MATERIAŁY NA XXXII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2011 **Łódź** **str. 73**

TWIERDZENIE HADAMARDA O ODWRACALNOŚCI ODWZOROWAŃ

Anna Szlachcińska (Łódź)

Streszczenie

Celem artykułu jest przedstawienie dowodu twierdzenia Hadamarda o odwracalności odwzorowań elementarnymi metodami topologicznymi.

Wstęp

Ponad sto lat temu J. Hadamard pokazał, że

Odwzorowanie $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *klasy* C^1 *jest dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jakobian* $J_f(x) \neq 0$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}^n$ *i odwzorowanie* f *jest właściwe.*

Twierdzenie to nadal wzbudza zainteresowanie matematyków. Wśród nich jest W. B. Gordon, który podał jego dowód stosując metody równań różniczkowych (patrz [Go]).

Celem tego artykułu jest podanie dowodu powyższego twierdzenia elementarną teorią nakryć, wzorując się na monografii S. Łojasiewicza (patrz [Ło]) oraz podanie wersji zespolonej tego twierdzenia dla odwzorowań biholomorficznych.

W pierwszym rozdziale opracowane są, pod kątem dalszej części pracy, wybrane zagadnienia z topologii przy możliwie najsłabszych założeniach. Ponadto przytoczone są za [Ch2] i [Bi] potrzebne w dalszej częci artykułu fakty z wielowymiarowej analizy zespolonej i rzeczywistej.

W drugim, głównym rozdziale podane są związki między nakryciem, lokalnym homeomorfizmem i właściwością. Rozdział ten jest opracowany na podstawie wspomnianej powyżej monografii S. Łojasiewicza. Analiza pojęcia nakrycia doprowadza do własności 2.3, która mówi, że nakrycie musi być surjekcją. Dzięki temu udaje się poprawić niedokładne sformułowanie w [Ło] warunku koniecznego i wystarczającego na to, by odwzorowanie było nakryciem skończonym (twierdzenie 2.1). Następnie dowodzone jest, za S. Łojasiewiczem, podstawowe twierdzenie 2.2.

W rozdziale trzecim podane są dowody zapowiedzianych na początku twierdzeń (twierdzenia 3.1 i 3.2), w których wykorzystywane jest twierdzenie 2.2.

W ostatnim rozdziale sformułowany jest związek twierdzenia Hadamarda z hipotezą jakobianową.

Pragnę podziękować Panu Profesorowi Jackowi Chądzyńskiemu za pomoc w czasie pisania pracy. Dziękuję także uczestnikom Seminarium Katedry Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych, na którym referowałam pracę, w szczególności prof. S. Spodziei.

1 Preliminaria

Przez f_U oznaczamy obcięcie odwzorowania $f\colon M \to N$ do zbioru $U \subset M$.

1.1 Wybrane zagadnienia z topologii

Wprowadzimy najpierw podstawowe pojęcie tego rozdziału.

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(M, \mathcal{O})$ złożoną ze zbioru M i rodziny $\mathcal{O}$ jego podzbiorów spełniającej warunki:

(i) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $M \in \mathcal{O}$,

(ii) jeśli $A_1 \in \mathcal{O}$ i $A_2 \in \mathcal{O}$, to $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}$,

(iii) jeśli $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, to $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

Zbiór M nazywamy *przestrzenią*. Podzbiory należące do rodziny $\mathcal{O}$ (zwanej *topologią* w M) nazywamy *zbiorami otwartymi*.

Niech M i N będą przestrzeniami topologicznymi.

Podamy teraz kolejne definicje.

Podzbiór U przestrzeni M nazywamy *otoczeniem punktu* $a \in M$, gdy jest otwarty w topologii M i $a \in U$.

Przestrzeń M nazywamy *spójną*, gdy nie daje się rozłożyć na dwa zbiory domknięte, niepuste i rozłączne.

Przestrzeń M nazywamy *przestrzenią Hausdorffa*, gdy dla każdej pary różnych punktów $x_1, x_2 \in M$ istnieją otoczenia U_1 i U_2 odpowiednio punktów x_1 i x_2 takie, że $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Podzbiór K przestrzeni Hausdorffa M nazywamy *zwartym*, gdy z każdego pokrycia otwartego zbioru K w topologii M można wybrać podpokrycie skończone.

Podzbiór A przestrzeni M nazywamy *izolowanym*, gdy dla każdego $a \in A$ istnieje zbiór otwarty G_a taki, że $G_a \cap A = \{a\}$.

Własność 1.1. *Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa. Podzbiór A zwarty i izolowany przestrzeni M jest skończony.*

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że zbiór $A \subset M$ jest nieskończony. Ponieważ zbiór A jest izolowany, więc dla każdego punktu $a \in A$ istnieje zbiór otwarty G_a taki, że $G_a \cap A = \{a\}$. Rodzina $\{G_a\}_{a \in A}$ jest pokryciem otwartym zbioru A takim, że w każdym zbiorze G_a jest zawarty dokładnie jeden element zbioru A. Stąd, z pokrycia tego nie można wybrać podpokrycia skończonego zbioru A. To przeczy zwartości A i kończy dowód własności. $\square$

Własność 1.2. *Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa. Jeśli punkt $c \in M$, zbiór $K \subset M$ jest zwarty i taki, że $c \notin K$, to istnieje otoczenie V punktu c oraz zbiór otwarty U taki, że $K \subset U$ i $V \cap U = \emptyset$.*

Dowód. Dla każdego $x \in K$ mamy, że $x \neq c$. Istnieją otoczenia U_x i V_x w topologii M odpowiednio punktów x i c takie, że $U_x \cap V_x = \emptyset$ dla każdego $x \in K$. Rodzina $\{U_x\}_{x \in K}$ jest pokryciem otwartym zbioru zwartego K. Zatem możemy z niej wybrać podpokrycie skończone $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ zbioru K. Połóżmy $U = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}$ i $V = V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}$. Wówczas $U \cap V = \emptyset$, V jest zbiorem otwartym, $c \in V$ i $K \subset U$, czyli $V \cap K = \emptyset$. To kończy dowód. $\square$

Podzbiór F przestrzeni M nazywamy *domkniętym*, gdy dopełnienie $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym.

