MATERIAŁY XVIII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

1997 **Łódź** **str. 71**

ZANURZENIA WYŻSZEGO RZĘDU

T. Szemberg (Kraków)

0 Wstęp

Jednym z fundamentalnych problemów w geometrii algebraicznej jest badanie morfizmów z rozmaitości algebraicznych w przestrzenie rzutowe. Szczególnie interesującym przypadkiem morfizmów są zanurzenia. Głównym celem tej pracy jest prezentacja dwóch sposobów uogólnienia klasycznego pojęcia zanurzenia. Obie wersje zanurzeń wyższego rzędu pojawiły się w literaturze pod koniec lat 80–tych w pracach Beltramettiego, Francii i Sommese [8], [9] i znalazły szybko stałe miejsce w słowniku współczesnej geometrii algebraicznej. W ostatnim czasie zanurzenia wyższego rzędu znalazły zastosowanie przy badaniu stałych Seshadriego wiązek liniowych. Stałe te mierzą w szczególności lokalne własności wiązek liniowych i są intensywnie studiowane z użyciem zarówno analitycznych [14] jak i algebraicznych metod [25].

W początkowej części pracy wprowadzamy definicje oraz prezentujemy podstawowe własności zanurzeń wyższego rzędu. W drugiej części pracy prezentujemy aktualne wyniki i problemy w nadziei, że zainteresowany Czytelnik sięgnie do oryginalnych prac po bardziej szczegółowe opisy interesujących go zagadnień.

Mniej zaawansowanemu Czytelnikowi chcącemu zapoznać się z teorią wiązek liniowych na rozmaitościach rzutowych oraz zagadnieniami prowadzącymi do rozważania zanurzeń wyższego rzędu polecamy książkę [11]

1991 *Mathematics Subject Classification:* 14C20.

Praca wykonana w ramach grantu KBN nr 2 P03A 061 08.
Autor jest stypendystą Fundacji Nauki Polskiej.

1 Definicje i podstawowe własności

Niech X będzie gładką rozmaitością algebraiczną i niech L będzie wiązką liniową na X.

Definicja 1.1 *Mówimy, że wiązka L jest globalnie generowana, jeśli dla każdego punktu $x \in X$ odwzorowanie brania wartości sekcji globalnej w punkcie*

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_x) \cong H^0(\mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x)$$

jest surjekcją.

Uwaga 1.2 *Surjektywność w powyższej definicji jest równoważna stwierdzeniu, że dla każdego punktu $x \in X$ istnieje taka sekcja $s \in H^0(L)$, że $s(x) \neq 0$. Geometrycznie oznacza to, że istnieje dywizor $D \in |L|$ taki, że $x \notin D$. Mówimy, że system liniowy $|L|$ nie ma punktów bazowych.*

Jeśli L jest globalnie generowana to dla każdego punktu $x \in X$

$$H^0(L \otimes \mathfrak{m}_x) = \{s \in H^0(L) \mid s(x) = 0\}$$

jest hiperpłaszczyzną kowymiaru 1 w $H^0(L)$. Pozwala to na zdefiniowanie następującego morfizmu:

$$\varphi_L : X \ni x \longrightarrow \varphi_L(x) \in \mathbb{P}(H^0(L)^*)$$

gdzie $\varphi_L(x)$ jest punktem odpowiadającym prostej w $H^0(L)^*$ dualnej do hiperpłaszczyzny $H^0(L \otimes \mathfrak{m}_x)$.

Definicja 1.3 *Wiązkę L nazywamy bardzo szeroką, jeśli odwzorowanie φ_L jest zanurzeniem. Jeśli istnieje takie $k \in \mathbb{Z}^+$, że kL jest wiązką bardzo szeroką, to o wiązce L mówimy, że jest szeroka.*

Korzystając z definicji szerokości i oznaczając przestrzeń wiązek liniowych na X (modulo liniowa równoważność) przez $\operatorname{Pic}(X)$ można łatwo zauważyć, że wiązki szerokie tworzą w przestrzeni $\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(X) = \operatorname{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ otwarty stożek. Wiązki w domknięciu tego stożka nazywamy numerycznie efektywnymi. Równoważnie wiązki numerycznie efektywne można zdefiniować w następujący sposób:

Definicja 1.4 *Mówimy, że wiązka liniowa L na rozmaitości algebraicznej X jest numerycznie efektywna, w skrócie nef, jeśli $L.C \geq 0$ dla każdej krzywej algebraicznej $C \subset X$.*

W szczególności wiązka trywialna jest nef. Oczywiście również każda wiązka szeroka L jest nef, gdyż zachodzi $L.C > 0$ dla wszystkich krzywych C.
W dalszych częściach potrzebować będziemy jeszcze jednej własności wiązek liniowych.

Definicja 1.5 *Mówimy, że wiązka liniowa L jest duża, jeśli $h^0(kL) \sim k^{\dim X}$, czyli gdy L ma maksymalny wymiar Kodairy. Jeśli wiązka L jest nef to z twierdzenia Riemanna-Rocha wynika, że warunek ten jest równoważny warunkowi $L^{\dim X} > 0$.*

Uwaga 1.6 *Warunek, że wiązka L jest bardzo szeroka jest równoważny surjektywności odwzorowania*

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_Z)$$

dla wszystkich $0-$*wymiarowych podschematów* $Z \subset X$ *długości* 2.

Ten warunek z kolei można rozbić na dwa w zależności od tego czy Z składa się z dwóch punktów $x_1, x_2 \in X$ czy jest punktem $x \in X$ z wyróżnionym wektorem stycznym.

a) surjektywność odwzorowania

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_1} \otimes \mathfrak{m}_{x_2}})$$

odpowiada injektywności odwzorowania φ_L,

b) surjektywność odwzorowania

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x^2)$$

odpowiada injektywności różniczki $d\varphi_L$.

