MATERIAŁY NA XXVIII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2007 **Łódź** **str. 69**

TRYWIALIZACJA WIELOMIANU W NIESKOŃCZONOŚCI A WARUNEK MALGRANGE'A

Stanisław Spodzieja (Łódź)

Streszczenie

W opracowaniu pokazano wpływ warunku Malgrange'a na trywializację wielomianu w otoczeniu poziomicy.

1 Trywializacja wielomianu

Niech $f \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ będzie wielomianem dodatniego stopnia. Wielomian f traktujemy jako funkcję $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Ważnym problemem w teorii wielomianów jest:

Problem 1. *Czy dla ustalonego $\lambda \in \mathbb{C}$ istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ takie, że dla każdych λ_1, $\lambda_2 \in U$, włókna $f^{-1}(\lambda_1)$, $f^{-1}(\lambda_2)$ są dyfeomorficznie równoważne?*

Powyższy problem zilustrujemy przykładem (patrz [9], [8]).

Przykład 1. *Niech $f(z_1, z_2) = z_1 z_2^2 + z_2$. Wówczas*

$$f^{-1}(0) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = 0\} \cup \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 z_2 + 1 = 0\}$$

nie jest zbiorem spójnym. Dla $\lambda \neq 0$, $f^{-1}(\lambda)$ jest wykresem funkcji meromorficznej $z_1 = \frac{\lambda - z_2}{z_2^2}$, więc jest to zbiór spójny. Wynika stąd, że nie znajdziemy otoczenia $U \subset \mathbb{C}$ punktu 0, w którym problem 1 ma rozwiązanie. Łatwo sprawdzamy zaś, że dla każdego $\lambda \neq 0$, problem 1 ma rozwiązanie.

Narzućmy na punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniający problem 1 dodatkowy warunek, że jest to wartość typowa wielomianu f, którą definiujemy następująco:

Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *wartością typową* wielomianu f, gdy istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ takie, że funkcja $f : f^{-1}(U) \to U$ jest trywialną wiązką klasy $\mathcal{C}^\infty$, tzn. istnieje odwzorowanie $\Psi_1 : f^{-1}(U) \to f^{-1}(\lambda)$ takie, że odwzorowanie

$$\Psi = (\Psi_1, f) : f^{-1}(U) \ni z \longmapsto (\Psi_1(z), f(z)) \in f^{-1}(\lambda) \times U$$

jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\infty$. Odwzorowanie Ψ nazywamy *trywializacją f nad otoczeniem U*.

Punkt $\lambda \in \mathbb{C}$ który nie jest wartością typową wielomianu f nazywamy *punktem bifurkacyjnym* wielomianu f.

W terminach wartości typowych, problem 1 prowadzi do następującego:

Problem 2. *Czy ustalone $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością typową wielomianu f ?*

Wprost z definicji wynika, że każda wartość typowa $\lambda \in \mathbb{C}$ ma otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ takie, że dla każdych λ_1, $\lambda_2 \in U$, włókna $f^{-1}(\lambda_1)$, $f^{-1}(\lambda_2)$ są dyfeomorficznie równoważne (tzn. problem 1 ma rozwiązanie). Ponadto mamy:

Własność 1. *Żadna wartość krytyczna $\lambda \in \mathbb{C}$ wielomianu f nie jest jego wartością typową.*

Zanim przejdziemy do wartości regularnych wielomianu f, wprowadźmy definicje. *Gradientem* ∇f wielomianu f nazywamy odwzorowanie

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n} \right) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n.$$

Ponieważ w dalszym ciągu będziemy stosować iloczyn skalarny nad $\mathbb{C}$, więc wygodnie jest przyjąć:

$$\overline{a} = (\overline{a_1} \ldots, \overline{a_n}), \qquad \text{dla} \qquad a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Wtedy

$$\overline{\nabla f} = \left(\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)}, \ldots, \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z_n} \right)} \right).$$

Przestrzń $\mathbb{C}^n$ możemy utożsamić z przestrzenią $\mathbb{R}^{2n}$, następująco

$$\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Niech teraz $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie wartością regularną wielomianu f, tzn. gradient ∇f wielomianu f w zbiorze $f^{-1}(\lambda)$ nigdzie nie znika. Wtedy istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ takie, że również ∇f nigdzie nie znika w $f^{-1}(U)$. Rozważmy układ $2n$ rzeczywistych równań różniczkowych zwyczajnych autonomicznych z parametrem z

