$$

Uwaga

Hirzebruch nazywał tę konfigurację konfiguracją Cevy.

Przykład $n = 3$

Dla $n = 3$ jest to konfiguracja dualna Hessego.

Przykład $n = 3$

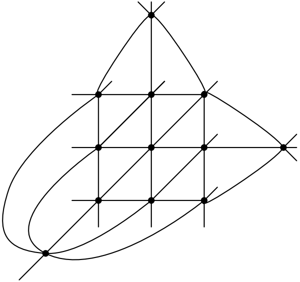
Dla $n = 3$ jest to konfiguracja dualna Hessego.

Mamy 9 prostych przecinających się w 12 punktach.

Przykład $n = 3$

Dla $n = 3$ jest to konfiguracja dualna Hessego.

Mamy 9 prostych przecinających się w 12 punktach.



Konfiguracji tej nie można narysować na rzeczywistej płaszczyźnie.

Nieoczekiwane krzywe

Twierdzenie (Theorem 6.12, CHMN)

Niech Z_n będzie ideałem punktów dualnych do prostych konfiguracji Fermata

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n).$$

Wtedy ze zbiorem Z_n związana jest nieoczekiwana nierozkładalna krzywa stopnia $n+2$ z krotnością $n+1$ w ogólnym punkcie dla każdego $n \geqslant 5$.

Nieoczekiwane krzywe cd

Niech W będzie zbiorem punktów osobliwych konfiguracji Fermata

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n),$$

Nieoczekiwane krzywe cd

Niech W będzie zbiorem punktów osobliwych konfiguracji Fermata

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n),$$

tzn. punktów postaci

$$P_{(\alpha,\beta)} = (1 : \varepsilon^\alpha : \varepsilon^\beta)$$

gdzie ε jest pierwiastkiem stopnia n z jedynki, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$; oraz 3 punktów postaci $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$.

Nieoczekiwane krzywe cd

Niech W *będzie zbiorem punktów osobliwych konfiguracji Fermata*

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n),$$

tzn. punktów postaci

$$P_{(\alpha,\beta)} = (1 : \varepsilon^\alpha : \varepsilon^\beta)$$

gdzie ε *jest pierwiastkiem stopnia* n *z jedynki,* $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$*; oraz* 3 *punktów postaci* $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$.

Niech punkt $P = (a : b : c)$ *będzie punktem generycznym w* $\mathbb{P}^2$.

Nieoczekiwane krzywe cd

Niech W *będzie zbiorem punktów osobliwych konfiguracji Fermata*

$$(x^n - y^n)(y^n - z^n)(z^n - x^n),$$

tzn. punktów postaci

$$P_{(\alpha,\beta)} = (1 : \varepsilon^\alpha : \varepsilon^\beta)$$

gdzie ε *jest pierwiastkiem stopnia* n *z jedynki,* $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$*; oraz* 3 *punktów postaci* $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$.

Niech punkt $P = (a : b : c)$ *będzie punktem generycznym w* $\mathbb{P}^2$.

Przyjmijmy oznaczenia

$$u = \binom{n}{2} - 1, \quad v = \binom{n-1}{2}, \quad w = \binom{n+1}{2}.$$

Twierdzenie

Wtedy krzywa

$$\begin{aligned}
Q_P(x:y:z) = & -cxy((ub^n+vc^n)(z^n-x^n)+(ua^n+vc^n)(y^n-z^n)) \\
& -bxz((ua^n+vb^n)(y^n-z^n)+(uc^n+vb^n)(x^n-y^n)) \\
& -ayz((ub^n+va^n)(z^n-x^n)+(uc^n+va^n)(x^n-y^n)) \\
& +wa^{n-1}bcx^2(y^n-z^n)+wab^{n-1}cy^2(z^n-x^n) \\
& +wabc^{n-1}z^2(x^n-y^n)
\end{aligned}$$

- *znika we wszystkich punktach zbioru* W,
- *znika do rzędu* 4 *w* P,
- *jest niespodziewaną krzywą stopnia* $n+2$ *dla* W.