Porównanie przedstawionych powyżej warunków oraz definicji 1.1 prowadzi do następujących naturalnych uogólnień zaproponowanych przez Beltramettiego, Francię i Sommese. Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą, mamy następujące definicje:

Definicja 1.7 *Mówimy, że wiązka liniowa L jest $k-$bardzo szeroka, jeśli dla każdego* $0-$*wymiarowego podschematu* $Z \subset X$ *długości* $k+1$ *odwzorowanie*

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_Z)$$

jest surjekcją.

Definicja 1.8 *Mówimy, że wiązka L generuje dżety do rzędu k, jeśli odwzorowanie*

$$H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}})$$

jest surjekcją dla dowolnych punktów $x_1, \ldots, x_r \in X$ *i dodatnich liczb całkowitych* $k_1, \ldots, k_r$ *takich, że* $k_1 + \ldots + k_r = k+1$.

Z powyższych definicji wynika natychmiast, że wiązka liniowa L jest $0-$bardzo szeroka wtedy i tylko wtedy, gdy generuje dżety do rzędu 0. Oba te warunki są ponadto równoważne globalnemu generowaniu wiązki L.

Podobnie wiązka L jest $1-$bardzo szeroka wtedy i tylko wtedy, gdy generuje dżety do rzędu 1 a to z kolei jest równoważne temu, że wiązka jest bardzo szeroka.

Własność generowania dżetów do rzędu k jest w ogólności silniejsza od bycia $k-$bardzo szeroką.

Lemat 1.9 *Niech L będzie wiązką generującą dżety do rzędu k, wtedy L jest* $k-$*bardzo szeroka.*

Dowód. Niech $Z \subset X$ będzie $0-$wymiarowym podschematem długości $k+1$. Załóżmy, że po redukcji $Z_{red} = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Dla każdego $i = 1, \ldots, r$ istnieje ideał A_i zawarty w pierścieniu lokalnym $\mathcal{O}_{X,x_i}$ taki, że

$$\mathcal{O}_{Z,x_i} = \mathcal{O}_{X,x_i}/A_i.$$

Niech k_i będzie długością ideału A_i oraz niech M_i oznacza ideał maksymalny w pierścieniu $\mathcal{O}_{X,x_i}$. Inkluzja $(M_i)^{k_i} \subset A_i$ wynika z lematu Nakayamy i implikuje inkluzję

$$H^0(\mathcal{O}_{Z,x_i}) \subset H^0(\mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_i}^{k_i}}).$$

Mamy zatem

$$H^0(L \otimes \mathcal{O}_Z) \cong \oplus H^0(L \otimes \mathcal{O}_{Z,x_i}) \subset \oplus H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_i}^{k_i}}) \cong H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}}).$$

Ponieważ odwzorowanie $H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_Z)$ jest restrykcją odwzorowania $H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}})$ jego surjektywność wynika z założeń lematu. □

Związek w drugą stronę stanowi treść następnej propozycji [10, Proposition 2.1].

Propozycja 1.10 *Niech L będzie $k-$bardzo szeroką wiązką liniową. Wtedy L generuje dżety do rzędu s, gdzie s jest maksymalną liczbą całkowitą taką, że*

$$\binom{s+n}{s} \leq k+1.$$

W dalszej części użyteczna będzie również następująca obserwacja [10, Lemma 2.2].

Lemat 1.11 *Niech L_1, L_2 będą wiązkami liniowymi generującymi dżety do rzędu k_1 i k_2 odpowiednio. Wtedy $L = L_1 + L_2$ generuje dżety do rzędu $k = k_1 + k_2$.*

2 Krzywe algebraiczne

Gdy rozmaitość X jest wymiaru jeden oba wprowadzone w poprzedniej części pojęcia są równoważne. Dlatego w przypadku krzywych algebraicznych mówimy krótko o zanurzeniach rzędu k. Następujące twierdzenie jest motywacją dla twierdzeń typu Fujity pojawiających się w dalszych częściach pracy.

Twierdzenie 2.1 *Niech X będzie gładką krzywą o genusie g i niech L będzie wiązką liniową stopnia d na X. Jeśli $d \geq 2g+k$, to L definiuje zanurzenie rzędu k.*

Dowód. Niech dane będą liczby dodatnie $k_1 + \ldots + k_r = k+1$ i punkty $x_1, \ldots x_r \in X$. Z ciągu dokładnego kohomologii dla ciągu snopów

$$0 \longrightarrow L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r} \longrightarrow L \longrightarrow L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}} \longrightarrow 0$$

wynika, że odwzorowanie $H^0(L) \longrightarrow H^0(L \otimes \mathcal{O}_X/_{\mathfrak{m}_{x_1}^{k_1}\otimes\ldots\otimes\mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}})$ jest surjektywne, jeśli

$$H^1(L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}) = 0.$$

Fakt, że snop $L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}$ w przypadku krzywych jest lokalnie wolny pozwala na bardzo łatwe wykazanie postulowanego znikania w oparciu o dualność Serre'a:

$$H^1(L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}) \cong H^0(K_X - (L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r}))$$

i ponieważ $\deg(K_X - (L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r})) \leq -1$, więc $h^0(K_X - (L \otimes \mathfrak{m}_{x_1}^{k_1} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{m}_{x_r}^{k_r})) = 0$. $\square$

Uwaga 2.2 *Przykład 4.5 pokazuje, że uzyskany wynik jest optymalny dla dowolnego k. Interesujące byłoby uzyskać takie przykłady również dla krzywych o dowolnym genusie.*

Wniosek 2.3 *Niech X będzie gładką krzywą o genusie g i niech L będzie wiązką liniową taką, że $\deg L \geq k+2$. Wówczas wiązka stowarzyszona $K_X + L$ zadaje zanurzenie rzędu k.*

Wniosek 2.4 *Niech X będzie gładką krzywą o genusie g i niech L będzie szeroką wiązką liniową na X. Wiązka stowarzyszona $K_X + sL$ zadaje zanurzenie rzędu k dla $s \geq k+2$.*

3 Powierzchnie algebraiczne

Następujące twierdzenie uzyskane przez Reidera [28] podaje numeryczną charakteryzację globalnie generowanych i bardzo szerokich wiązek stowarzyszonych na powierzchniach algebraicznych.