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = (\lambda - f(z))\frac{\overline{\nabla f}(y)}{|\nabla f(y)|^2} \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad y(0) = z,$$

gdzie $|\cdot|$ oznacza normą euklidesową w $\mathbb{C}^n$ (lub w $\mathbb{R}^{2n}$). Rozważając rozwiązanie ogólne (inaczej charakterystyczne) układu 1, dostajemy

Własność 2. *Jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością regularną wielomianu f, to dla każdego $R > 0$ istnieje zbiór otwarty $G \subset \mathbb{C}^n$ i otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ, że $\{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leqslant R\} \subset G$ oraz $f : f^{-1}(U) \cap G \to U$ jest trywialną wiązką klasy $\mathcal{C}^\infty$. Dokładniej, odwzorowanie*

$$\Psi : f^{-1}(U) \cap G \ni z \mapsto (y(1), f(z)) \in [f^{-1}(\lambda) \cap G] \times U,$$

gdzie $y : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ jest rozwiązaniem (1), jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Uwaga 1. *Powyższa własność nasuwa pytanie:*

> *Czy dla ustalonej wartości regularnej $\lambda \in \mathbb{C}$ wielomianu f można powiększać nieograniczenie R we własności 2 aby uzyskać odpowiednią trywializację f w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(\lambda)$?*

Okazuje się, że sposób postępowania sugerowany powyżej może nie prowadzić do odpowiedniej trywializacji; nie można bowiem zagwarantować istnienia otoczenia U punktu λ wspólnego dla wszystkich $R > 0$. Można się o tym przekonać rozważając wielomian $f(z_1, z_2) = z_1 z_2^2 + z_2$ z przykładu 1, mianowicie prostym rachunkiem pokazujemy, że wielomian f nie ma wartości krytycznych, jednak punkt $\lambda = 0$ nie jest jego wartością typową.

Rozwiązanie problemu 1 nie sprowadza się więc do prostego odrzucenia wartości krytycznych wielomianu f. Musimy jeszcze narzucić pewne warunki aby istniała trywializacja funkcji f w otoczeniu nieskończoności. Prowadzi to do następnego pojęcia.

Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest *wartością typową w nieskończoności* wielomianu f, gdy istnieje otoczenie $U \subset \mathbb{C}$ punktu λ i zbiór zwarty $K \subset \mathbb{C}^n$ takie, że $f : f^{-1}(U) \setminus K \to U$ jest trywialną wiązką klasy $\mathcal{C}^\infty$, dokładniej, istnieje odwzorowanie $\Phi_1 : f^{-1}(U) \setminus K \to f^{-1}(\lambda) \setminus K$ takie, że odwzorowanie

$$\Phi = (\Phi_1, f) : f^{-1}(U) \setminus K \ni z \longmapsto (\Phi_1(z), f(z)) \in [f^{-1}(\lambda) \setminus K] \times U$$

jest dyfeomorfizmem klasy $\mathcal{C}^\infty$. Wtedy odwzorowanie Φ nazywamy *trywializacją f w nieskończoności nad otoczeniem U*.

Celem tego opracowania jest pokazanie wpływu wykładnika Łojasiewicza gradientu wielomianu f w nieskończoności w otoczeniu poziomicy, a dokładniej warunku Malgrange'a, na trywializację w nieskończoności wielomianu f. Łatwo to zaobserwować rozważając odwzorowanie (patrz [11]):

$$v(z) = \overline{\nabla f}(z) - \frac{\langle \overline{\nabla f}(z), z\rangle}{|z|^2} z, \qquad z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \tag{2}$$

gdzie $\langle a, b\rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów a, $b \in \mathbb{C}^n$. Widzimy, że dla każdego $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, wektor $v(z)$ jest rzutem prostokątnym $\overline{\nabla f}(z)$ na przestrzeń styczną $T_z S$ do sfery $S = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| = |z|\}$ w punkcie z (patrz własność 4).