Uogólnienie do przestrzeni rzutowych wyższych wymiarów

Definicja

Konfiguracją typu Fermata hiperpłaszczyzn $\mathcal{F}_N^n$ w $\mathbb{P}^N$ nazywamy konfigurację określoną przez liniowe czynniki wielomianu

$$F_{N,n} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i^n - x_j^n).$$

Uogólnienie do przestrzeni rzutowych wyższych wymiarów

Definicja

Konfiguracją typu Fermata hiperpłaszczyzn $\mathcal{F}_N^n$ *w* $\mathbb{P}^N$ *nazywamy konfigurację określoną przez liniowe czynniki wielomianu*

$$F_{N,n} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i^n - x_j^n).$$

Wniosek

Dla $N = 2$ *w powyższej definicji otrzymujemy konfigurację Fermata prostych.*

Uogólnienie do przestrzeni rzutowych wyższych wymiarów

Definicja

Konfiguracją typu Fermata hiperpłaszczyzn $\mathcal{F}_N^n$ w $\mathbb{P}^N$ nazywamy konfigurację określoną przez liniowe czynniki wielomianu

$$F_{N,n} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant N} (x_i^n - x_j^n).$$

Wniosek

Dla $N = 2$ w powyższej definicji otrzymujemy konfigurację Fermata prostych.

Wniosek

Dla $N > 2$ konfiguracja typu Fermata wyznacza punkty $\mathcal{F}_N^n(0)$, proste $\mathcal{F}_N^n(1)$, płaszczyzny $\mathcal{F}_N^n(2)$, itd.

Konfiguracje typu Fermata punktów w $\mathbb{P}^3$

Weźmy pod uwagę ideał I generowany przez 8 dwumianów stopnia 4 następującej postaci:

$$x(y^3 - z^3),\ x(z^3 - w^3),\ y(x^3 - z^3),\ y(z^3 - w^3),$$

$$z(x^3 - y^3),\ z(y^3 - w^3),\ w(x^3 - y^3),\ w(y^3 - z^3).$$

Konfiguracje typu Fermata punktów w $\mathbb{P}^3$

Weźmy pod uwagę ideał I generowany przez 8 dwumianów stopnia 4 następującej postaci:

$$x(y^3 - z^3),\ x(z^3 - w^3),\ y(x^3 - z^3),\ y(z^3 - w^3)\,,$$

$$z(x^3 - y^3),\ z(y^3 - w^3),\ w(x^3 - y^3),\ w(y^3 - z^3)\,.$$

Jest to ideał $27 = 3^3$ (zupełne przecięcie) punktów postaci

$$P_{(\alpha,\beta,\gamma)} = (1 : \varepsilon^{\alpha} : \varepsilon^{\beta} : \varepsilon^{\gamma})$$

gdzie ε jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z jedynki, $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant 3$; oraz 4 punktów postaci $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 0 : 1)$. Oznaczmy zbiór tych 31 punktów przez W.

Konfiguracje typu Fermata punktów w $\mathbb{P}^3$

Weźmy pod uwagę ideał I generowany przez 8 dwumianów stopnia 4 następującej postaci:

$$x(y^3 - z^3),\ x(z^3 - w^3),\ y(x^3 - z^3),\ y(z^3 - w^3)\,,$$

$$z(x^3 - y^3),\ z(y^3 - w^3),\ w(x^3 - y^3),\ w(y^3 - z^3)\,.$$

Jest to ideał $27 = 3^3$ (zupełne przecięcie) punktów postaci

$$P_{(\alpha,\beta,\gamma)} = (1 : \varepsilon^\alpha : \varepsilon^\beta : \varepsilon^\gamma)$$

gdzie ε jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z jedynki, $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant 3$; oraz 4 punktów postaci $(1 : 0 : 0 : 0)$, $(0 : 1 : 0 : 0)$, $(0 : 0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 0 : 1)$. Oznaczmy zbiór tych 31 punktów przez W.

Zbiór W jest podzbiorem punktów konfiguracji $\mathcal{F}_3^3$.

Niespodziewane powierzchnie w $\mathbb{P}^3$

Twierdzenie (Bauer, Malara, Szemberg, Sz.)

Niech $R = (a : b : c : d)$ będzie punktem generycznym w $\mathbb{P}^3$. Wtedy kwartyka

$$\begin{aligned}Q_R(x:y:z:w) = {} & b^2(c^3-d^3)\cdot x^3y + a^2(d^3-c^3)\cdot xy^3 \\ & + c^2(d^3-b^3)\cdot x^3z + c^2(a^3-d^3)\cdot y^3z \\ & + a^2(b^3-d^3)\cdot xz^3 + b^2(d^3-a^3)\cdot yz^3 \\ & + d^2(b^3-c^3)\cdot x^3w + d^2(c^3-a^3)\cdot y^3w \\ & + d^2(a^3-b^3)\cdot z^3w + a^2(c^3-b^3)\cdot xw^3 \\ & + b^2(a^3-c^3)\cdot yw^3 + c^2(b^3-a^3)\cdot zw^3\end{aligned}$$