Twierdzenie 3.1 (Reider) *Niech X będzie gładką powierzchnią rzutową i niech L będzie szeroką wiązką liniową na X.*
1). Jeśli $L^2 \geq 5$ i system liniowy $|K_X + L|$ ma punkt bazowy x, to istnieje krzywa algebraiczna $D \subset X$ przechodząca przez punkt x taka, że

- $D.L = 0$ *i* $D^2 = -1$; *lub*
- $D.L = 1$ *i* $D^2 = 0$.

2). Jeśli $L^2 \geq 10$ i system liniowy $|K_X + L|$ nie spełnia warunku z uwagi 1.6 dla podschematu $Z \subset X$ długości 2, to istnieje krzywa algebraiczna $D \subset X$ taka, że $Z \subset D$ i

- $D.L = 0$ *i* $D^2 = -2$ *lub* $D^2 = -1$; *lub*
- $D.L = 1$ *i* $D^2 = -1$ *lub* $D^2 = 0$; *lub*
- $D.L = 2$ *i* $D^2 = 0$.

Oryginalny dowód tego twierdzenia został uzyskany z wykorzystaniem nierówności Bogomołowa dla stabilnych wiązek wektorowych rzędu 2 na powierzchniach algebraicznych ($c_1^2 \leq 4c_2$). Interesujący dowód twierdzenia Reidera w oparciu o twierdzenie Kawamaty-Viehwega o znikaniu zawiera praca [31] w tym samym tomie. Wykorzystując nierówność Bogomołowa wynik Reidera został rozszerzony [9] dla $k-$bardzo szerokich wiązek liniowych.

Twierdzenie 3.2 (Beltrametti-Sommese) *Niech L będzie szeroką wiązką liniową na gładkiej powierzchni algebraicznej X i niech $L^2 \geq 4k+5$. Wtedy albo system liniowy K_X+L jest $k-$bardzo szeroki albo istnieje efektywny dywizor $D \subset X$ taki, że wiązka $L-2D$ jest $\mathbb{Q}$-efektywna, D zawiera podschemat Z długości $k+1$, dla którego warunek z definicji 1.7 nie jest spełniony i*

$$L.D - k - 1 \leq D^2 < \frac{L.D}{2} < k+1.$$

Uzyskanie podobnego wyniku dla generowania dżetów określonego rzędu wymaga bardziej zaawansowanych metod i uzyskany wynik jest mniej dokładny.

Twierdzenie 3.3 *Niech L będzie szeroką wiązką liniową na gładkiej powierzchni algebraicznej X i niech $L^2 > (k+2)^2$ oraz $L.C > k^2+3k+2$ dla wszystkich krzywych $C \subset X$. Wtedy wiązka K_X+L generuje dżety do rzędu k.*

Dowód. Powyższe twierdzenie dla generowania dżetów w jednym punkcie zostało udowodnione przez Lazarsfelda [25, Corollary 7.4]. Dowód generacji dżetów do rzędu k przy mocniejszych warunkach numerycznych i z użyciem metod analitycznych jest zasugerowany w [14, Exercise 8.6]. Kompletny dowód z optymalnymi stałymi oparty na twierdzeniu Kawamaty-Viehwega o znikaniu przedstawiony jest w pracy [31]. $\square$

4 Produkty wiązek na rozmaitościach abelowych

W tej części pracy zajmiemy się pytaniem która potęga tensorowa lub ogólniej produkt ilu szerokich wiązek liniowych na rozmaitości abelowej jest wiązką $k-$bardzo szeroką lub generuje dżety do rzędu k. Dla $k=0$ lub 1 mamy następujące klasyczne twierdzenie [24, Theorem 4.5.1].

Twierdzenie 4.1 (Lefschetz) *Niech L będzie szeroką wiązką liniową na rozmaitości abelowej. Wtedy*

a) wiązka $2L$ jest globalnie generowana,

b) wiązka $3L$ jest bardzo szeroka.

Twierdzenie to można uogólnić zastępując potęgę tensorową produktem tej samej ilości dowolnych wiązek szerokich.

Twierdzenie 4.2 (Bauer-Szemberg) *Niech L_1, L_2, L_3 będą szerokimi wiązkami liniowymi na rozmaitości abelowej. Wtedy*

a) wiązka L_1+L_2 jest globalnie generowana, *b) wiązka $L_1 + L_2 + L_3$ jest bardzo szeroka.*

Dowód tego twierdzenia oraz dyskusja przypadku, gdy już $L_1 + L_2$ jest wiązką bardzo szeroką jest przedstawiony w pracy [5, Theorem 1.1].

Dla zanurzeń wyższego rzędu twierdzenie przedłuża się w sposób liniowy ze względu na ilość tensorowanych wiązek liniowych.

Twierdzenie 4.3 (Bauer-Szemberg)
Niech $L_1, \ldots, L_{k+2}$ będą szerokimi wiązkami liniowymi na rozmaitości abelowej. Wtedy wiązka

$$L = L_1 + \ldots + L_{k+2}$$

generuje dżety do rzędu k.

Dowód. Postulowany fakt jest natychmiastowym wnioskiem z części a) twierdzenia 4.2 oraz następnego twierdzenia [6, Theorem 2.1]. □

Twierdzenie 4.4 (Bauer-Szemberg) *Niech $L_1, \ldots, L_{k+1}$ będą szerokimi wiązkami liniowymi na rozmaitości abelowej. Załóżmy ponadto, że wiązka L_{k+1} jest globalnie generowana. Wtedy wiązka*

$$L = L_1 + \ldots + L_{k+1}$$

generuje dżety do rzędu k.

