O bifurkacjach cuspów

Zbigniew Szafraniec

Instytut Matematyki
Uniwersytet Gdański

Łódź - 2018

Odwzorowania powierzchni

M, N – gładkie powierzchnie,

$f : M \to N$ – gładkie generyczne odwzorowanie.

H.Whitney udowodnił, że zbiór punktów krytycznych f jest krzywą lub jest pusty.

Odwzorowania powierzchni

M, N – gładkie powierzchnie,

$f : M \to N$ – gładkie generyczne odwzorowanie.

H.Whitney udowodnił, że zbiór punktów krytycznych f jest krzywą lub jest pusty.

W punktach krytycznych f ma jedną z postaci normalnych:

$(x, y) \mapsto (x, y^2)$ **fałda/fold** (zbiór 1-wymiarowy)

$(x, y) \mapsto (x, y^3 + xy)$ **ostrze/cusp** (zbiór dyskretny)

Jeżeli M, N są zorientowane oraz $p \in M$ jest ostrzem,

Jeżeli M, N są zorientowane oraz $p \in M$ jest ostrzem,

definiujemy $\mu(p)$ jako stopień topologiczny dla

$f : (M, p) \to (N, f(p))$.

Jeżeli M, N są zorientowane oraz $p \in M$ jest ostrzem,

definiujemy $\mu(p)$ jako stopień topologiczny dla

$f : (M, p) \to (N, f(p))$.

$$\mu(p) = \pm 1$$

Jeżeli M, N są zwarte bez brzegu, to są znane licze związki

pomiędzy topologią M, N

oraz topologią osobliwości dla f

(H.Levine, R.Thom, H.Whitney).

Jeżeli M, N są zwarte bez brzegu, to są znane licze związki

pomiędzy topologią M, N

oraz topologią osobliwości dla f

(H.Levine, R.Thom, H.Whitney).

W szczególności są znane wyniki dla

$$\sum_p \mu(p) \ ,$$

gdzie p przebiega zbiór ostrzy:

J.R. Quine [1978] and Takuo Fukuda, Goo Ishikawa [1987]

Niech $(M, \partial M)$ oraz $(N, \partial N)$ będą zwartymi zorientowanymi powierzchniami, i niech $f : M \to N$ będzie takim gładkim odwzorowanie, że $f^{-1}(\partial N) = \partial M$.

Niech $(M, \partial M)$ oraz $(N, \partial N)$ będą zwartymi zorientowanymi powierzchniami, i niech $f : M \to N$ będzie takim gładkim odwzorowanie, że $f^{-1}(\partial N) = \partial M$.

Załóżmy, że

(i) każdy punkt krytyczny w M jest typu" fałda" lub "ostrze", oraz istnieje tylko skończenie wiele ostrzy wyłącznie w $M \setminus \partial M$,

Niech $(M, \partial M)$ oraz $(N, \partial N)$ będą zwartymi zorientowanymi powierzchniami, i niech $f : M \to N$ będzie takim gładkim odwzorowanie, że $f^{-1}(\partial N) = \partial M$.

Załóżmy, że

(i) każdy punkt krytyczny w M jest typu" fałda" lub "ostrze", oraz istnieje tylko skończenie wiele ostrzy wyłącznie w $M \setminus \partial M$,

(ii) 1-wymiarowa rozmaitość złożona z punktów typu "fałda" jest transwersalna do ∂M, więc $f|\partial M : \partial M \to \partial N$ jest lokalnie stabilne.

Niech M^- oznacza domknięcie w M zbioru tych punktów regularnych w których f zmienia orientację.

Niech M^- oznacza domknięcie w M zbioru tych punktów regularnych w których f zmienia orientację.

Fukuda and Ishikawa uogólnili wynik Quine'a dotyczący powierzchni bez brzegu, dowodząc

Theorem

Załóżmy jeszcze, że $\partial M \neq \emptyset$.

Niech M^- oznacza domknięcie w M zbioru tych punktów regularnych w których f zmienia orientację.