Własność 1.3. *Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa. Jeśli zbiór $K \subset M$ jest zwarty, to jest domknięty.*

Dowód. Z własności 1.2 wynika, że dla każdego punktu $c \in M \setminus K$ istnieje otoczenie V takie, że $c \in V \subset M \setminus K$. Stąd zbiór $M \setminus K$ jest otwarty, czyli zbiór K jest domknięty.

To kończy dowód. $\square$

Własność 1.4. *Niech M będzie przestrzenią Hausdorffa. Jeśli zbiór $F \subset M$ jest domkniętym podzbiorem zbioru zwartego $K \subset M$, to zbiór F jest zwarty.*

Dowód. Niech zbiory U_s, $s \in S$, będą otwarte w topologii M oraz tworzą pokrycie zbioru F. Zbiory U_s, $s \in S$ i $H = M \setminus F$ stanowią pokrycie zbioru K. Zatem możemy z niego wybrać podpokrycie skończone zbioru K. Jeśli zbiór H nie jest elementem tego pokrycia, to jest ono pokryciem zbioru F. Natomiast jeśli zbiór H jest elementem tego pokrycia, to możemy H odrzucić i otrzymamy skończone pokrycie zbioru F.

To kończy dowód. □

Niech $A \subset M$ będzie dowolnym zbiorem. Najmniejszy zbiór domknięty zawierający A nazywamy *domknięciem* zbioru A i oznaczamy $\overline{A}$.

Własności operacji domknięcia stosowane w dalszej części pracy znaleźć można w [En].

Przestrzeń Hausdorffa M nazywamy *lokalnie zwartą*, gdy dla każdego $x \in M$ istnieje otoczenie U punktu x takie, że $\overline{U}$ jest zbiorem zwartym w M. Zbiór $\overline{U} \subset M$ nazywamy *otoczeniem zwartym punktu* $x \in M$.

Udowodnimy własność

Własność 1.5. *Jeśli M jest przestrzenią lokalnie zwartą, to dla dowolnego punktu $x \in M$ i dla dowolnego otoczenia $V \subset M$ tego punktu istnieje otoczenie $V_x \subset M$ punktu x takie, że $\overline{V}_x \subset V$ i $\overline{V}_x$ jest zbiorem zwartym.*

Dowód. Niech $F = M \setminus V$ i niech $W \subset M$ będzie otoczeniem punktu x takim, że $\overline{W}$ jest zbiorem zwartym. W myśl własności 1.4 zbiór $F_0 = F \cap \overline{W}$ jest zwarty i $x \notin F_0$. Zatem na mocy własności 1.2 istnieją zbiory otwarte V_x i U_0 w topologii M takie, że

$$V_x \subset W, \tag{1}$$

$$x \in V_x,\ \ F_0 \subset U_0 \text{ i } V_x \cap U_0 = \emptyset. \tag{2}$$

Połóżmy $U = U_0 \cup (M \setminus \overline{W})$. Zbiór U jest otwarty, zaś z (1) i (2) wynika, że $V_x \cap U = \emptyset$. Ponadto, z (2) mamy

$$F = F \cap M = (F \cap \overline{W}) \cup [F \cap (M \setminus \overline{W})] =$$
$$F_0 \cup [F \cap (M \setminus \overline{W})] \subset U_0 \cup (M \setminus \overline{W}) = U.$$

Stąd i z określenia F dostajemy

$$V_x \subset M \setminus U \subset V. \tag{3}$$

Reasumując, z (3) mamy

$$\overline{V}_x \subset \overline{M \setminus U} = M \setminus U \subset V,$$

i z (1) $\overline{V}_x \subset \overline{W}$, co ma mocy własności 1.4 daje zwartość zbioru $\overline{V}_x$. □

Odwzorowanie $f\colon M \to N$ nazywamy *ciągłym*, gdy dla każdego zbioru otwartego $G \subset N$ zbiór $f^{-1}(G)$ jest otwarty w M.

Własność 1.6. *Jeśli $f\colon M \to N$ jest odwzorowaniem ciągłym, to dla zbioru zwartego $K \subset M$ zbiór $f(K)$ jest zwarty.*

Dowód. Weźmy dowolne pokrycie otwarte $\{U_s\}_{s\in S}$ zbioru $f(K)$ w topologii N. Wtedy zbiory $\{f^{-1}(U_s)\}_{s\in S}$ tworzą pokrycie otwarte zbioru K. Zatem istnieje zbiór skończony $\{s_1, \ldots, s_n\} \subset S$ taki, że

$$K \subset f^{-1}(U_{s_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{s_n}).$$

Ponieważ dla każdego zbioru $U \subset N$ zachodzi równość $f(f^{-1}(U)) \subset U$ oraz dla dowolnych $V_1, \ldots, V_n \subset M$ mamy $f(V_1 \cup \cdots \cup V_n) = f(V_1) \cup \cdots \cup f(V_n)$, więc biorąc obrazy obu stron powyższego otrzymujemy, że

$$f(K) \subset U_{s_1} \cup \cdots \cup U_{s_n}.$$

To kończy dowód. $\square$

Pokażemy następującą własność

Własność 1.7. *Jeżeli odwzorowania f i g są ciągłymi przekształceniami przestrzeni topologicznej M w przestrzeń Hausdorffa N, to zbiór*

$$\{x \in M : f(x) = g(x)\}$$

jest domknięty.

Dowód. Pokażemy, że zbiór $A = \{x \in M : f(x) \neq g(x)\}$ jest otwarty. Dla dowolnego $x \in A$ mamy $f(x) \neq g(x)$ i w przestrzeni N istnieją otoczenia U_1 i U_2 odpowiednio punktów $f(x)$ i $g(x)$ takie, że $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Zbiór $U = f^{-1}(U_1) \cap g^{-1}(U_2)$ jest otoczeniem punktu x. Ponadto, dla każdych $y \in U_1$ i $z \in U_2$ jest $y \neq z$. Zatem zbiór $U \subset A$. Stąd i z dowolności punktu x dostajemy otwartość zbioru A. $\square$

Odwzorowanie ciągłe $f\colon M \to N$ nazywamy *otwartym*, gdy dla każdego zbioru otwartego $A \subset M$ obraz $f(A)$ jest zbiorem otwartym w N.