Twierdzenie 4.3 jest optymalne w tym sensie, że dla dowolnej liczby $n \geq 1$ istnieje rozmaitość abelowa X_n wymiaru n oraz szeroka wiązka liniowa L_n taka, że wiązka $(k+1)L_n$ nie generuje dżetów do rzędu k, a nawet więcej: wiązka $(k+1)L_n$ nie jest $k-$bardzo szeroka.

Przykład 4.5 *Niech $E_1, \ldots, E_n$ będą krzywymi eliptycznymi i niech $X_n = E_1 \times \ldots \times E_n$ oraz niech*

$$L_n = \mathcal{O}_X(\sum_{i=1}^{n} E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times \{0\} \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n).$$

Wiązka $(k+1)L_n$ nie jest $k-$bardzo szeroka dla dowolnej nieujemnej liczby całkowitej k.

Dowód. Rozważmy krzywą $E = E_1 \times \{0\} \times \ldots \times \{0\} \subset X_n$. Wystarczy pokazać, że zacieśnienie $(k+1)L_n\big|_E$ nie jest wiązką $k-$bardzo szeroką.

Załóżmy, że k jest liczbą parzystą i wybierzmy punkty $P_1, \ldots, P_{\frac{k}{2}} \in E$ różne od zera $P_0 \in E$ oraz takie, że $P_i \neq P_j$ i $P_i \neq -P_j$ dla $i \neq j$. Niech Z będzie zredukowanym schematem z nośnikiem na zbiorze $\{-P_{\frac{k}{2}}, \ldots, -P_1, P_0, P_1, \ldots, P_{\frac{k}{2}}\}$. Wtedy Z jest schematem długości $k+1$, równe są systemy liniowe $|(k+1)L_n\big|_E| = |(k+1)P_0|$ oraz odwzorowanie

$$H^0((k+1)P_0) \longrightarrow H^0((k+1)P_0 \otimes \mathcal{O}_Z)$$

nie jest surjekcją, gdyż na mocy twierdzenia Abela (patrz [20, Paragraf 2.2]) każdy dywizor z systemu $(k+1)P_0$ zawierający k spośród wybranych punktów zawiera również pozostały punkt.

Dla k nieparzystego podobnie dobieramy układ

$$-P_{\frac{k+1}{2}}, \ldots, -P_1, P_1, \ldots, P_{\frac{k+1}{2}}.$$

$\square$

W powyższym przykładzie L_n zadaje na X_n polaryzację główną, w szczególności $h^0(L) = 1$. Dość naturalne wydaje się przypuszczenie, że gdy wiązka liniowa zawiera dużo sekcji globalnych to wystarczają one do zadania zanurzenia. Następne twierdzenie obrazuje, że tak jest istotnie na prostych powierzchniach abelowych, tzn. takich, które nie zawierają żadnych krzywych eliptycznych.

Twierdzenie 4.6 *Niech X będzie prostą powierzchnią abelową oraz niech L będzie wiązką typu $(1,d)$ na X. Wtedy*
(a) L jest globalnie generowana wtedy i tylko wtedy, gdy $d \geq 3$,
(b) L jest bardzo szeroka wtedy i tylko wtedy, gdy $d \geq 5$.

Dowód. Twierdzenie to jest prostym zastosowaniem twierdzenia Reidera (twierdzenie 3.1). Dowód uzyskany metodami typowymi dla rozmaitości abelowych można znaleźć w [24, Theorem 10.4.1]. Wynik tego samego typu z dokładną informacją dotyczącą "źle" położonych krzywych eliptycznych na dowolnych powierzchniach abelowy przedstawiony jest w [22]. $\square$

Powyższe twierdzenie daje się uogólnić dla zanurzeń wyższego rzędu. Uogólnienie to obrazuje w szczególności, że pojęcia wiązki $k-$bardzo szerokiej oraz generujęcej dżety do rzędu k są na rozmaitościach abelowych istotnie różne.

Twierdzenie 4.7 (Bauer-Szemberg) *Niech X będzie powierzchnią abelową z liczbą Picarda $\rho(X) = 1$ i niech L będzie wiązką liniową typu $(1,d)$ na X. Niech k będzie nieujemną liczbą całkowitą. Zachodzą następujące warunki:*

(a) L generuje dżety do rzędu k wtedy i tylko wtedy, gdy $d > \frac{1}{2}(k+2)^2$,

(b) L jest $k-$bardzo szeroka wtedy i tylko wtedy, gdy $d \geq 2k+3$.

Dowód. Sprawdzenie, że warunek $d > \frac{1}{2}(k+2)^2$ implikuje generowanie dżetów do rzędu k opiera się na wykorzystaniu twierdzenia Kawamaty-Viehwega o znikaniu uzupełnionego o lemat Sakai'a. Szczegóły przedstawione są w [7, Proposition 2.1]. W części (b) implikowanie przez warunek $d \geq 2k+3$ $k-$bardzo szerokości jest prostym zastosowanie twierdzenia 3.2. Znacznie ciekawszy jest dowód implikacji przeciwnej. Przedstawiamy go poniżej. $\square$

Następująca propozycja zawiera jedną z implikacji twierdzenia 4.7 z pominięciem założenia $\rho(X) = 1$. Przedstawiamy jej dowód gdyż opiera się on na ogólnych technikach nie związanych z kontekstem rozmaitości abelowych.