Biorąc

$$w(z) = \frac{v(z)}{\langle v(z), \overline{\nabla f}(z)\rangle}, \tag{3}$$

przy założeniu, że

$$\langle v(z), \overline{\nabla f}(z)\rangle \neq 0, \tag{4}$$

dostajemy

$$\frac{\partial f}{\partial w} = 1.$$

Jest to kluczowa własność pola w prowadząca do konstrukcji trywializacji Φ. Główną trudnością jest podanie takich warunków na gradient ∇f aby zachodziło (4) w otoczeniu poziomicy $f^{-1}(\lambda)$ dla dostatecznie dużych $|z|$. Warunkiem takim jest na przykład *warunek Malgrange'a*:

$$|z||\nabla f(z)| \geqslant \delta \qquad \text{dla} \qquad |z| \geqslant R, \quad |f(z) - \lambda| \leqslant \varepsilon, \tag{M}$$

gdzie R, ε, $\delta > 0$. Dokładniej, mamy (por. [11], dowód Lematu 1.2)

Twierdzenie 1. *Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Jeśli spełniony jest warunek* (M)*, to istnieje $R' \geqslant R$, że zachodzi* (4) *dla $|z| \geqslant R'$ i $|f(z) - \lambda| \leqslant \varepsilon$.*

Dowód twierdzenia 1 zamieszczamy w punkcie 3. Păunescu i Zaharia [10] pokazali, że twierdzenia 1 nie można odwrócić.

Twierdzenie 1 pozwala wyznaczać trywializację f w nieskończoności przez rozwiązanie układu $2n$ rzeczywistych równań różniczkowych zwyczajnych z parametrem z

$$\frac{dy}{dt} = (\lambda - f(z))w(y) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad y(0) = z. \tag{5}$$

Twierdzenie 2. *Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Jeśli zachodzi warunek* (M)*, to istnieje trywializacja w nieskończoności wielomianu f nad $U = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| < \varepsilon\}$. Dokładniej, dla pewnego $R' \geqslant R$ oraz $K = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leqslant R'\}$, odwzorowanie*

$$\Phi : f^{-1}(U) \setminus K \ni z \mapsto (y(1), f(z)) \in [f^{-1}(\lambda) \setminus K] \times U,$$

gdzie $y : [0,1] \to \mathbb{C}^n$ *jest rozwiązaniem* (5)*, jest trywializacją w nieskończoności wielomianu* f *nad* U*.*

Dowód twierdzenia 2 podajemy na końcu punktu 3.

Warto tutaj zauważyć, że w ogólnym przypadku spełnianie przez wielomian f warunku Malgrange'a nad λ nie jest równoważne temu, że λ jest wartością typową wielomianu f. Odpowiedni kontrprzykład podali L. Păunescu i A. Zaharia w pracy [10]. W przypadku jednak dwuwymiarowym zachodzi:

Twierdzenie 3. (Ha, [5], Parusiński, [11]) *Jeśli* $n = 2$*, to* $\lambda \in \mathbb{C}$ *jest wartością typową wielomianu* f *wtedy i tylko wtedy, gdy* f *spełnia nad* λ *warunek* (M)*.*

2 Wykładnik Łojasiewicza

Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem dodatniego stopnia.

Niech $S \subset \mathbb{C}^n$. *Wykładnikiem Łojasiewicza gradientu* ∇f *na zbiorze* S nazywamy

$$\mathcal{L}_\infty(\nabla f|S) = \sup\{\vartheta \in \mathbb{R} : \exists_{C,R>0}\ |\nabla f(x)| \geqslant C|x|^\vartheta \ \text{ gdy } \ x \in S, \ \ |x| > R\}.$$

Wykładnikiem Łojasiewicza gradientu ∇f *w otoczeniu poziomicy* $f^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, wielomianu f, nazywamy

$$\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) := \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{L}_\infty(\nabla f | f^{-1}(U_\delta)),$$

gdzie $U_\delta = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi - \lambda| < \delta\}$.

Warunek Malgrange'a występujący w założeniach głównych twierdzeń 1 i 2 można zapisać w terminach wykładnika $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f)$. Mianowicie, mamy

Własność 3. *Niech* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Wielomian* f *spełnia warunek* (M) *nad* λ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}(f) \geqslant -1$*. Ponadto zbiór tych* $\lambda \in \mathbb{C}$ *dla których wielomian* f *nie spełnia warunku* (M) *jest skończony.*

W świetle powyższej własności, w trywializacji wielomianu, istotne są oszacowania od dołu wykładnika Łojasiewicza w nieskończoności. Zagadnienie to interesuje wielu matematyków, na przykład: Brownawella [1]; Chądzyńskiego [2]; Chądzyńskiego i Krasińskiego [3]; Cygan, Krasińskiego i Tworzewskiego [4]; Ha [5]; Ji, Kollára i Shiffmana [6]; Kollára [7]; Parusińskiego [11]; Płoskiego [12].