Odwzorowanie ciągłe $f\colon M \to N$ nazywamy *homeomorfizmem*, jeśli jest bijekcją przestrzeni M na N oraz odwzorowanie f^{-1} jest ciągłe.

Odwzorowanie $f\colon M \to N$ nazywamy *lokalnym homeomorfizmem*, gdy dla każdego punktu $a \in M$ istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(U)$ jest zbiorem otwartym w N i $f_U\colon U \to f(U)$ jest homeomorfizmem.

Łatwo zauważamy

Własność 1.8. *Jeśli lokalny homeomorfizm $f\colon M \to N$ jest bijekcją, to jest homeomorfizmem.*

Istotnie, z lokalnej homeomorficzności odwzorowania f wynika, że f^{-1} jest odwzorowaniem ciągłym. $\square$

1.2 Wybrane zagadnienia z analizy matematycznej

Przez $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ oznaczamy odpowiednio ciało liczb rzeczywistych oraz zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych. Dla $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ przyjmujemy $\| x \| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Przrzestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest lokalnie zwarta, zatem zachodzą w niej wszystkie własności z paragrafu 1.1.

Niech $f = (f_1, \dots, f_n) \colon G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^n$, będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Macierz $A = [\partial f_k / \partial x_j]_{1 \leqslant k,j \leqslant n}$ nazywamy *macierzą Jacobiego odwzorowania* f. Wyznacznik $detA$ nazywamy *jakobianem odwzorowania* f i oznaczamy J_f.

Bezpośrednio z [Bi], twierdzenie 1.8.1 oraz twierdzenie 1.8.2, dostajemy następujące własności

Własność 1.9. *Jeśli $G \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, odwzorowanie $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 oraz $J_f(a) \neq 0$ dla pewnego $a \in G$, to*

(a) $f(G)$ zawiera pewne otoczenie punktu $f(a)$.

(b) istnieją otoczenia U i V odpowiednio punktów a i $f(a)$ takie, że odwzorowanie $f \colon U \to V$ jest wzajemnie jednoznaczne.

Własność 1.10. *Jeśli $G \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, odwzorowanie $f \colon G \to \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 oraz $J_f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in G$, to*

(a) zbiór $f(G)$ jest otwarty.

(b) jeśli f jest różnowartościowe, to f^{-1} jest klasy C^1.

Niech $D, G \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi. Odwzorowanie $f \colon D \to G$ nazywamy *dyfeomorfizmem*, gdy odwzorowuje bijektywnie D na G oraz odwzorowania f i f^{-1} są klasy C^1.

1.3 Wybrane zagadnienia z analizy zespolonej

Przez $\mathbb{C}$ oznaczamy ciało liczb zespolonych. Przyjmujemy oznaczenie $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Przrzestrzeń $\mathbb{C}^n$ jest lokalnie zwarta, zatem zachodzą w niej wszystkie własności z paragrafu 1.1.

Funkcję f nazywamy *holomorficzną w punkie* $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, gdy w pewnym otoczeniu tego punktu jest ciągła i ma w tym otoczeniu pochodne cząstkowe $\partial f / \partial z_j$, $j = 1, \dots, n$, tzn. gdy jest ciągła i holomorficzna względem każdej zmiennej osobno. Powiemy, że funkcja f jest *holomorficzna w zbiorze* $D \in \mathbb{C}^n$, gdy jest holomorficzna w każdym punkcie tego zbioru.

Niech $G \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Odwzorowanie $f = (f_1, \dots, f_m) \colon G \to \mathbb{C}^m$ nazywamy *holomorficznym*, gdy funkcje $f_1, \dots, f_m$ są holomorficzne.

Niech $f = (f_1, \dots, f_n) \colon G \to \mathbb{C}^n$, $G \subset \mathbb{C}^n$, będzie odwzorowaniem holomorficznym. Macierz $A = [\partial f_k / \partial z_j]_{1 \leqslant k,j \leqslant n}$ nazywamy *macierzą Jacobiego odwzorowania* f. Wyznacznik $detA$ nazywamy *jakobianem odwzorowania* f i oznaczamy J_f.

Własność 1.11. [1] *Jeśli $G \subset \mathbb{C}^n$ jest zbiorem otwartym, $f\colon G \to \mathbb{C}^n$ odwzorowaniem holomorficznym i $J_f(a) \neq 0$ dla pewnego $a \in G$, to istnieją otoczenia U i V odpowiednio punktów a i $f(a)$ takie, że $f_U\colon U \to V$ jest odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym i odwzorowanie $f_U^{-1}\colon V \to U$ jest holomorficzne.*

Własność 1.12. [2] *Niech $G \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym. Jeśli $f = (f_1, \dots, f_n)\colon G \to \mathbb{C}^n$ jest odwzorowaniem holomorficznym różnowartościowym, to jego jakobian nigdzie nie znika w G.*

Z własności 1.11 i 1.12 otrzymujemy

Własność 1.13. [3] *Jeśli $G \subset \mathbb{C}^n$ jest zbiorem otwartym, $f\colon G \to \mathbb{C}^n$ odwzorowaniem holomorficznym różnowartościowym, to*

(a) f jest odwzorowaniem otwartym.

(b) $f^{-1}\colon f(G) \to G$ jest odwzorowaniem holomorficznym.

2 Nakrycia, lokalny homeomorfizm, odwzorowania właściwe

W rozdziale tym przyjmujemy, że M i N są przestrzeniami Hausdorffa.

Własność 2.1. *Niech odwzorowanie $f\colon M \to N$ będzie lokalnym homeomorfizmem oraz odwzorowania ciągłe $h_i\colon E \to M$, $i = 1, 2$, spełniają w zbiorze $E \subset N$ równania*

$$f(h_i(z)) = z, \quad \text{dla } i = 1, 2. \tag{4}$$

Jeśli $h_1(c) = h_2(c)$ dla pewnego punktu $c \in E$, to $h_1 = h_2$ w pewnym otoczeniu punktu c w E.