Propozycja 4.8 *Niech L będzie wiązką liniową typu $(1,d)$ na powierzchni abelowej X. Jeśli L jest $k-$bardzo szeroka, to $d \geq 2k+3$.*

Dowód. Z twierdzenia 4.6 wynika, że propozycja jest prawdziwa dla $k=0$ i $k=1$. Zatem możemy założyć, że L jest $k-$bardzo szeroka dla $k \geq 2$. Przypuśćmy, że $d \leq 2k+2$. Niech

$$\varphi_L : X \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(L)^*) = \mathbb{P}^{d-1}$$

będzie zanurzeniem danym przez system liniowy $|L|$ oraz niech $C \in |L|$ będzie gładką krzywą. Stosując twierdzenie Riemanna-Rocha do ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{O}_C(L) \longrightarrow 0$$

otrzymujemy, że odwzorowanie

$$\alpha : H^0(L) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(L))$$

nie jest surjekcją. Oznacza to, że krzywa C nie jest zanurzona w $\mathbb{P}^{d-1}$ przez zupełny system liniowy. Niech $D \subset \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_C(L)^*)$ będzie obrazem krzywej C przy zanurzeniu danym przez zupełny system liniowy $|\mathcal{O}_C(L)|$. Odwzorowanie α indukuje projekcję

$$\alpha^* : \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_C(L))^*) \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(L)^*)$$

z prostej $Q = \mathbb{P}(\operatorname{coker} \alpha)$. Zacieśnienie tej projekcji do D zadaje izomorfizm $D \cong C$. Rozważmy $k-$tą rozmaitość siecznych $\operatorname{Sec}^k(D)$ krzywej D. Zgodnie z przypuszczeniem $d-1 \leq 2k+1$, zatem ze wzoru Zaka (patrz [32]) wynika, że

$$\dim \operatorname{Sec}^k(D) = \min\{d, 2k+1\} \geq d-1.$$

Oznacza to, że istnieje punkt $P \in \operatorname{Sec}^k(D) \cap Q$. A zatem istnieje $0-$wymiarowy podschemat Z_D długości $k+1$ zawarty w krzywej D taki, że

$$P \in \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_C(L) \otimes \mathcal{I}_{Z_D})^*).$$

Wtedy $Z := (\alpha^*)_* Z_D$ jest podschematem długości $k+1$ zawartym w krzywej C. Ponieważ wiązka $\mathcal{O}_C(L)$ jest $k-$bardzo szeroka i punkt P leży w centrum projekcji α^* otrzymujemy

$$d-(k+1)-1 = \dim \mathbb{P}(H^0(L \otimes \mathcal{I}_Z)^*) = \dim \alpha^*(\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_C(L) \otimes \mathcal{I}_{Z_D})^*))$$

$$< \dim \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_C(L) \otimes \mathcal{I}_{Z_D})^*) = d-(k+1)-1,$$

sprzeczność. □

Uwaga 4.9 *Dla prymitywnych wiązek liniowych na wyżej wymiarowych rozmaitościach abelowych sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana nawet w przypadku klasycznych zanurzeń [12]. W szczególności nie wiadomo czy na rozmaitości abelowej wymiaru trzy istnieje bardzo szeroka wiązka typu $(1,1,8)$.*

5 Hipoteza Fujity

W 1987 roku Fujita [19] sformułował następującą hipotezę:

Hipoteza 5.1 (Fujita) *Niech X będzie gładką rozmaitością wymiaru n i niech L będzie szeroką wiązką liniową na X. Wtedy wiązka stowarzyszona*

0) $K_X + sL$ jest globalnie generowana dla $s \geq n+1$,

1) $K_X + sL$ jest bardzo szeroka dla $s \geq n+2$.

Uwaga 5.2 *Przykład $X = \mathbb{P}^n$ i $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ pokazuje, że stałych w powyższej hipotezie nie można poprawić nawet zakładając dodatkowo, że wiązka L jest bardzo szeroka.*

Prawdziwość hipotezy Fujity dla krzywych algebraicznych stanowi szczególny przypadek wniosku 2.4. Dla powierzchni algebraicznych poprawność tej hipotezy wynika z twierdzenia Reidera (twierdzenie 3.1). Dla wyższych wymiarów Ein i Lazarsfeld [18] wykazali, że na rozmaitościach wymiaru 3 wiązka $K_X + 4L$ jest globalnie generowana. Poprawność tej samej części hipotezy dla rozmaitości wymiaru 4 wykazał Kawamata [23]. We wszystkich pozostałych przypadkach uzyskano jedynie częściowe rezultaty. Ogólne szacowania dla dowolnego wymiaru zostały podane ostatnio przez Angehrna i Siu [1], [30] (porównaj także [15]).

Propozycja 5.3 (Angehrn-Siu) *Niech X będzie gładką rozmaitością wymiaru n i niech L będzie szeroką wiązką liniową na X. Wiązka stowarzyszona*

$K_X + sL$ jest globalnie generowana dla $s \geq \frac{1}{2}(n^2+n+2)$,

$K_X + sL$ jest bardzo szeroka dla $s \geq 2\left(n+2+n\binom{3n+1}{n}\right)$.

Mimo trudności z dowodem hipotezy Fujity w przypadku klasycznych zanurzeń celowe i interesujące wydaje się jej sformułowanie dla zanurzeń wyższego rzędu.

Hipoteza 5.4 *Istnieją wielomiany $v(n,k)$ i $j(n,k)$ takie, że dla gładkiej rozmaitości X i szerokiej wiązki liniowej L na X wiązka stowarzyszona*

k_v) $K_X + sL$ jest $k-$bardzo szeroka dla $s \geq v(n,k)$,

k_j) $K_X + sL$ generuje dżety do rzędu k dla $s \geq j(n,k)$.