Fukuda and Ishikawa uogólnili wynik Quine'a dotyczący powierzchni bez brzegu, dowodząc

Theorem

Załóżmy jeszcze, że $\partial M \neq \emptyset$. Wtedy

$$\sum_p \mu(p) \;=\; 2\chi(M^-) + (\deg f|\partial M)\chi(N) - \chi(M) - \#C(f|\partial M)/2,$$

gdzie $C(f|\partial M)$ oznacza zbiór punktów krytycznych dla $f|\partial M$.

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^2, \mathbf{0}$$

odwzorowanie analityczne w otoczeniu $\mathbf{0}$

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^2, \mathbf{0}$$

odwzorowanie analityczne w otoczeniu $\mathbf{0}$

$$f_t(x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dla t bliskich zero

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^2, \mathbf{0}$$

odwzorowanie analityczne w otoczeniu **0**

$$f_t(x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dla t bliskich zero

$$\mathcal{O}_3 = \mathbb{R}\{t, x_1, x_2\},$$

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^2, \mathbf{0}$$

odwzorowanie analityczne w otoczeniu $\mathbf{0}$

$$f_t(x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dla t bliskich zero

$$\mathcal{O}_3 = \mathbb{R}\{t, x_1, x_2\},$$

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \in \mathcal{O}_3,$$

$$f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^2, \mathbf{0}$$

odwzorowanie analityczne w otoczeniu **0**

$$f_t(x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

dla t bliskich zero

$$\mathcal{O}_3 = \mathbb{R}\{t, x_1, x_2\},$$

$$J = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x_1, x_2)} \in \mathcal{O}_3,$$

$$F_i = \frac{\partial(f_i, J)}{\partial(x_1, x_2)} \in \mathcal{O}_3.$$

$$I' = \left\langle J, F_1, F_2, \frac{\partial(F_1, J)}{\partial(x_1, x_2)}, \frac{\partial(F_2, J)}{\partial(x_1, x_2)} \right\rangle \subset \mathcal{O}_3,$$

$$I' = \left\langle J, F_1, F_2, \frac{\partial(F_1, J)}{\partial(x_1, x_2)}, \frac{\partial(F_2, J)}{\partial(x_1, x_2)} \right\rangle \subset \mathcal{O}_3,$$

$$d_1 = \left(\frac{\partial J}{\partial t}, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2} \right) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$I' = \left\langle J, F_1, F_2, \frac{\partial(F_1, J)}{\partial(x_1, x_2)}, \frac{\partial(F_2, J)}{\partial(x_1, x_2)} \right\rangle \subset \mathcal{O}_3,$$

$$d_1 = \left(\frac{\partial J}{\partial t}, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2} \right) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$d_2 = \left(J, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2} \right) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Załóżmy, że:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_3/I' \ < \ \infty,$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_3/\langle t, f_1, f_2\rangle \ < \ \infty,$$

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_3/\langle t, F_1, F_2\rangle \ < \ \infty,$$

$$J(\mathbf{0}) = 0 \ \ , \ \ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_3/\langle t, \tfrac{\partial J}{\partial x_1}, \tfrac{\partial J}{\partial x_2}\rangle \ < \ \infty,$$

$$d_1^{-1}(\mathbf{0}) = d_2^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \ \text{blisko} \ \mathbf{0} \ .$$

Theorem (1)

Istnieje takie $r > 0$ *, że zbiór punktów krytycznych dla*

$f_t : D^2(r) \to \mathbb{R}^2$*, gdzie* $0 \neq t$ *jest dostatecznie bliskie zera, składa się*

z punktów typu "fałda", i skończonej rodziny Σ_t *ostrzy.*

Theorem (1)

Istnieje takie $r > 0$ *, że zbiór punktów krytycznych dla*

$f_t : D^2(r) \to \mathbb{R}^2$*, gdzie* $0 \neq t$ *jest dostatecznie bliskie zera, składa się*

z punktów typu "fałda", i skończonej rodziny Σ_t *ostrzy.*

Ponadto, $\mathbf{0}$ *jest izolowany w* $f_0^{-1}(\mathbf{0})$ *oraz*

$$\sum_p \mu(f_t) = \deg_{\mathbf{0}}(f_0) - \deg_{\mathbf{0}}(d_1) - \operatorname{sign}(t) \cdot \deg_{\mathbf{0}}(d_2),$$

gdzie $p \in \Sigma_t$.