Istotnie, niech $a = h_1(c) = h_2(c)$. Ponieważ f jest lokalnym homeomorfizmem, więc istnieje otoczenie U punktu a takie, że $f(U)$ jest zbiorem otwartym w N i odwzorowanie $f_U\colon U \to f(U)$ jest homeomorfizmem. Połóżmy $h_1^{-1}(U) = V_1$ i $h_2^{-1}(U) = V_2$. Zbiory V_1, V_2 są otwarte i $c \in V_1 \cap V_2$. Niech $V = V_1 \cap V_2$. Z (4) mamy

$$f_U(h_i(z)) = z \text{ dla } z \in V,\ i = 1, 2.$$

Skąd dostajemy, że $h_1(z) = f_U^{-1}(z) = h_2(z)$ dla $z \in V$. To daje, że $h_1(z) = h_2(z)$ dla $z \in V \cap E$.

□

Przy założeniach powyższej własności dostajemy

[1] Zob. [Ch2], twierdzenie 12.1.
[2] Zob. [Ch2], twierdzenie 21.1.
[3] Zob. [Ch2], twierdzenie 21.2.

Własność 2.2. *Jeśli zbiór E jest spójny, to $h_1 = h_2$ w E.*

Istotnie, ponieważ zbiór $\{z \in E\colon h_1(z) = h_2(z)\}$ jest niepusty, otwarty (w myśl własności 2.1) i domknięty (w myśl własności 1.7) w E, więc pokrywa się z E. $\square$

Udowodnimy następujący lemat

Lemat 2.1. *Niech odwzorowanie $f\colon M \to N$ będzie lokalnym homeomorfizmem. Jeśli przestrzeń M jest spójna i istnieje odwzorowanie ciągłe $h\colon N \to M$ spełniające $f(h(z)) = z$ w N, to f jest homeomorfizmem.*

Dowód. Zachodzi równość

$$h(N) = \{x \in M\colon h(f(x)) = x\}. \tag{5}$$

Istotnie, weźmy dowolny punkt $x_0 \in h(N)$. Wtedy istnieje $z_0 \in N$ takie, że $h(z_0) = x_0$. Stąd i z założenia $f(x_0) = f(h(z_0)) = z_0$. Zatem $h(f(x_0)) = x_0$, czyli pokazaliśmy, że $h(N) \subset \{x \in M\colon h(f(x)) = x\}$. Weźmy teraz dowolny punkt $x_0 \in \{x \in M\colon h(f(x)) = x\}$, a więc spełniający równość $h(f(x_0)) = x_0$. Ponieważ f odwzorowuje M w N, więc oznaczając $z_0 = f(x_0)$ mamy $z_0 \in N$ oraz $x_0 = h(f(x_0)) = h(z_0)$. Reasumując zachodzi (5).

Pokażemy teraz, że $h(N) = M$. Z równości (5) i własności 1.7 wynika, że zbiór $h(N)$ jest domknięty. Zbiór $h(N)$ jest również otwarty. Istotnie, weźmy dowolny $a \in h(N)$. Obcięcie f_U do pewnego otoczenia U punktu a jest homeomorfizmem na otoczenie $f(U)$ punktu $c = f(a)$. Ponieważ $h(c) = h(f(a)) = a = f_U^{-1}(c)$, więc na mocy własności 2.1 $h = f_U^{-1}$ w pewnym otoczeniu $V \subset f(U)$ punktu c. Wówczas $h(V) = f_U^{-1}(V)$ jest otoczeniem punktu a, zawartym w $h(N)$. Stąd zbiór $h(N)$ jest otwarty. Zbiór $h(N)$ jako niepusty, otwarty i domknięty podzbiór przestrzeni spójnej M, pokrywa się z M, czyli h jest surjekcją.

Wykażemy teraz, że odwzorowanie f jest różnowartościowe. Istotnie, niech $f(x_1) = f(x_2)$, gdzie x_1, $x_2 \in M$. W myśl powyższego istnieją punkty z_1, $z_2 \in N$ takie, że $h(z_1) = x_1$ oraz $h(z_2) = x_2$. Korzystając z założenia dostajemy, że $f(x_1) = f(h(z_1)) = z_1$ oraz $f(x_2) = f(h(z_2)) = z_2$. Zatem $x_1 = h(z_1) = h(z_2) = x_2$. Stąd odwzorowanie f jest różnowartościowe.

Z powyższego i własności 1.8 odwzorowanie $f\colon M \to N$ jest homeomorfizmem. To kończy dowód. $\square$

Odwzorowanie $f\colon M \to N$ nazywamy *nakryciem*, gdy każdy punkt przestrzeni N posiada otoczenie V, dla którego $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i otwartych, rozłącznych i takich, że odwzorowania $f_{U_i}\colon U_i \to V$ są homeomorfizmami.

Z powyższej defnicji wynika łatwo

Własność 2.3. *Nakrycie $f\colon M \to N$ jest surjekcją.*

Istotnie, niech $f\colon M \to N$ będzie nakryciem. Przypuśćmy przeciwnie, że zbiór $N \setminus f(M)$ jest niepusty. Weźmy dowolny punkt $z \in N \setminus f(M)$. W myśl definicji nakrycia isnieje otoczenie V punktu z oraz rozłączne zbiory otwarte U_i takie, że $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i oraz odwzorowania $f_{U_i}\colon U_i \to V$ są homeomorfizmami na V. Zatem istnieje $x \in U_i$ taki, że $f_{U_i}(x) = z$. To daje sprzeczność z tym, że $z \notin f(M)$. □

Własność 2.4. *Nakrycie $f\colon M \to N$ jest lokalnym homeomorfizmem.*

Istotnie, weźmy dowolny punkt $a \in M$ i niech $f(a) = b$. Z definicji nakrycia isnieje otoczenie V punktu b oraz rozłączne zbiory otwarte U_i takie, że $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i oraz odwzorowania $f_{U_i}\colon U_i \to V$ są homeomorfizmami na V. Wówczas $a \in U_l$ dla pewnego l, $f(U_l) = V$ jest zbiorem otwartym i $f_{U_l}\colon U_l \to f(U_l)$ jest homeomorfizmem. □

Niech odwzorowanie $f\colon M \to N$ będzie nakryciem. Wówczas dla dowolnego punktu $c \in N$ liczbę $\#f^{-1}(c)$ nazywamy *krotnością nakrycia f w punkcie c*. Mówimy, że nakrycie $f\colon M \to N$ jest *skończone*, gdy jego krotność w dowolnym punkcie przestrzeni N jest skończona.