3 Dowody twierdzeń 1 i 2

Niech w dalszym ciągu $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem dodatniego stopnia i niech v będzie polem wektorowym określonym wzorem (2).

Własność 4. *Dla każdego* $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ *mamy*

$$\langle z, v(z) \rangle = 0. \tag{6}$$

Ponadto $v(z)$ *jest rzutem prostokątnym* $\overline{\nabla f}(z)$ *na przestrzeń styczną* $T_z S$ *do sfery* $S = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| = |z|\}$ *w punkcie* z.

Dowód. Dla $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$$\langle z, v(z) \rangle = \langle z, \overline{\nabla f}(z) \rangle - \overline{\left(\frac{\langle \overline{\nabla f}(z), z \rangle}{|z|^2} \right)} \langle z, z \rangle = \langle z, \overline{\nabla f}(z) \rangle - \langle z, \overline{\nabla f}(z) \rangle = 0,$$

więc mamy (6). Ponadto

$$\frac{\langle \overline{\nabla f}(z), z \rangle}{|z|^2} z \in \mathbb{C} z,$$

i prosta $\mathbb{C} z$ jest prostopadła do $T_z S$, więc mamy tezę. □

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia 1, podamy prostą lecz kluczową w tym dowodzie własność krzywej meromorficznej w nieskończoności.

Krzywą $\varphi : [r, +\infty) \to \mathbb{C}^n$, gdzie $r \in \mathbb{R}$, nazywamy *meromorficzną w nieskończoności*, gdy φ jest sumą szeregu Laurenta w nieskończoności postaci:

$$\varphi(t) = a_p t^p + a_{p-1} t^{p-1} + \cdots, \qquad a_j \in \mathbb{C}^n, \quad p \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Jeśli $\varphi \neq 0$, to można założyć, że $a_p \neq 0$, wtedy liczbę p nazywamy *stopniem krzywej* φ i oznaczamy $\deg \varphi$. Dodatkowo dla $\varphi = 0$, kładziemy $\deg \varphi = -\infty$.

Własność 5. *Stopień pochodnej każdej krzywej meromorficznej w nieskończoności jest różny od* -1.

Dowód. Dla krzywej φ meromorficznej w nieskończoności postaci (7), mamy

$$\varphi'(t) = p a_p t^{p-1} + (p-1) a_{p-1} t^{p-2} + \cdots.$$

Ponieważ $\deg j t^{j-1} \neq -1$ dla każdego $j \in \mathbb{Z}$, więc dostajemy tezę. □

Stosując własność 5 udowodnimy teraz twierdzenie 1.

Dowód twierdzenia 1. Przypuśćmy, że teza nie zachodzi. Wówczas zbiór semialgebraiczny

$$X = \{z \in \mathbb{C}^n : \quad \langle v(z), \overline{\nabla f}(z) \rangle = 0, \quad |z| \geqslant R, \quad |f(z) - \lambda| \leqslant \varepsilon\}$$

jest nieograniczony. Stosując więc lemat o wyborze krzywej w nieskończoności, istnieje krzywa $\varphi : [r, +\infty) \to X$ meromorficzna w nieskończoności taka, że $\deg \varphi > 0$ oraz

$$\langle v(\varphi(t)), \overline{\nabla f}(\varphi(t)) \rangle = 0 \qquad \text{dla} \quad t \in [r, +\infty). \tag{8}$$

Z definicji pola v mamy

$$\langle v(\varphi(t)), \overline{\nabla f}(\varphi(t))\rangle = |\overline{\nabla f}(\varphi(t))|^2 - \frac{|\langle \varphi(t), \overline{\nabla f}(\varphi(t))\rangle|^2}{|\varphi(t)|^2} \quad \text{dla} \quad t \in [r, +\infty).$$

Stąd i z (8), wobec założenia, że f spełnia warunek (M),

$$|\langle \varphi(t), \overline{\nabla f}(\varphi(t))\rangle|^2 = |\varphi(t)|^2 |\overline{\nabla f}(\varphi(t))|^2 \geqslant \delta^2 \qquad \text{dla} \quad t \in [r, +\infty).$$