Theorem (Fukuda & Ishikawa)

Niech $Q = \mathcal{O}_3/\langle t, J, F_1, F_2\rangle$.

Theorem (Fukuda & Ishikawa)

Niech $Q = \mathcal{O}_3/\langle t, J, F_1, F_2\rangle$.

Wtedy $\dim_{\mathbb{R}} Q < \infty$.

Theorem (Fukuda & Ishikawa)

Niech $Q = \mathcal{O}_3/\langle t, J, F_1, F_2\rangle$.

Wtedy $\dim_{\mathbb{R}} Q < \infty$.

Jeżeli $0 \neq t$ *jest dostatecznie bliskie do zera, to*

$$\#\Sigma_t \leq \dim_{\mathbb{R}} Q \quad \textit{oraz} \quad \#\Sigma_t = \dim_{\mathbb{R}} Q \bmod 2.$$

Theorem (Fukuda & Ishikawa)

Niech $Q = \mathcal{O}_3/\langle t, J, F_1, F_2 \rangle$.

Wtedy $\dim_{\mathbb{R}} Q < \infty$.

Jeżeli $0 \neq t$ *jest dostatecznie bliskie do zera, to*

$$\#\Sigma_t \leq \dim_{\mathbb{R}} Q \quad \textit{oraz} \quad \#\Sigma_t = \dim_{\mathbb{R}} Q \bmod 2.$$

W artykule:

J. A. Moya–Pérez, J. J. Nuño-Ballesteros, Topological triviality of families of map germs from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$. *J. of Singularities* **6** (2012)

przedstawiono inny (geometryczny) wzór na liczbę ostrzy dla f_t mod2.

Dla $t \neq 0$: $\Sigma_t^{\pm} = \{x \in \Sigma_t \mid \mu_t(x) = \pm 1\}$,

gdzie $\mu_t(x)$ jest lokalnym stopniem topologicznym kiełka f_t w x

Dla $t \neq 0$: $\Sigma_t^{\pm} = \{x \in \Sigma_t \mid \mu_t(x) = \pm 1\}$,

gdzie $\mu_t(x)$ jest lokalnym stopniem topologicznym kiełka f_t w x

---

Stosują Twierdzenie (1) można obliczyć:

$\#\Sigma_{-t}^{+} - \#\Sigma_{-t}^{-}$ and $\#\Sigma_t^{+} - \#\Sigma_t^{-}$,

gdy $t > 0$ jest bliskie zeru

Dla $t \neq 0$: $\Sigma_t^{\pm} = \{x \in \Sigma_t \mid \mu_t(x) = \pm 1\}$,

gdzie $\mu_t(x)$ jest lokalnym stopniem topologicznym kiełka f_t w x

---

Stosują Twierdzenie (1) można obliczyć:

$\#\Sigma_{-t}^{+} - \#\Sigma_{-t}^{-}$ and $\#\Sigma_t^{+} - \#\Sigma_t^{-}$,

gdy $t > 0$ jest bliskie zeru

Aby obliczyć $\#\Sigma_t^{\pm}$ wystarczy obliczyć:

$$b_0 = \#\Sigma_t^{+} + \#\Sigma_t^{-} + \#\Sigma_{-t}^{+} + \Sigma_{-t}^{-},$$

$$b_0'/2 = \#\Sigma_t^{+} + \#\Sigma_t^{-}.$$

Wiadomo że b_0 jest liczbą gałęzi krzywej

$$V(J, F_1, F_2) \subset \mathbb{R}^3$$

blisko $\mathbf{0}$

Wiadomo że b_0 jest liczbą gałęzi krzywej

$$V(J, F_1, F_2) \subset \mathbb{R}^3$$

blisko $\mathbf{0}$

W artykule A. Nowel, Z. Szafraniec, On the number of branches of a real curve singularities. *Bull. London Math. Soc.* (2011)

przedstawiono metodę liczenia liczby gałęzi rzeczywistej krzywej w R^n zdefiniowanej przez $m \geq n$ analitycznych równań.