W tak ogólnym sformułowaniu problem sprawdzenia poprawności hipotezy jest oczywiście bardzo trudny. Wprowadzenie ograniczenia na wymiar niewiele daje, co pokazuje już klasyczny przypadek. Dlatego celowe wydaje się rozważanie konkretnych klas rozmaitości i ich zanurzeń wyższego rzędu. Problemy tego typu stanowią obszar ożywionej pracy badawczej. W końcowej części pracy przedstawiamy wybór aktualnych wyników. Zanim do tego przejdziemy pokażemy, że w ogólności nawet określenie stopnia występujących w hipotezie 5.4 wielomianów może być problemem. Do tego potrzebna będzie następująca

Definicja 5.5 *Niech L będzie szroką wiązką liniową na X i niech $x \in X$ będzie ustalonym punktem. Stałą Seshadriego wiązki L w punkcie x nazywamy wielkość:*

$$\varepsilon(L,x) := \inf \frac{L.C}{\operatorname{mult}_x C}$$

gdzie infimum wzięte jest po wszystkich nierozkładalnych krzywych C przechodzących przez punkt x. Stałą Seshadriego wiązki L określamy jako

$$\varepsilon(L) := \inf_{x\in X} \varepsilon(L,x).$$

Pokażemy teraz, że naiwne przedłużenie hipotezy 5.1 tzn. oczekiwanie, że wiązka $K_X + (n+1+k)L$ generuje dżety do rzędu k nie jest prawdziwe.

Propozycja 5.6 (Miranda) *Dla dowolnej liczby dodatniej ε istnieje taka powierzchnia X i szeroka wiązka liniowa L na X oraz punkt $x \in X$, że $\varepsilon(L,x) < \varepsilon$.*

Dowód. Niech m będzie liczbą całkowitą taką, że $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Dla odpowiednio dużej liczby d istnieje taka nierozkładalna krzywa $D_1 \subset \mathbb{P}^2$, że $\operatorname{mult}_x D_1 = m$. Dla dostatecznie ogólnej krzywej $D_2 \subset \mathbb{P}^2$ stopnia d wszystkie krzywe postaci $\lambda D_1 + \mu D_2$, $(\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1$ są nierozkładalne i przecięcie $D_1 \cap D_2$ składa się z d^2 różnych punktów.

Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ będzie rozdmuchaniem $\mathbb{P}^2$ w punktach przecięcia $D_1 \cap D_2$. System dywizorów $\lambda D_1 + \mu D_2$ zadaje morfizm

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$$

z nierozkładalnymi włóknami. Niech $\widetilde{D}$ oznacza transformatę właściwą D przy rozdmuchaniu f i niech E będzie dowolnym dywizorem wyróżnionym tego rozdmuchania. Wówczas $E.\widetilde{D} = 1$ czyli E jest sekcją φ. Z kryterium Nakai-Moishezona [21, Theorem 5.1.10] wynika, że wiązka $L = 2\widetilde{D}+E$ jest szeroka. Ponieważ $L.\widetilde{D} = 1$ i $\operatorname{mult}_x \widetilde{D} = m$ mamy

$$\varepsilon(L,x) \leq \frac{1}{m}.$$

□

Powyższy przykład nietrudno, rozważając produkty, uogólnić na dowolny wymiar.

Wniosek 5.7 *Nie istnieje liniowy wielomian $j_2(k)$ taki, że dla każdej powierzchni algebraicznej X i każdej wiązki szerokiej na X wiązka $K_X + j_2(k)L$ generuje dżety do rzędu k.*

Dowód. Niech para X, L będzie ustalona i przypuśćmy, że wielomian $j_2(k)$ jest liniowy. Niech C będzie dowolną nierozkładalną krzywą przechodzącą przez ustalony punkt $x \in X$. Wiązka $K_X + j_2(k)L$ generuje dżety do rzędu k, więc istnieje taki dywizor $D \in |K_X + j_2(k)L|$, że $\operatorname{mult}_x D = k$ oraz D przecina C transwersalnie w punkcie x. Ponieważ C jest krzywą nierozkładalną wynika stąd, że C nie jest składową dywizora D i mamy

$$(K_X + j_2(k)L).C \geq \operatorname{mult}_x D \cdot \operatorname{mult}_c C = k \cdot \operatorname{mult}_x C.$$

Przekształcając otrzymujemy

$$\frac{L.C}{\mathrm{mult}_x C} \geq \frac{k}{j_2(k)} - \frac{C.K_X}{j_2(k) \cdot \mathrm{mult}_x C}.$$

Ponieważ $C.K_X$ jest pewną stałą przechodząc z k do nieskończoności otrzymujemy

$$\frac{L.C}{\mathrm{mult}_x C} \geq \varepsilon > 0$$

gdzie ε jest stałą mniejszą od dodatniej (!) granicy $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{j_2(k)}$. Uzyskane uniwersalne szacowanie stałej Seshadriego w punkcie x przeczy propozycji 5.6. □

Na zakończenie przedstawimy kilka ogólnych faktów dotyczących hipotezy 5.4. Dla krzywych mama $v(1,k) = j(1,k) = k+2$ (patrz: wniosek 2.4). Dla powierzchni algebraicznych z twierdzeń 3.2 i 3.3 otrzymujemy:

Propozycja 5.8 *Hipoteza 5.4 jest prawdziwa dla powierzchni algebraicznych z* $v(2,k) = 2k+2$ *i* $j(2,k) = k^2+3k+2$.

Dowód optymalności powyższej propozycji wykracza poza ramy tego opracowania i będzie przedstawiony gdzie indziej.

Dla konkretnych klas rozmaitości mamy następujące wyniki.

Propozycja 5.9 *Dla rozmaitości abelowych hipoteza 5.4 jest spełniona dla wielomianów* $j_{abel}(n,k) = v_{abel}(n,k) = k+1$.

Dowód. Na rozmaitościach abelowych dywizor kanoniczny jest trywialny, więc teza wynika z twierdzenia 4.4. □

Propozycja 5.10 *Dla rozmaitości torycznych hipoteza 5.4* k_j*) zachodzi dla wielomianu* $j_{tor}(n,k) = n+k+1$.

Dowód. Wiadomo, że $K_X+(n+1)L$ jest wiązką numerycznie efektywną na dowolnej rozmaitości [19]. Ponieważ na rozmaitościach torycznych szerokość wiązki liniowej jest równoważna jej bardzo szerokości [27] teza wynika z lematu 1.11. □

O wynikach dotyczących $k-$bardzo szerokości na rozmaitościach torycznych wspominamy w następnej części pracy.