Zapisując powyższe w terminach stopni, dostajemy

$$\deg\langle \varphi, \overline{\nabla f} \circ \varphi\rangle = \deg \varphi + \deg(\overline{\nabla f} \circ \varphi) \geqslant 0. \tag{9}$$

Niech

$$\varphi(t) = a_p t^p + a_{p-1} t^{p-1} + \cdots, \qquad a_j \in \mathbb{C}^n, \quad p = \deg \varphi,$$

Z (9) mamy $\overline{\nabla f}(\varphi(t)) \neq 0$ dla $t \in [r, +\infty)$. Możemy więc zapisać

$$\overline{\nabla f}(\varphi(t)) = b_s t^s + b_{s-1} t^{s-1} + \cdots, \qquad b_j \in \mathbb{C}^n, \quad s = \deg \overline{\nabla f}(\varphi).$$

Wówczas

$$\langle \varphi(t), \overline{\nabla f}(\varphi(t))\rangle = \langle a_p, b_s\rangle t^{p+s} + \text{ wyrazy niższych stopni,} \tag{10}$$

Zauważmy, że

$$\langle a_p, b_s\rangle = 0. \tag{11}$$

Istotnie,

$$(f(\varphi(t)) - \lambda)' = \langle \varphi'(t), \overline{\nabla f}(\varphi(t))\rangle = p\langle a_p, b_s\rangle t^{p+s-1} + \text{ wyrazy niższych stopni.}$$

Z wyboru krzywej φ mamy, że funkcja $f \circ \varphi - \lambda$ jest ograniczona, a więc $\deg(f \circ \varphi - \lambda) \leqslant 0$, zatem

$$\deg(f \circ \varphi - \lambda)' \leqslant -1.$$

Przypuśćmy, że (11) nie zachodzi. Wówczas, wobec $p = \deg \varphi > 0$, mamy $p\langle a_p, b_s\rangle \neq 0$, a więc

$$\deg(f \circ \varphi - \lambda)' = p + s - 1.$$

Z (9) wynika, że $p + s \geqslant 0$. W konsekwencji krzywa $f \circ \varphi - \lambda$ meromorficzna w nieskończoności spełnia warunek

$$\deg(f \circ \varphi - \lambda)' = -1.$$

To przeczy własności 5 i dowodzi (11). Reasumując z (11) i (10) mamy

$$\deg\langle \varphi, \overline{\nabla f} \circ \varphi\rangle < \deg \varphi + \deg(\overline{\nabla f} \circ \varphi).$$

To przeczy (9) i kończy dowód. $\square$

Z twierdzenia 1 i własności 4 dostajemy

Wniosek 1. *Jeśli wielomian f spełnia warunek* (M) *nad $\lambda \in \mathbb{C}$ dla pewnych $R, \varepsilon, \delta > 0$, to istnieje $R' > 0$, że dla $|z| > R'$, $|f(z) - \lambda| \leqslant \varepsilon$:*

(a) $w(z) \neq 0$.

(b) $w(z) \in T_z S$, *gdzie* $S = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| = |z|\}$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial w}(z) = 1$.

Dowód. Części (a) i (b) wynikają bezpośrednio z twierdzenia 1 i własności 4. Część (c) dostajemy z określenia pola w i reguły łańcucha:

$$\frac{\partial f}{\partial w}(z) = \langle w(z), \overline{\nabla f}(z)\rangle = \frac{\langle v(z), \overline{\nabla f}(z)\rangle}{\langle v(z), \overline{\nabla f}(z)\rangle} = 1.$$

□

Stosując wniosek 1 i elementarne własności równań różniczkowych możemy teraz przedstawić dowód twierdzenia 2

Dowód twierdzenia 2. Ponieważ f spełnia warunek (M), więc w myśl wniosku 1, istnieje $R' \geqslant R$ takie, że zachodzą warunki (a), (b), (c) we wniosku 1. Oznaczmy przez $D = f^{-1}(U) \setminus K$.