- *znika we wszystkich punktach zbioru W,*
- *znika do rzędu 3 w R,*
- *jest niespodziewaną powierzchnią dla W.*

BMSS duality

Twierdzenie

Kwartyka ta może być zapisana jako wielomian stopnia 5 *w zmiennych* a, b, c, d. *Niech* $S = (x : y : z : w)$, *wtedy*

$$\begin{aligned} Q_S(a:b:c:d) = {} & y(w^3 - z^3) \cdot a^3 b^2 + x(z^3 - w^3) \cdot a^2 b^3 \\ & + z(y^3 - w^3) \cdot a^3 c^2 + z(w^3 - x^3) \cdot b^3 c^2 \\ & + x(w^3 - y^3) \cdot a^2 c^3 + y(x^3 - w^3) \cdot b^2 c^3 \\ & + w(z^3 - y^3) \cdot a^3 d^2 + w(x^3 - z^3) \cdot b^3 d^2 \\ & + w(y^3 - x^3) \cdot c^3 d^2 + x(y^3 - z^3) \cdot a^2 d^3 \\ & + y(z^3 - x^3) \cdot b^2 d^3 + z(x^3 - y^3) \cdot c^2 d^3. \end{aligned}$$

Powierzchnia Q_S *ma punkt potrójny w* S.

I co dalej?

Naturalne pytania:

I co dalej?

Naturalne pytania:

Pytanie

Co z przestrzeniami rzutowymi wyższych wymiarów?

I co dalej?

Naturalne pytania:

Pytanie

Co z przestrzeniami rzutowymi wyższych wymiarów?

Pytanie

Czy może być więcej niż jeden generyczny tłusty punkt?

I co dalej?

Naturalne pytania:

Pytanie

Co z przestrzeniami rzutowymi wyższych wymiarów?

Pytanie

Czy może być więcej niż jeden generyczny tłusty punkt?

Pytanie

*Czy istnieją nieoczekiwane hiperpowierzchnie z wyżej wymiarowym zbiorem punktów bazowych
(np. krzywe zamiast punktów)?*

I co dalej?

Naturalne pytania:

Pytanie

Co z przestrzeniami rzutowymi wyższych wymiarów?

Pytanie

Czy może być więcej niż jeden generyczny tłusty punkt?

Pytanie

Czy istnieją nieoczekiwane hiperpowierzchnie z wyżej wymiarowym zbiorem punktów bazowych
(np. krzywe zamiast punktów)?

Zatem jest to początek bardzo długiej podróży!

Wyżej wymiarowe przestrzenie rzutowe i więcej tłustych punktów

Twierdzenie (Sz.)

Niech $N = 2k + 1$ *będzie liczbą nieparzystą. Niech* W_N *będzie zbiorem złożonym z punktów fundamentalnych w* $\mathbb{P}^N$ *oraz punktów postaci*

$$(1 : \varepsilon^{\alpha_1} : \varepsilon^{\alpha_2} : \ldots : \varepsilon^{\alpha_N}),$$

gdzie ε *jest prymitywnym pierwiastkiem trzeciego stopnia z* 1*, oraz* $1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_N \leqslant 3$*.*
Niech R *oraz* $P_1, \ldots, P_{k-1}$ *będą punktami ogólnymi w* $\mathbb{P}^N$*. Wtedy istnieje* ***jednoznacznie wyznaczona*** *hiperpowierzchnia stopnia 4 taka, że*

- *przechodzi przez wszystkie punkty zbioru* W_N*,*
- *ma punkt krotności 3 w* R*,*
- *ma punkty osobliwe w* $P_1, \ldots, P_{k-1}$*,*
- *jest nieoczekiwana dla zbioru* W_N*.*

Twierdzenie w $\mathbb{P}^5$

Twierdzenie (Sz.)

Niech W_5 będzie zbiorem złożonym z punktów fundamentalnych w $\mathbb{P}^5$ oraz punktów postaci

$$(1 : \varepsilon^{\alpha_1} : \varepsilon^{\alpha_2} : \varepsilon^{\alpha_3} : \varepsilon^{\alpha_4} : \varepsilon^{\alpha_5}),$$

gdzie ε jest prymitywnym pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1 oraz $1 \leqslant \alpha_1, \dots, \alpha_5 \leqslant 3$.
Niech R oraz P będą punktami ogólnymi w $\mathbb{P}^5$. Wtedy istnieje ***jednoznacznie wyznaczona*** *hiperpowierzchnia stopnia 4 taka, że*