Prawdziwe są własności

Własność 2.5. *Krotność nakrycia $f\colon M \to N$ jest lokalnie stała.*

Istotnie, w myśl definicji nakrycia dla dowolnego punktu $c \in N$ istnieje otoczenie V oraz rozłączne zbiory otwarte U_i takie, że $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i oraz odwzorowania $f_{U_i}\colon U_i \to V$ są homeomorfizmami. Wówczas $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(c)$ dla $z \in V$. □

Z powyższego dostajemy łatwo

Własność 2.6. *Jeżeli przestrzeń N jest spójna, to krotność nakrycia $f\colon M \to N$ jest stała.*

Przypuśćmy przeciwnie, że krotność nakrycia f nie jest stała. Niech $W_1 = \{z \in N : \#f^{-1}(z) = 1\}$, $W_2 = \{z \in N : \#f^{-1}(z) = 2\}, \ldots, W_\infty = \{z \in N : \#f^{-1}(z) = \infty\}$. Zbiory $W_1, \ldots, W_\infty$ na mocy własności 2.5 są otwarte. Istnieją k i l, $k < l$ takie, że zbiory W_k i W_l są niepuste. Wówczas $W_1 \cup \cdots \cup W_k$ i $W_{k+1} \cup \cdots \cup W_\infty$ są niepustymi zbiorami otwartymi. Ponadto powyższe zbiory są rozłączne i ich suma równa jest N. To przeczy spójności przestrzeni N. □

Jeżeli krotność nakrycia $f\colon M \to N$ jest stała w N, to jej wartość p nazywamy *krotnością nakrycia f* i mówimy, że nakrycie jest *p-krotne*. Nakrycie nazywamy *jednokrotnym*, gdy jest 1-krotne.

Podamy przykład nakrycia ∞-krotnego

Przykład 1. Funkcja $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ jest ∞-krotnym nakryciem.

Istotnie, weźmy $a \in \mathbb{C}^\times$ i $b \in \mathbb{C}$ takie, że $\exp(b) = a$. Ponieważ funkcja exp jest lokalnym homeomorfizmem, więc istnieją otoczenia U_0 i V odpowiednio punktów b i a takie, że $\exp_{U_0} \colon U_0 \to V$ jest homeomorfizmem. Wówczas

$$\exp^{-1}(V) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k, \quad \text{gdzie } U_k = 2k\pi i + U_0.$$

Weźmy dowolny punkt $z \in \exp^{-1}(V)$. Wtedy $\exp(z) = y \in V$ i istnieje $z_0 \in U_0$ takie, że $\exp(z_0) = y$. Stąd $z = z_0 + 2k\pi i \in U_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. Odwrotnie, jeśli $z \in U_k$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$, to istnieje $z_0 \in U_0$ takie, że $z = z_0 + 2k\pi i$. Zatem $\exp(z) =\exp(z_0) \in V$, czyli $z \in \exp^{-1}(V)$.

Łatwo zauważyć, że zbiory U_k są rozłączne dla $k \in \mathbb{Z}$. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie, że istnieje $z \in U_k \cap U_l$, gdzie $k \neq l$. Wówczas istnieją $z_k, z_l \in U_0$ takie, że $z = z_k + 2k\pi i = z_l + 2l\pi i$. Zatem $\exp(z_k) =\exp(z_l)$. Stąd $z_k = z_l$, a więc $k = l$, co daje sprzeczność.

Ponadto odwzorowanie $\exp_{U_k} \colon U_k \to V$ jest homeomorfizmem dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. Wystarczy pokazać, że $\exp_{U_k}$ jest różnowartościowy dla każdego $k \in \mathbb{Z}$. Istotnie, ustalmy dowolne $k \in \mathbb{Z}$ i weźmy $y, z \in U_k$ takie, że $\exp_{U_k}(y) = \exp_{U_k}(z)$. Wówczas istnieją $y_k, z_k \in U_0$ takie, że $y = y_k+2k\pi i$ i $z = z_k+2k\pi i$. Zatem $\exp(y_k) = \exp(y_k+2k\pi i) = \exp(y) = \exp(z) = \exp(z_k + 2k\pi i) = \exp(z_k)$. Stąd i z różnowartościowości $\exp_{U_0}$ otrzymujemy różnowartościowość funkcji $\exp_{U_k}$. □

Zachodzi własność

Własność 2.7. *Każde nakrycie jednokrotne jest homeomorfizmem.*

Istotnie, jeśli $f \colon M \to N$ jest nakryciem jednokrotnym, to jest surjekcją oraz odwzorowaniem różnowartościowym. Z własności 2.4 i 1.8 wynika, że odwzorowanie $f \colon M \to N$ jest homeomorfizmem. □

Ponadto, łatwo pokazać

Własność 2.8. *Złożenie nakrycia z homeomorfizmem (w dowolnym porządku) jest nakryciem.*

Istotnie, niech $f \colon M \to N$ będzie nakryciem oraz niech $\varphi \colon N \to P$ będzie homeomorfizmem. Złożenie $\varphi \circ f$ odwzorowuje M na P. Weźmy dowolny punkt $z \in P$. Wówczas, z definicji nakrycia punkt $\varphi^{-1}(z)$ posiada otoczenie V, dla którego $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i otwartych, rozłącznych i takich, że odwzorowania $f_{U_i} \colon U_i \to V$ są homeomorfizmami. Stąd punkt z posiada otoczenie $W = \varphi(V)$, dla którego $(\varphi \circ f)^{-1}(W)$ jest sumą zbiorów U_i otwartych, rozłącznych i takich, że odwzorowania $(\varphi \circ f)_{U_i} \colon U_i \to W$ są homeomorfizmami.