Niech $y : [0, \alpha) \to D$ będzie rozwiązaniem prawostronnie integralnym układu (5) z warunkiem początkowym $y(0) = z$, gdzie $z \in D$. Pokażemy, że $\alpha > 1$. Przypuśćmy przeciwnie, że $\alpha \leqslant 1$. Z wniosku 1 (c), mamy $(f \circ y)'(t) = (\lambda - f(z))$ więc, uwzględniając warunek początkowy, dostajemy

$$f \circ y(t) = (\lambda - f(z))t + f(z) \quad \text{dla} \quad t \in [0, \alpha),$$

a więc

$$|f \circ y(t) - \lambda| = |f(z) - \lambda||t - 1| \leqslant |f(z) - \lambda| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad t \in [0, \alpha).$$

Z wniosku 1 (b) wynika, że wartości odwzorowania y leżą na sferze $S = \{x \in \mathbb{C}^n : |x| = |z|\}$, więc z powyższego, rozwiązanie y przebiega w zwartym podzbiorze $\{x \in \mathbb{C}^n : |x| = |z|,\ |f(x) - \lambda| \leqslant |f(z) - \lambda|\}$ zbioru D, co jest niemożliwe. Zatem $\alpha > 1$ i rozwiązanie y jest określone w przedziale $[0, 1]$. Jednoznaczność rozwiązania $y : [0, 1] \to D$ układu (5) wynika z faktu, że prawa strona (5) jest lokalnie Lipschitzowska (jako klasy $\mathcal{C}^\infty$). W konsekwencji odwzorowanie Φ jest poprawnie określone. Ponieważ prawa strona (5) jest klasy $\mathcal{C}^\infty$, więc Φ jest również klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Rozważmy teraz układ równań różniczkowych

$$(12) \qquad y' = (\xi - \lambda)w(y) \quad \text{z warunkiem początkowym} \quad y(0) = z \in f^{-1}(\lambda) \setminus K.$$

Wówczas, analogicznie jak poprzednio, biorąc rozwiązanie $y : [0, 1] \to D$ układu (12), gdzie $\xi \in U$, dostajemy łatwo, że

$$f(y(t)) = (\xi - \lambda)t + \lambda, \qquad t \in [0, 1],$$

więc $f(y(1)) = \xi$. Ponadto odwzorowanie $\psi(t) = y(1-t)$, $t \in [0,1]$ spełnia układ (5) z warunkiem początkowym $\psi(0) = y(1)$. W konsekwencji $\Phi(y(1)) = (z,\xi)$, czyli

$$\Phi^{-1}(z,\xi) = y(1).$$

Analogicznie jak poprzednio dostajemy, że Φ^{-1} jest odwzorowaniem klasy $\mathcal{C}^\infty$. To daje tezę. $\square$

4 Errata do pracy O $\mathcal{C}^0$ determinowalności dżetów

W artykule

[S] S. Spodzieja, *O $\mathcal{C}^0$ determinowalności dżetów*, Materiały na XXVII Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź 2006, 63-81.

podałem następujący

Przykład 2. (Whitney). *Niech*

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1+x_2)(x_1-ax_2), \quad g(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1+x_2)(x_1-bx_2),$$

gdzie $a,b>0$ są parametrami. W myśl wniosku 1 w punkcie 2 (zgodnie z oznaczeniami w [S]), dla każdych $a,b>0$ funkcje f i g są $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze. Dla $a \neq b$, funkcje f i g nie są nawet $\mathcal{C}^1$-równoważne. Gdyby istniały dyfeomorfizmy $\varphi : (\mathbb{R}^2,0) \to (\mathbb{R}^2,0)$, $\psi : (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0)$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\psi \circ f = g \circ \varphi$ w pewnym otoczeniu zera, to różniczka $d_0\varphi$ w zerze musiałaby przekształcać przestrzenie styczne w zerze do składowych $f^{-1}(0)$ na odpowiednie przestrzenie styczne do składowych $g^{-1}(0)$. Wówczas $d_0\varphi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ co, jak łatwo sprawdzić, jest niemożliwe.

Podane w przykładzie rozumowanie jest błędne. Biorąc bowiem funkcje $f(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1+x_2)(x_1-\frac{1}{2}x_2)$, $g(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1+x_2)(x_1-2x_2)$ oraz $\varphi(x_1,x_2) = (x_2,x_1)$, $\psi(t) = -2t$, dostajemy $g \circ \varphi(x_1,x_2) = \psi \circ f(x_1,x_2)$, a więc funkcje f i g są analitycznie równoważne w zerze.