- *przechodzi przez wszystkie punkty zbioru W_5,*
- *ma punkt krotności 3 w R,*
- *jest osobliwa w punkcie P,*
- *jest nieoczekiwana dla W_5.*

Szkic dowodu

Ideał I 249 punktów z W_5 generowany jest przez formy stopnia 4 postaci

$$x_i(x_j^3 - x_k^3)$$

gdzie $i \neq j \neq k \neq i$ oraz $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Szkic dowodu

Ideał I 249 punktów z W_5 generowany jest przez formy stopnia 4 postaci

$$x_i(x_j^3 - x_k^3)$$

gdzie $i \neq j \neq k \neq i$ oraz $i, j, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Baza ideału I składa się z 24 wielomianów stopnia 4 (kwartyk).

Kwartyki z ogólnym punktem potrójnym

Niech $R = (a_0 : a_1 : \ldots : a_5)$ *będzie punktem ogólnym w* $\mathbb{P}^5$.

Kwartyki z ogólnym punktem potrójnym

Niech $R = (a_0 : a_1 : \ldots : a_5)$ *będzie punktem ogólnym w* $\mathbb{P}^5$.

Lemat

Baza przestrzeni kwartyk przechodzących przez W_5 *i mających punkt potrójny w* R *składa się z sześciu kwartyk*

$$J_1, \ldots, J_6.$$

Kwartyki z ogólnym punktem potrójnym

Niech $R = (a_0 : a_1 : \ldots : a_5)$ *będzie punktem ogólnym w* $\mathbb{P}^5$*.*

Lemat

Baza przestrzeni kwartyk przechodzących przez W_5 *i mających punkt potrójny w* R *składa się z sześciu kwartyk*

$$J_1, \ldots, J_6.$$

Każdy element bazy jest stożkiem nad jednoznacznie wyznaczoną powierzchnią stopnia 4 w $\mathbb{P}^3$ *przechodzącą przez punkty zbioru* W_3 *z punktem potrójnym będącym rzutem punktu* R*.*
Generatory te mają dwustopień $(5, 4)$*.*

Kwartyka z dodatkowym ogólnym punktem podwójnym

Niech $P = (b_0 : b_1 : \ldots : b_5)$ *będzie punktem ogólnym w* $\mathbb{P}^5$.

Kwartyka z dodatkowym ogólnym punktem podwójnym

Niech $P = (b_0 : b_1 : \ldots : b_5)$ *będzie punktem ogólnym w* $\mathbb{P}^5$.

Kwartyka

$$f = J_1(P) \cdot J_6 - J_2(P) \cdot J_5 + J_3(P) \cdot J_4 + J_4(P) \cdot J_3 - J_5(P) \cdot J_2 + J_6(P) \cdot J_1$$

ma krotność 2 *w punkcie* P.

Kwartyka z dodatkowym ogólnym punktem podwójnym

Niech $P = (b_0 : b_1 : \ldots : b_5)$ *będzie punktem ogólnym w* $\mathbb{P}^5$.

Kwartyka

$$f = J_1(P) \cdot J_6 - J_2(P) \cdot J_5 + J_3(P) \cdot J_4 + J_4(P) \cdot J_3 - J_5(P) \cdot J_2 + J_6(P) \cdot J_1$$

ma krotność 2 *w punkcie* P.

Kwartyka f *ma trzy-stopień* $(4, 10, 4)$ *w zmiennych* b, a, x.

Konkluzja

Nie wiadomo gdzie jeszcze można szukać, i w jakiej postaci, nieoczekiwanych hiperpowierzchni...

Konkluzja

Nie wiadomo gdzie jeszcze można szukać, i w jakiej postaci, nieoczekiwanych hiperpowierzchni...

... ale mamy pomysły (więcej za rok)!

Literatura

[1] Th. Bauer, G. Malara, T. Szemberg, and J. Szpond.
Quartic unexpected curves and surfaces, Manuscripta Math., doi.org/10.1007/s00229-018-1091-3.

[2] D. Cook II, B. Harbourne, J. Migliore, and U. Nagel.
Line arrangements and configurations of points with an unexpected geometric property, Compos. Math. 154 (2018), no. 10, 2150–2194

[3] B. Harbourne, J. Migliore, U. Nagel, and Z. Teitler.
Unexpected hypersurfaces and where to find them, arXiv:1805.10626.

[4] J. Szpond.
Unexpected curves and Togliatti-type surfaces, arXiv:1810.06607 .

[5] J. Szpond.
Unexpected hypersurfaces with multiple fat points, arXiv:1812.04032.