Rozmaitości z nieoczekiwanymi własnościami

Tomasz Szemberg
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

XXXIX Conference and Workshop
on analytic and algebraic geometry
Łódź, 9 stycznia 2018

Informacja o powstającej wspólnej pracy z:

- *Thomasem Bauerem (Marburg);*
- *Grzegorzem Malarą (IM UP);*
- *Justyną Szpond (IM UP).*

Problem (Przewodni)

Obliczenie wymiaru systemu liniowego dywizorów na rozmaitości.

Problem (Przewodni)

Obliczenie wymiaru systemu liniowego dywizorów na rozmaitości.

System może mieć wymiar ***oczekiwany*** *lub* ***nieoczekiwany****.*

Problem (Przewodni)

Obliczenie wymiaru systemu liniowego dywizorów na rozmaitości.

System może mieć wymiar ***oczekiwany*** *lub* ***nieoczekiwany****.*

System z wymiarem nieoczekiwanym nazywamy ***specjalnym****.*

Hipote Segre-Harbourne-Gimigliano-Hirschowitz

Hipoteza (SHGH)

Niech $Z = m_1P_1 + \ldots + m_sP_s$ *będzie schematem ogólnych (generycznych) tłustych punktów na* $\mathbb{P}^2$ *i niech* $f : X \to \mathbb{P}^2$ *będzie rozdmuchaniem w nośniku* Z *z dywizorami wyróżnionymi* $E_1, \ldots, E_s$*. System liniowy*

$$dH - m_1E_1 - \ldots - m_sE_s$$

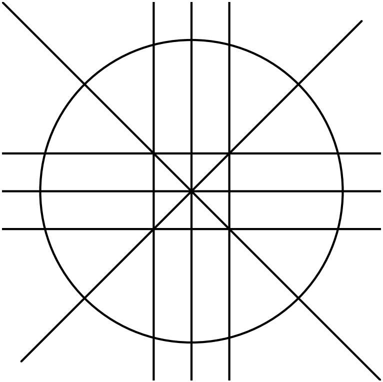
jest specjalny wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera niezredukowaną składową bazową, która jest (-1)*-krzywą.*

New phenomena

Line arrangements and configurations of points with an unusual geometric propery,
arXiv:1602.02300

- *David Cook II (Google);*
- *Brian Harbourne (Lincoln);*
- *Juan Migliore (Notre Dame);*
- *Uwe Nagel (Kentucky).*

Konfiguracja B3



Rysunek: $f = xyz(x+y)(x-y)(x+z)(x-z)(y+z)(y-z)$

9 punktów

Twierdzenie

Następujące 9 punktów

$$\begin{array}{lll} P_1 = (1:0:0), & P_2 = (0:1:0), & P_3 = (0:0:1), \\ P_4 = (1:1:0), & P_5 = (1:-1:0), & P_6 = (1:0:1), \\ P_7 = (1:0:-1), & P_8 = (0:1:1), & P_9 = (0:1:-1). \end{array}$$

zadaje niezależne warunki na krzywe stopnia 4.

Nieoczekiwana własność

Twierdzenie

Dla dowolnego punktu $R = (a : b : c)$ istnieje krzywa Q_R stopnia 4 *znikająca w 9 punktach i mająca w R punkt krotności* 3*. Ta krzywa jest **nieoczekiwana**.*

Nieoczekiwana własność

Twierdzenie

*Dla dowolnego punktu $R = (a : b : c)$ istnieje krzywa Q_R stopnia 4 znikająca w 9 punktach i mająca w R punkt krotności 3. Ta krzywa jest **nieoczekiwana**.*

$$Q_R(x : y : z) =$$
$$3a(b^2 - c^2) \cdot x^2yz + 3b(c^2 - a^2) \cdot xy^2z + 3c(a^2 - b^2) \cdot xyz^2$$
$$+a^3 \cdot y^3z - a^3 \cdot yz^3 + b^3 \cdot xz^3 - b^3 \cdot x^3z + c^3 \cdot x^3y - c^3 \cdot xy^3.$$

Nieoczekiwana własność II

Twierdzenie

Krzywa Q_R z punktu widzenia płaszczyzny $(a:b:c)$

$$Q_S(a:b:c) =$$

$$yz(y^2-z^2)\cdot a^3 + xz(z^2-x^2)\cdot b^3 + xy(x^2-y^2)\cdot c^3 + 3x^2yz\cdot ab^2$$

$$-3xy^2z\cdot a^2b + 3xyz^2\cdot a^2c - 3x^2yz\cdot ac^2 + 3xy^2z\cdot bc^2 - 3xyz^2\cdot b^2c$$

ma w punkcie $S=(x:y:z)$ punkt potrójny (czyli jest sumą trzech prostych).