Niech teraz $f \colon M \to N$ będzie nakryciem oraz niech $\varphi \colon R \to M$ będzie homeomorfizmem. Złożenie $f \circ \varphi$ odwzorowuje R na N. Weźmy dowolny punkt $z \in N$. Wówczas, z definicji nakrycia punkt z posiada otoczenie V, dla którego $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i otwartych, rozłącznych i takich, że odwzorowania $f_{U_i} \colon U_i \to V$

są homeomorfizmami. Stąd punkt z posiada otoczenie V, dla którego $(f \circ \varphi)^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów $A_i = \varphi^{-1}(U_i)$ otwartych, rozłącznych i takich, że odwzorowania $(f \circ \varphi)_{U_i} \colon A_i \to V$ są homeomorfizmami. $\square$

Niech dalej przestrzenie M i N będą lokalnie zwarte.

Odwzorowanie ciągłe $f \colon M \to N$ nazywamy *właściwym*, gdy dla dowolnego zbioru K zwartego w N przeciwobraz $f^{-1}(K)$ jest zwarty w M.

Uwaga 1. Z przykładu 1 wynika, że nakrycie nie musi być odwzorowaniem właściwym. Funkcja $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{\times}$ jest nakryciem, natomiast nie jest odwzorowaniem właściwym.

Twierdzenie 2.1. *Niech odwzorowanie $f \colon M \to N$ będzie surjekcją. Następujące warunki są równoważne:*

(a) f jest nakryciem skończonym,

(b) f jest lokalnym homeomorfizmem i odwzorowaniem właściwym.

Dowód. $(a) \Rightarrow (b)$. Załóżmy najpierw, że f jest nakryciem skończonym. Zatem dla dowolnego punktu $c \in N$ istnieje otoczenie W_c punktu c oraz zbiory otwarte i rozłączne $\Omega_1, \ldots, \Omega_{s_c}$ takie, że $f^{-1}(W_c) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{s_c}$ i $f_{\Omega_i} \colon \Omega_i \to W_c$ jest homeomorfizmem dla $i = 1, \ldots, s_c$. Wówczas, z lokalnej zwartości przestrzeni N, na mocy własności 1.5, istnieje otoczenie $U_c \subset W_c$ punktu c w topologii N takie, że $V_c = \overline{U_c} \subset W_c$ jest zbiorem zwartym oraz $f^{-1}(V_c) = B_1 \cup \cdots \cup B_{s_c}$, gdzie $B_1, \ldots, B_{s_c}$ są homeomorficzne z V_c. Na mocy własności 1.6 zbiory $B_1, \ldots, B_{s_c}$ są zwarte. W ten sposób otrzymujemy, że dowolny punkt przestrzeni N posiada otoczenie o przeciwobrazie zwartym. Niech $K \subset N$ będzie zbiorem zwartym. Wówczas rodzina $\{U_c\}_{c \in K}$ jest pokryciem otwartym zbioru K. Możemy z niego wybrać podpokrycie skończone $\{U_{c_1}, \ldots, U_{c_n}\}$ zbioru K. Zatem zbiory $V_{c_1}, \ldots, V_{c_n}$ także stanowią pokrycie zbioru K. Stąd i z powyższego dostajemy, że $f^{-1}(K)$ jest zbiorem zwartym. Zatem odwzorowanie f jest właściwe i oczywiście jest lokalnym homeomorfizmem.
$(b) \Rightarrow (a)$. Załóżmy teraz, że f jest lokalnym homeomorfizmem i odwzorowaniem właściwym. Weźmy punkt $c \in N$. Wtedy zbiór $f^{-1}(c)$ jest zwarty (ponieważ zbiór jednoelmentowy $\{c\}$ jest zwarty) oraz izolowany[4]. Zatem, z własności 1.1, zbiór ten jest skończony. Niech $f^{-1}(c) = \{a_1, \ldots, a_r\}$. Weźmy otoczenia rozłączne $U_1, \ldots, U_r$ punktów $a_1, \ldots, a_r$ takie, że f_{U_i} jest homeomorfizmem na $f(U_i)$, zaś $f(U_i)$ otoczeniem punktu c, $i = 1, \ldots, r$. Weźmy otoczenie zwarte V^* punktu c (otoczenie takie istnieje, gdyż N jest lokalnie zwarta). Wówczas na mocy własności 1.3, 1.4 oraz 1.6 zbiór $T = f(f^{-1}(V^*) \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r))$ jest zwarty i nie zawiera punktu c. W myśl własności 1.2 istnieje otoczenie V punktu c, rozłączne z T i takie, że $V \subset V^* \cap \bigcap f(U_i)$. Wtedy $f^{-1}(V) \subset U_1 \cup \cdots \cup U_r$. Istotnie, gdyby istniał $x \in f^{-1}(V) \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r)$,

[4]Niech $a \in f^{-1}(c)$. Odwzorowanie f_{U_a} jest różnowartościowe dla pewnego otoczenia U_a punktu a. Zatem $U_a \cap f^{-1}(c) = \{a\}$.

to $f(x) \in f(f^{-1}(V) \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r)) \subset f(f^{-1}(V^*) \setminus (U_1 \cup \cdots \cup U_r)) = T$ i $f(x) \in V$. Zatem $f(x) \in T \cap V$, co jest sprzeczne z określeniem zbioru V. Mamy więc $f^{-1}(V) = U_1' \cup \cdots \cup U_r'$, gdzie $U_i' = U_i \cap f^{-1}(V)$, $i = 1, \ldots, r$, są otwarte (jako iloczyn dwóch zbiorów otwartych), rozłączne oraz odwzorowania $f_{U_i'} \colon U_i' \to f(U_i') = f(U_i \cap f^{-1}(V)) = f(U_i) \cap V = V$ są homeomorfizmami. Zatem odwzorowanie f jest nakryciem skończonym.

To kończy dowód. $\square$

Uwaga 2. Lokalny homeomorfizm i właściwość odwzorowania nie implikuje surjektywności tego odwzorowania. Istotnie, weźmy koło jednostkowe $K \subset \mathbb{C}$ o środku w 0 i funkcję f określoną wzorem $f(z) = z$ dla $z \in K$. Połóżmy $K_3 = \{z \in \mathbb{C} : \| z - 3 \| < 1\}$. Niech $f \colon K \to K \cup K_3$. Wówczas funkcja f jest lokalnym homeomorfizmem oraz odwzorowaniem właściwym, ale nie jest surjekcją (a zatem nie jest nakryciem).