Należy sprawdzić dodatkowe założenie:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_3 / \left\langle F_1, F_2, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(t, x_1)}, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(t, x_2)}, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right\rangle < \infty$$

Należy sprawdzić dodatkowe założenie:

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_3 / \left\langle F_1, F_2, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(t, x_1)}, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(t, x_2)}, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right\rangle \ < \ \infty$$

Obliczyć

$$\xi = \min\{s \ : \ t^s \cdot J \in \langle F_1, F_2, J^2 \rangle \ \},$$

(ξ jest zawsze skończone)

$k > \xi$ - liczba parzysta.

Odwzorowania

$$H_{\pm} = \left(\frac{\partial(J \pm t^k, F_1, F_2)}{\partial(t, x_1, x_2)}, F_1, F_2 \right) : \mathbb{R}^3, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^3, \mathbf{0}$$

mają algebraicznie izolowane zero w $\mathbf{0}$

Odwzorowania

$$H_\pm = \left(\frac{\partial(J \pm t^k, F_1, F_2)}{\partial(t, x_1, x_2)}, F_1, F_2 \right) : \mathbb{R}^3, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^3, \mathbf{0}$$

mają algebraicznie izolowane zero w $\mathbf{0}$

Lliczba gałęzi krzywej $V(J, F_1, F_2) \subset \mathbb{R}^3$

leżących blisko $\mathbf{0}$, jest równa

$$b_0 = \deg_{\mathbf{0}}(H_+) - \deg_{\mathbf{0}}(H_-)$$

Odwzorowania

$$H_{\pm} = \left(\frac{\partial(J \pm t^k, F_1, F_2)}{\partial(t, x_1, x_2)}, F_1, F_2 \right) : \mathbb{R}^3, \mathbf{0} \to \mathbb{R}^3, \mathbf{0}$$

mają algebraicznie izolowane zero w $\mathbf{0}$

Lliczba gałęzi krzywej $V(J, F_1, F_2) \subset \mathbb{R}^3$

leżących blisko $\mathbf{0}$, jest równa

$$b_0 = \deg_{\mathbf{0}}(H_+) - \deg_{\mathbf{0}}(H_-)$$

Podobnie można obliczyć liczbę b_0' .

Example 1.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^3 + x_2^2 + tx_1, x_1 x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 3$$

Example 1.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^3 + x_2^2 + tx_1, x_1 x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 3$$

Example 2.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + tx_1, x_1 x_2 + tx_2),$$

$$f_t(x_1, x_2) = f_{-t}(-x_1, -x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 1.$$

Example 1.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^3 + x_2^2 + tx_1, x_1 x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 3$$

Example 2.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + tx_1, x_1 x_2 + tx_2),$$

$$f_t(x_1, x_2) = f_{-t}(-x_1, -x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 1.$$

Ostrza są osobliwościami typu $\Sigma^{1,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Example 1.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^3 + x_2^2 + tx_1, x_1 x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 3$$

Example 2.

$$f = (f_1, f_2) = (x_1^4 + x_2^4 + x_1^2 x_2^2 + tx_1, x_1 x_2 + tx_2),$$

$$f_t(x_1, x_2) = f_{-t}(-x_1, -x_2),$$

$$\#\Sigma_t^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_t^- = 1,$$

$$\#\Sigma_{-t}^+ = 0\ ,\ \#\Sigma_{-t}^- = 1.$$

Ostrza są osobliwościami typu $\Sigma^{1,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

$$\Sigma^{1,1,1}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3), \quad \Sigma^{1,1,1,1}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4), \quad \Sigma^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)\ \ (?)$$