Konfiguracja typu Fermata

Niech F będzie ideałem typu Fermata w $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ generowanym przez

$$x^3 - y^3,\ y^3 - z^3,\ z^3 - w^3.$$

Konfiguracja typu Fermata

Niech F będzie ideałem typu Fermata w $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ generowanym przez

$$x^3 - y^3,\ y^3 - z^3,\ z^3 - w^3.$$

Jego zbiór miejsc zerowych Z składa się z 27 punktów

$$P_{(\alpha,\beta,\gamma)} = (1 : \varepsilon^\alpha : \varepsilon^\beta : \varepsilon^\gamma)$$

gdzie ε jest prymitywnym pierwiastkiem z 1 stopnia 3 oraz $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant 3$.

Konfiguracja typu Fermata

Niech F będzie ideałem typu Fermata w $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ generowanym przez

$$x^3 - y^3,\ y^3 - z^3,\ z^3 - w^3.$$

Jego zbiór miejsc zerowych Z składa się z 27 punktów

$$P_{(\alpha,\beta,\gamma)} = (1 : \varepsilon^\alpha : \varepsilon^\beta : \varepsilon^\gamma)$$

gdzie ε jest prymitywnym pierwiastkiem z 1 stopnia 3 oraz $1 \leqslant \alpha, \beta, \gamma \leqslant 3$.
Niech I będzie ideałem zbioru W, który jest sumą Z i 4 punktów fundamentalnych, tzn.

$$I = F \cap (x, y, z) \cap (x, y, w) \cap (x, z, w) \cap (y, z, w).$$

31 punktów

Twierdzenie

Ideał I jest generowany przez 8 dwumianów stopnia 4

$$x(y^3 - z^3),\ x(z^3 - w^3),\ y(x^3 - z^3),\ y(z^3 - w^3),$$

$$z(x^3 - y^3),\ z(y^3 - w^3),\ w(x^3 - y^3),\ w(y^3 - z^3).$$

31 punktów

Twierdzenie

Ideał I jest generowany przez 8 dwumianów stopnia 4

$$x(y^3-z^3),\ x(z^3-w^3),\ y(x^3-z^3),\ y(z^3-w^3),$$

$$z(x^3-y^3),\ z(y^3-w^3),\ w(x^3-y^3),\ w(y^3-z^3).$$

W szczególności system liniowy powierzchni stopnia 4 przechodzących przez 31 punktów w zbiorze W ma wymiar 8.

Nieoczekiwana własność

Twierdzenie

Niech $R = (a : b : c : d)$ *będzie dowolnym punktem w* $\mathbb{P}^3$. *Istnieje powierzchnia* Q_R *stopnia* 4 *przechodząca przez* W *i mająca w* R *punkt krotności* 3. *Ponadto* Q_R *ma 4 dodatkowe punkty podwójne w punktach*

$$R_1 = (-2a : b : c : d),\ R_2 = (a : -2b : c : d),$$

$$R_3 = (a : b : -2c : d),\ R_4 = (a : b : c : -2d).$$

Równanie kwartyki

$$Q_R(x:y:z:w) =$$
$$b^2(c^3-d^3)\cdot x^3y + a^2(d^3-c^3)\cdot xy^3 + c^2(d^3-b^3)\cdot x^3z$$
$$+c^2(a^3-d^3)\cdot y^3z + a^2(b^3-d^3)\cdot xz^3 + b^2(d^3-a^3)\cdot yz^3$$
$$+d^2(b^3-c^3)\cdot x^3w + d^2(c^3-a^3)\cdot y^3w + d^2(a^3-b^3)\cdot z^3w$$
$$+a^2(c^3-b^3)\cdot xw^3 + b^2(a^3-c^3)\cdot yw^3 + c^2(b^3-a^3)\cdot zw^3.$$

Jeszcze bardziej nieoczekiwana własność

Twierdzenie

Istnieje 19 *punktów w* $\mathbb{P}^3$*, które zadają niezależne warunki na powierzchnie stopnia* 5 *i takich, że dla dowolnych punktów* $R_1 = (a : b : c : d)$ *oraz* $R_2 = (e : f : g : h)$ *istnieje powierzchnia stopnia* 5 *przechodząca przez te* 19 *punktów i mająca w* R_1 *oraz* R_2 *punkty krotności* 4*.*

Perspektywy

Problem

Odkryte specjalne konfiguracje mogą być wierzchołkiem góry lodowej. Znaleźć kolejne!

Perspektywy

Problem

Odkryte specjalne konfiguracje mogą być wierzchołkiem góry lodowej. Znaleźć kolejne!

Problem

Zrozumieć mechanizmy tworzenia takich przykładów i ich wpływ na Przewodni Problem.