Zarówno w [Ło], Prop. B.3.1, jak i w [Fo], Tw. 1.4.22, nie występuje założenie o surjektywności odwzorowania.

Udowodnimy lemat

Lemat 2.2. *Niech $H \subset \mathbb{R}^n$, $H \neq \mathbb{R}^n$, będzie zbiorem otwartym. Jeśli $[0, b] \subset H$, to istnieje zbiór otwarty wypukły W taki, że $[0, b] \subset W \subset H$.*

Dowód. Niech δ będzie połową odległości między zbiorami $[0, b]$ i $N \setminus H$.

Wtedy $\delta > 0$. Istotnie, gdyby $\delta = 0$, to w myśl definicji odległości istniałyby ciągi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, b]$ i $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \setminus H$ takie, że

$$\lim_{n\to\infty} (p_n - q_n) = 0. \tag{6}$$

Ponieważ $[0, b]$ jest zbiorem zwartym, więc z ciągu $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg zbieżny $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n_k} = p \in [0, b]$. Stąd, z (6) i z domkniętości zbioru $\mathbb{R}^n \setminus H$ mamy, że $\lim\limits_{n\to\infty} q_{n_k} = p$ i $p \in \mathbb{R}^n \setminus H$. To daje sprzeczność.

Niech W będzie δ-pokryciem odcinka $[0, b]$. Oczywiście W jest zbiorem otwartym i $W \subset H$. Zauważmy, że W jest zbiorem wypukłym. Istotnie, niech $c, d \in W$. Wówczas istnieją punkty $c', d' \in [0, b]$ takie, że $\| c - c' \| < \delta$ i $\| d - d' \| < \delta$. Wtedy dla każdego $t \in [0, 1]$

$$c't + (1 - t)d' \in [0, b]$$

oraz

$$\begin{aligned}
&\| ct + (1 - t)d - c' - (1 - t)d' \| = \\
&\| (c - c')t + (1 - t)(d - d') \| \leqslant \\
&\| c - c' \| t + \| d - d' \| (1 - t) < \delta.
\end{aligned}$$

Zatem $[c, d] \subset W$. $\square$

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli $M \neq \emptyset$ jest spójna, N zaś homeomorficzna z $\mathbb{R}^n$, to każde nakrycie $f\colon M \to N$ jest jednokrotne, czyli jest homeomorfizmem.*

Dowód. Na mocy własności 2.8 można przyjąć, że $N = \mathbb{R}^n$. Według lematu 2.1 wystarczy wykazać istnienie odwzorowania ciągłego $h\colon N \to M$ takiego, że $f(h(z)) = z$ dla $z \in N$. Z własności 2.3 mamy, że istnieje $a \in M$ takie, że $f(a) = 0$. Niech $\mathcal{T}$ będzie rodziną wszystkich odwzorowań g o dziedzinach otwartych w N i gwiaździstych względem 0, o wartościach w M, ciągłych, spełniających warunki: $f(g(x)) = x$ w dziedzinie odwzorowania g oraz $g(0) = a$. Rodzina $\mathcal{T}$ jest niepusta, gdyż zawiera f_U^{-1} przy odpowiednio dobranym otoczeniu U punktu a. Z własności 2.2 wynika, że dwa dowolne odwzorowania z $\mathcal{T}$ są równe w przecięciu ich dziedzin, ponieważ jest ono spójne i zawiera 0. Zatem $h = \bigcup\{g\colon g \in \mathcal{T}\}$, gdzie g traktujemy jako wykres odwzorowania, jest odwzorowaniem i należy do $\mathcal{T}$. Niech H będzie dziedziną odwzorowania h (H jest otwarty jako suma zbiorów otwartych). Pokażemy, że $H = N$. Przypuśćmy przeciwnie, że $H \subset N$, $H \neq N$. Wówczas istnieje $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ takie, że półprosta $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto \alpha t \in \mathbb{R}^n$ nie leży całkowicie w H. Niech $t_0 = sup\{t \in \mathbb{R}_+ : [0, \alpha t] \subset H\}$. Połóżmy $c = \alpha t_0$. Oczywiście $[0, c) \subset H$. Ponadto $c \notin H$. Istotnie, w przeciwnym razie z otwartości i gwiaździstości H istniałoby $t_1 > t_0$ takie, że $[0, \alpha t_1] \subset H$, co przeczy określeniu t_0. Weźmy otoczenie wypukłe V punktu c, dla którego $f^{-1}(V)$ jest sumą zbiorów U_i otwartych, rozłącznych i takich, że $f_{U_i}\colon U_i \to V$ są homeomorfizmami. Weźmy $b \in [0, c) \cap V$. W myśl lematu 2.2 istnieje zbiór otwarty wypukły W taki, że $[0, b] \subset W \subset H$.

Z powyższego mamy $h(b) \in U_l$ dla pewnego l, więc $h(b) = \bar{h}(b)$ gdzie $\bar{h} = f_{U_l}^{-1}$, przy czym $f(\bar{h}(z)) = z$ w V. Zatem $h = \bar{h}$ w $W \cap V$, więc $h_W \cup \bar{h}$ jest odwzorowaniem ciągłym w zbiorze $W \cup V$, zawierającym $[0, c]$ i jego obcięcie do zbioru otwartego wypukłego W_0 takiego, że $[0, c] \subset W_0 \subset W \cup V$, należy do $\mathcal{T}$. Zatem $W_0 \subset H$, skąd $c \in H$. To daje, że $H = \mathbb{R}^n$ i kończy dowód. □

3 Twierdzenie Hadamarda

Zaczniemy od definicji.

Odwzorowanie holomorficzne $f\colon G \to D$ nazywamy *biholomorfizmem*, gdy jest odwzorowaniem różnowartościowym i $f(G) = D$, gdzie $G, D \subset \mathbb{C}^n$ są zbiorami otwartymi.

W rozdziale tym udowodnimy twierdzenie Hadamarda najpierw w przestrzeni zespolonej.