6 Przegląd wyników i perspektywy

W tej części pracy podajemy wybór aktualnych wyników dotyczących zanurzeń wyższego rzędu. Lista nie jest w żadnej mierze kompletna, jej taki a nie inny wygląd najlepiej da się uzasadnić osobistym smakiem autora.

Eliptyczne quasi-wiązki

Definicja 6.1 *Powierzchnię S nazywamy quasi-wiązką, jeśli istnieje morfizm φ : $S \longrightarrow C$ z S na gładką krzywą C taki, że włókna φ są spójne, wszystkie włókna gładkie są izomorficzne i jedynymi włóknami osobliwymi są niezredukowane gładkie krzywe.*

Problem $k-$bardzo szerokości dla quasi-wiązek o włóknie eliptycznym był studiowany przez Mellę i Pelleschi'ego [26]. Podają oni explicite opis grupy Picarda quasi-wiązek eliptycznych oraz numeryczne warunki, podobne jak w twierdzeniu 3.2 na $k-$bardzo szerokość wiązek liniowych na tego typu powierzchniach. Ze względu na szereg wstępnych definicji i mnogość przypadków nie przytaczamy uzyskanych rezultatów odsyłając Czytelnika do oryginalnej pracy.

Wiązki z $L^2 \leq 4k + 4$. Twierdzenie 3.2 podaje warunki kiedy wiązka liniowa L na powierzchni algebraicznej S jest $k-$bardzo szeroka przy założeniu $L^2 \geq 4k + 5$. Ballico i Sommese [2] podają kompletną listę par (S, L) takich, że L jest $k-$bardzo szeroka i $L^2 \leq 4k + 4$. Tutaj przytoczymy następujący rezultat.

Propozycja 6.2 *Niech L będzie $k-$bardzo szeroką wiązką liniową na gładkiej powierzchni S taką, że $L2^{\leq}4k + 4$. Jeśli dywizor kanoniczny K_S jest numerycznie trywialny (tzn. $K_S.C = 0$ dla każdej krzywej $C \subset S$) to S jest powierzchnią Enriquesa lub powierzchnią $K3$ i $L^2 = 4k, 4k + 2$ lub $4k + 4$.*

Kwartyki w $\mathbb{P}^3$. Asymptotyczne zachowanie wiązek generujących dżety wysokiego rzędu na powierzchniach S stopnia 4 w $\mathbb{P}^3$ opisał Bauer [3]. Uzyskany wynik jest następujący.

Propozycja 6.3 *Niech $S \subset \mathbb{P}^3$ będzie gładką powierzchnią stopnia 4 i niech $L = \mathcal{O}_X(1)$. Wtedy*

a) $\varepsilon(L) = 1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy S zawiera prostą,*

b) $\varepsilon(L) = \frac{4}{3}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy forma Hesse ma punkt zerowy na S i S nie zawiera prostej,*

c) $\varepsilon(L) = 2$ *w pozostałych wypadkach.*

Związek stałych Seshadriego z zanurzeniami wyższego rzędu podał Demailly [13, Theorem 6.4].

Propozycja 6.4 *Niech X będzie gładką rozmaitością i L szeroką wiązką liniową na X. Niech $s(L, x)$ oznacza największą liczbę całkowitą s taką, że L generuje dżety do rzędu s w punkcie x. Dla*

$$\sigma(L, x) := \limsup_{p\to\infty} \frac{1}{p} s(pL, x)$$

zachodzi związek

$$\sigma(L, x) = \varepsilon(L, x).$$

Powierzchnie Del Pezzo i powierzchnie toryczne. Powierzchnie Del Pezzo są dwuwymiarowym przypadkiem rozmaitości Fano. Rozmaitość X jest Fano jeśli dywizor antykanoniczny $-K_X$ jest szeroki. Problem $k-$bardzo szerokości potęg tensorowych dywizora antykanonicznego na powierzchniach Del Pezzo był badany przez Di Rocco [16]. Podana charakteryzacja wymaga wprowadzenia szeregu dodatkowych definicji, więc ponownie odsyłamy zainteresowanego czytelnika do oryginalnego opracowania. Powierzchnie Del Pezzo są biwymierne z $\mathbb{P}^2$, które jest z kolei powierzchnią toryczną. Ta sama autorka w [17] podaje prostą charakteryzację $k-$bardzo szerokości na powierzchniach torycznych.

Propozycja 6.5 *Niech S będzie powierzchnią toryczną skojarzoną z rodziną stożków Δ_d z d krawędziami (patrz [27]). Niech $L = \sum_{i=1}^{d-2} a_i D_i$. Wtedy L jest $k-$bardzo szeroka wtedy i tylko wtedy, gdy $L.D_i \geq k$ dla $i = 1, \ldots, d-2$.*

Powierzchnie K3. Dla powierzchni $K3$ numeryczne warunki określające globalne generowanie i bardzo szerokość wiązki liniowej zostały podane na długo przed twierdzeniem Reidera przez Saint-Donat [29]. Generowanie dżetów wyższego rzędu na powierzchniach $K3$ było badane przez Bauera, Di Rocco i autora [4]. Uzyskany wynik jest następujący.

Propozycja 6.6 *Niech X będzie powierzchnią $K3$ i niech L będzie szeroką wiązką liniową na X. Zachodzi jeden z rozłącznych przypadków:*

(a) wiązka nL generuje dżety do rzędu k dla $n \geq k+2$,

(b) wiązka L jest postaci $L = \mathcal{O}_X(aE + \Gamma)$, gdzie $E \subset X$ jest krzywą eliptyczną, $\Gamma \subset X$ jest $(-2)-$krzywą i $E.\Gamma = 1$ oraz $a \geq 3$.