Przykład 2 powinien brzmieć następująco:

Przykład 3. (Whitney). *Niech*

$$f(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1+x_2)(x_1-ax_2), \quad g(x_1,x_2) = x_1x_2(x_1+x_2)(x_1-bx_2),$$

gdzie $a,b>0$ są parametrami. W myśl wniosku 1 w punkcie 2 (zgodnie z oznaczeniami w [S]), dla każdych $a,b>0$ funkcje f i g są $\mathcal{C}^0$-równoważne w zerze. Dla ustalonego $a>0$, poza ewentualnie skończoną ilością wartości $b>0$, funkcje f i g nie są nawet $\mathcal{C}^1$-równoważne. Jeśli bowiem istnieją dyfeomorfizmy $\varphi : (\mathbb{R}^2,0) \to (\mathbb{R}^2,0)$, $\psi : (\mathbb{R},0) \to (\mathbb{R},0)$ klasy $\mathcal{C}^1$ takie, że $\psi \circ f = g \circ \varphi$ w pewnym otoczeniu zera, to różniczka $d_0\varphi$ w zerze przekształca przestrzenie styczne w zerze do składowych $f^{-1}(0)$ na odpowiednie przestrzenie styczne do składowych $g^{-1}(0)$. Wówczas

$d_0\varphi(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$ *co, jak łatwo sprawdzić, jest możliwe tylko dla skończonej ilości wartości* $b > 0$.

W dowodzie wniosku 1 z pracy [S] (strona 74, wiersz 9 od góry) wkradło się kilka błędów zecerskich, które mogą utrudnić czytanie. Wobec tego przytaczam fragment dowodu wniosku z usuniętymi błędami:

Dowód wniosku 1. Niech $k = \deg f$. Wystarczy ograniczyć się do przypadku, gdy

$$f(x) = (\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2)h(x) \quad \text{i} \quad g(x) = (\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2)h(x),$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ i $h \in \mathbb{R}[x_1, x_2]$ jest formą stopnia $k - 1$. Ponadto można założyć, że f i g nie różnią się jedynie czynnikiem stałym oraz, że obszar $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n : \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 > 0,\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 > 0\}$ jest rozłączny ze zbiorem $h^{-1}(0)$.

Literatura

[1] W. D. Brownawell, *Local diophante Nullstellen inequalities*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 311-322.

[2] J. Chądzyński, *On proper polynomial mappings*, Bull. Acad. Polon. Sci. Math. 31 (1983), 115-120.

[3] J. Chądzyński, T. Krasiński, *The gradient of a polynomial at infinity*, Kodai Math. J. 26 (2003), 317-339.

[4] E. Cygan, T. Krasiński, P. Tworzewski, *Separation of algebraic sets and the Łojasiewicz exponent of polynomial mappings*, Inv. Math. 136 (1999), 75-87.

[5] H. V. Ha, *Nombres de Łojasiewicz et singularités à l'infini des polynômes de deux variables complexes*, C. R. Acad. Sci. Paris 311 (1990), 429-432.

[6] S. Ji, J. Kollár, B. Shiffman, *A global Łojasiewicz inequality for algebraic varieties*, Transacti on of Amer. Math. Soc. 329 (2) (1992), 813-818.

[7] J. Kollár, *Sharp effective Nullstellensatz*, J. Amer. Math. Soc. 1 (1988), 963-975.

[8] T. Krasiński, *Poziomice wielomianów dwóch zmiennych a hipoteza jakobianowa*, Acta Universitatis Lodziensis, Wyd. UŁ, Łódź 1991

[9] T. T. Moh, *On analytic irreducibility at ∞ of a pencil of curves*, Proc. Amer. Math. Soc. 44 (1974), 22-24.

[10] L. Păunescu, A. Zaharia *On the Łojasiewicz exponent at infinity for polynomial functions*, Kodai Math. J. 20 (1997), 269-274.

[11] A. Parusiński, *On the bifurcation set of complex polynomial with isolated singularities at infinity*, Composito Math. 97 (1995), 369-384.

[12] A. Płoski, *On the growth of proper polynomial mappings*, Ann. Polon. Math. 45 (1985), 297-309.

Triviality of a polynomial at infinity and the Malgrange condition

Summary. We explain triviality of a polynomial at infinity in context of the Malgrange condition.

Łódź, 8 – 12 stycznia 2007 r.