Twierdzenie 3.1. (Hadamard) *Odwzorowanie holomorficzne $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jest biholomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jakobian $J_f(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \mathbb{C}^n$ i odwzorowanie f jest właściwe.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że odwzorowanie f jest biholomorfizmem. Wówczas na mocy własności 1.12 mamy, że $J_f(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \mathbb{C}^n$. Ponadto, z własności 1.13 dostajemy, że odwzorowanie $f^{-1}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jest holomorficzne, a więc jest ciągłe. Zatem, na podstawie własności 1.6, f^{-1} odwzorowuje zbiory zwarte na zbiory zwarte, czyli odwzorowanie f jest właściwe.

Załóżmy teraz, że $J_f(z) \neq 0$ dla każdego $z \in \mathbb{C}^n$ i odwzorowanie f jest właściwe. Z własności 1.11 otrzymujemy, że dla każdego $z \in \mathbb{C}^n$ isnieje otoczenie U_z takie, że $f(U_z)$ jest zbiorem otwartym, odwzorowanie $f_{U_z} : U_z \to f(U_z)$ jest wzajemnie jednoznaczne i odwzorowanie odwrotne $f_{U_z}^{-1} : f(U_z) \to U_z$ jest holomorficzne. Zatem odwzorowanie $f_{U_z} : U_z \to f(U_z)$ jest homeomorfizmem, czyli odwzorowanie f jest lokalnym homeomorfizmem. Stąd i z właściwości odwzorowania f, na podstawie twierdzenia 2.1, mamy, że odwzorownie f jest nakryciem skończonym. Z kolei, z twierdzenia 2.2, ponieważ przestrzeń $\mathbb{C}^n$ jest spójna oraz homeomorficzna z przestrzenią $\mathbb{R}^{2n}$, więc nakrycie $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jest jednokrotne. W konsekwencji odwzorowanie f jest biholomorfizmem.

To kończy dowód. □

Twierdzenie Hadamarda w wersji rzeczywistej formułujemy następująco:

Twierdzenie 3.2. (Hadamard) *Odwzorowanie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ klasy C^1 jest dyfeomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jakobian $J_f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i odwzorowanie f jest właściwe.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że odwzorowanie f jest dyfeomorfizmem. Wówczas $J_f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Istotnie, z twierdzenia o superpozycji odwzorowań, dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mamy

$$J_{f^{-1}\circ f}(x_0) = J_{f^{-1}}(f(x_0)) \cdot J_f(x_0).$$

Z drugiej strony $f^{-1} \circ f = id_{\mathbb{R}^n}$. Stąd $J_{f^{-1}\circ f}(x_0) = 1$. Zatem $J_{f^{-1}}(f(x_0)) \cdot J_f(x_0) = 1$, czyli $J_f(x_0) \neq 0$. Ponadto, odwzorowanie odwrotne f^{-1}, będąc ciągłym, na podstawie własności 1.6, odwzorowuje zbiory zwarte na zbiory zwarte. To daje, że odwzorowanie f jest właściwe.

Załóżmy teraz, że $J_f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ i odwzorowanie f jest właściwe. Ponieważ $J_f(x) \neq 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, więc z twierdzenia o lokalnym odwracaniu odwzorowania (własność 1.9), dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$ isnieje otoczenie U_x takie, że $f(U_x)$ jest zbiorem otwartym oraz $f_{U_x} : U_x \to f(U_x)$ jest różnowartościowe, a zatem odwracalne. Stąd i z własności 1.10 mamy, że $f_{U_x}^{-1}$ jest klasy C^1 dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$. Zatem odwzorowanie $f_{U_x} : U_x \to f(U_x)$ jest dyfeomorfizmem dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$, czyli odwzorowanie f jest lokalnym dyfeomorfizmem. Ponieważ każdy dyfeomorfizm jest homeomorfizmem, więc z powyższego otrzymujemy, że odwzorowanie f jest lokalnym homeomorfizmem. Stąd i z właściwości odwzorowania f na podstawie twierdzenia 2.1 wnosimy, że jest ono nakryciem skończonym. Ponieważ przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest spójna, więc według twierdzenia 2.2 każde nakrycie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest jednokrotne. Odwzorowanie f jest różnowartościowe, klasy C^1 i takie, że $J_f \neq 0$, czyli, na podstawie własności 1.10, f^{-1} jest klasy C^1.

To daje tezę i kończy dowód. □

4 Uwagi końcowe

Przyjmujemy oznaczenie $\mathbb{K} = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Odwzorowanie wielomianowe $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ nazywamy *kellerowskim*, gdy jakobian tego odwzorowania jest różny od zera w każdym punkcie $x \in \mathbb{K}^n$.

Z twierdzeń 3.1 i 3.2 dostajemy twierdzenie związane z hipotezą jakobianową Kellera z 1939 roku, do dzisiaj nie rozwiązaną.

Twierdzenie 4.1. *Niech $F\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ będzie odwzorowaniem kellerowskim. Nastepujące warunki są równoważne:*

(a) odwzorowanie F jest odwracalne,

(b) odwzorowanie F jest właściwe.

Literatura

[Bi] A. Birkholc, *Analiza matemtyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2002.

[Ch2] J. Chądzyński, *Wstęp do analizy zespolonej, część II. Funkcje holomorficzne wielu zmiennych*, Wyd. UŁ, Łódź 2008.

[Dr] L. M. Drużkowski, *Analiza matematyczna: podstawy*, Wyd. UJ, Kraków 1998.

[En] R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 1976.

[Fo] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer-Verlag, New York 1981.

[Go] W. B. Gordon, *On the Diffeomorphisms of Euclidean Space*, The American Mathematical Monthly, Vol. 79, No.7 (Aug. - Sep., 1972), pp. 755-759

[Ha] J. Hadamard, *Sur les transformations ponctuelles*, Bulletin de la S. M. F., 34 (1906), p. 71-84.

[Ku] K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1977.

[Ło] R. Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej zespolonej*, PWN, Warszawa 1988.

The Hadamard theorem on invertibility of mappings

Summary. In this article we present a proof of the Hadamard theorem on inverse mapping based on elementary topological methods.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2011 r.