W przypadku (b) niech Δ oznacza skończony zbiór punktów osobliwych rozwłóknienia $X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ zadanego przez $|E|$. Wtedy nL generuje dżety do rzędu k w punkcie $x \in X \setminus \Delta$ dla $n \geq k+2$ i w punkcie $x \in \Delta$ dla $n \geq 2k+1$.

Reasumując przedstawione powyżej rezultaty można zauważyć, że dotychczasowe badania skupiały się na $k-$bardzo szerokości i na badaniu wiązek liniowych na powierzchniach. Wydaje się, szczególnie ze względu na ostatnie silne zainteresowanie stałymi Seshadriego, że dalsze prace powinny przebiegać w kierunku znajdowania kryteriów generowania dżetów wysokiego rzędu na powierzchniach i wyżej wymiarowych rozmaitościach.

Bibliografia

[1] Angehrn, U., Siu, Y.-T.: Effective freeness and separation of points for adjoint bundles. To appear in Invent. Math.

[2] Ballico, E., Sommese, A.J.: Projective surfaces with $k-$very ample line bundles of degree $\leq 4k+4$. Nagoya Math. J. 136, 57-79 (1994)

[3] Bauer, Th.: Seshadri constants of quartic surfaces. Preprint Erlangen 1996

[4] Bauer, Th., Di Rocco, S., Szemberg, T.: Generation of jets on K3 surfaces. Preprint IMUJ 1996

[5] Bauer, Th., Szemberg, T.: On tensor products of ample line bundles on abelian varieties. To appear in Math. Z.

[6] Bauer, Th., Szemberg, T.: Higher order embeddings of abelian varieties. To appear in Math. Z.
[7] Bauer, Th., Szemberg, T.: Primitive higher order embeddings of abelian surfaces. To appear in Trans. AMS.
[8] Beltrametti, M.C., Francia, P., Sommese, A.J.: On Reider's method and higher order embeddings. Duke Math. J. 425-439 (1989)
[9] Beltrametti, M.C., Sommese, A.J.: Zero cycles and k-th order embeddings. Projective surfaces and their classification, Symp. Math., INDAM, vol. 32, Academic Press 1988, pp. 33-48
[10] Beltrametti, M.C., Sommese, A.J.: On k-jet ampleness. In: Complex Analysis and Geometry, edited by V. Ancona and A. Silva, Plenum Press, New York, 1993, pp. 355-376
[11] Beltrametti, M.C., Sommese, A.J.: The Adjunction Theory of Complex Projective Varieties. Expositions in Mathematics 16, Walter de Gruyter, Berlin 1995
[12] Debarre, O., Hulek, K., Spandaw, J.: Very ample linear systems on abelian varieties. Math. Ann. 300, 181-202 (1994)
[13] Demailly, J.-P.: Singular Hermitian metrices on positive line bundles. Complex Algebraic Varieties. Proceedings, 1990, Lect. Notes in Math. vol. 1507, Springer 1992
[14] Demailly, J.-P.: L^2 vanishing theorems for positive line bundles and adjunction theory. CIME Session, Transcendental Methods in Algebraic Geometry, Cetraro 1994
[15] Demailly, J.-P.: Effective bounds for very ample line bundles. Invent. math. 124, 243-261 (1996)
[16] Di Rocco, S.: $k-$very ample line bundles on Del Pezzo surfaces. Math. Nachr. 179, 47-56 (1996)
[17] Di Rocco, S.: $k-$very ampleness on nonsingular toric surfaces. Preprint Notre Dame 1996
[18] Ein, L., Lazarsfeld, R.: Global generation of pluricanonical and adjoin linear series on smooth projective threefolds. J. Amer. Math. Soc. 6, 875-903 (1993)
[19] Fujita, T.: On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive. Algebraic Geometry, Sendai, Adv. Stud. Pure Math., vol. 10, editor T. Oda, 1987, pp. 167-178
[20] Griffiths, P. A., Harris, J.: Principles of Algebraic Geometry. Wiles, New York 1978
[21] Hartshorne, R.: Algebraic geometry. Springer 1977
[22] Hulek, K., Lange, H.: Examples of abelian surfaces in $\mathbb{P}^4$. J. reine angew. Math. 363, 200-216 (1985)
[23] Kawamata, Y.: On Fujita's freeness conjecture for 3-folds and 4-folds. To appear
[24] Lange, H., Birkenhake, Ch.: Complex Abelian Varieties. Grundlehren der math. Wiss. 302, Springer 1992
[25] Lazarsfeld, R.: Lectures on linear series. Park City / IAS Mathematics series vol. 3, 1-56 (1993)
[26] Mella, M., Palleschi, M.: The $k-$very ampleness on an elliptic quasi bundle. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 63, 215-226 (1993)
[27] Oda, T.: Convex bodies and algebraic geometry. Springer 1988
[28] Reider, I.: Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces. Ann. Math. 127, 309-316 (1988)
[29] Saint-Donat, B.: Projective models of K3 surfaces. Am. J. Math. 96, 602-639 (1974)
[30] Siu, Y.-T.: Effective very ampleness. Invent. math. 124, 563-571 (1996)
[31] Tutaj-Gasińska, H.: Twierdzenie Reidera dla zanurzeń wyższego rzędu. Ten sam tom.
[32] Zak, F.: Linear system of hyperplane sections on varieties of low codimension. Functional Anal. Appl. 19, 165-173 (1985)

Tomasz Szemberg,
Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński,
Reymonta 4,
PL-30-059 Kraków,
Poland
e-mail: szemberg@im.uj.edu.pl

HIGHER ORDER EMBEDDINGS

Summary. The first part of this note gives an introduction to the theory of higher order embeddings, which was developed in the late 80's and gains again considerable interest because of its connections to Seshadri constants and local positivity of line bundles. Sections 4 and 6 contain an overview of some current results in the area. Section 5 is devoted to Fujita conjecture put into the perspective of higher order embeddings.

Bronisławów, 13 – 17 stycznia, 1997 r.