MATERIAŁY XXII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2001 **Łódź** **str. 23**

GENERYCZNE PRZECIĘCIA ZBIORU ALGEBRAICZNEGO HIPERPŁASZCZYZNAMI

Stanisław Spodzieja (Łódź)

Streszczenie. Niech $V \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem algebraicznym i S podprzestrzenią liniową $\mathbb{C}^N$. W pracy pokazujemy, że indeks przecięcia w sensie Tworzewskiego zbiorów V i S jest osiągnięty na generycznym układzie hiperpłaszczyzn zawierających S.

1. Wstęp

Cyklem algebraicznym w $\mathbb{C}^N$ nazywamy formalną sumę $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i C_i$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ oraz C_i są nierozkładalnymi, parami różnymi, zbiorami algebraicznymi w $\mathbb{C}^N$. Zbiory C_i nazywamy *składowymi cyklu*, $|\mathcal{Z}| = \bigcup_{i=1}^{j} C_i$ — *nośnikiem cyklu*, liczby α_i — *współczynnikami cyklu*. Jeśli wszystkie $\alpha_i > 0$, to *cykl* nazywamy *dodatnim*. Liczbę $\deg \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \deg C_i$ nazywamy *stopniem cyklu* $\mathcal{Z}$, liczbę $\deg_x \mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i \deg_x C_i$ — *stopniem cyklu* $\mathcal{Z}$ *w punkcie* $x \in \mathbb{C}^N$. Jeśli wszystkie składowe cyklu $\mathcal{Z}$ mają ten sam wymiar k, to $\mathcal{Z}$ nazywamy k*-cyklem*.

Pojęcie *cyklu przecięcia właściwego* zbiorów analitycznych (oraz cykli) przyjmujemy za Draperem [D], pojęcie *cyklu przecięcia niewłaściwego* za Tworzewskim [T].

Niech $N = n + m$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$. Oznaczmy $S = \mathbb{C}^n \times \{0\} \subset \mathbb{C}^N$. Dla zbioru algebraicznego $Z \subset \mathbb{C}^N$, przez Z^S oznaczamy sumę wszystkich składo-

This research was partially supported by KBN Grant No. 2 P03A 007 18

wych nierozkładalnych zbioru Z zawartych w S, przez $Z - Z^S$ — sumę pozostałych składowych zbioru Z. Analogiczną konwencję stosujemy dla cykli algebraicznych $\mathcal{Z} = \sum_{i=1}^{j} \alpha_i C_i$. Mianowicie $\mathcal{Z}^S = \sum_{C_i \subset S} \alpha_i C_i$ oraz $\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^S = \sum_{C_i \not\subset S} \alpha_i C_i$.

Niech $V \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem algebraicznym nierozkładalnym wymiaru k takim, że $\emptyset \neq V \cap S \neq V$. Niech r będzie wymiarem rzutu zbioru V na $\{0\} \times \mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^N$ (rzut ten jest zbiorem konstruowalnym algebraicznie).

Oznaczmy przez $\mathcal{H}_S$ zbiór wszystkich układów hiperpłaszczyzn $(H_1, ..., H_r)$ takich, że $S \subset H_i \subset \mathbb{C}^N$ ($\mathcal{H}_S$ jest podzbiorem algebraicznym przestrzeni $\mathcal{G}^r$, gdzie $\mathcal{G}$ jest przestrzenią Grassmana wszystkich podprzestrzeni liniowych $\mathbb{C}^N$ wymiaru $N-1$). Niech $\mathcal{H}_S(V) \subset \mathcal{H}_S$ będzie podzbiorem wszystkich tych $H = (H_1, ..., H_r) \in \mathcal{H}_S$ dla których, przyjmując $Z_{H,0} = V$, następujące przecięcia są właściwe

$$Z_{H,j} = (Z_{H,j-1} - Z^S_{H,j-1}) \cap H_j, \quad 1 \leq j \leq r.$$

$\mathcal{H}_S(V)$ zawiera otwarty w topologii Zariskiego i niepusty podzbiór zbioru $\mathcal{H}_S$ (patrz propozycja 1 w punkcie 2). Każdy układ $H = (H_1, ..., H_r) \in \mathcal{H}_S(V)$ wyznacza ciąg cykli przecięć właściwych (w sensie Drapera)

$$\mathcal{Z}_{H,j} = (\mathcal{Z}_{H,j-1} - \mathcal{Z}^S_{H,j-1}) \cdot H_j, \quad 1 \leq j \leq r, \quad \text{gdzie } \mathcal{Z}_{H,0} = V.$$

Wówczas $\mathcal{Z}_{H,j}$ jest dodatnim $(k-j)$-cyklem.

W punkcie 5 pracy pokazujemy, następujące

Twierdzenie 1. *Istnieje otwarty w topologii Zariskiego i niepusty podzbiór $\mathcal{H}_S^{\neq}(V) \subset \mathcal{H}_S(V)$ taki, że dla każdego $H \in \mathcal{H}_S^{\neq}(V)$, wszystkie współczynniki cykli*

$$\mathcal{Z}_{H,j} - \mathcal{Z}^S_{H,j}, \quad 1 \leq j \leq r-1$$

są równe 1. □

Weźmy dowolny $x \in S$ oraz odwzorowanie

$$\tilde{\nu}_x : \mathcal{H}_S(V) \ni H \mapsto (\deg_x \mathcal{Z}^S_{H,1}, \ldots, \deg_x \mathcal{Z}^S_{H,r}) \in \mathbb{N}^r.(^*)$$

Rozszerzonym indeksem przecięcia zbioru V z przestrzenią S w punkcie x nazywamy

$$\tilde{g}(x) = \min{}_{lex}\{\tilde{\nu}_x(H) : H \in \mathcal{H}_S(V)\},$$

gdzie $\min_{lex}$ oznacza minimum w porządku leksykograficznym $\mathbb{N}^r$. Zgodnie z [T], odwzorowanie

$$\tilde{g} : S \ni x \longmapsto \tilde{g}(x) \in \mathbb{N}^r$$

nazywamy *rozszerzonym indeksem przecięcia zbioru V z przestrzenią S.*

W punkcie 3 podajemy dowód następującej własności rozszerzonego indeksu, znanej w przypadku analitycznym ([T], twierdzenie 5.4). Dowód ten oparty jest na innej idei niż w [T].

$(^*)$Przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$

Twierdzenie 2. *Rozszerzony indeks przecięcia $\tilde{g}$ zbioru V z przestrzenią S jest odwzorowaniem konstruowalnym algebraicznie i półciągłym z góry, gdzie w $\mathbb{N}^r$ rozważamy porządek leksykograficzny.* $\square$

Z twierdzenia 2 wynika, że *indeks przecięcia zbioru V z S* określony wzorem

$$g : S \ni x \longmapsto (\text{suma współrzędnych } \tilde{g}(x)) \in \mathbb{N}$$

jest funkcją konstruowalną algebraicznie. *Cyklem przecięcia zbioru V z przestrzenią S* nazywamy jedyny cykl algebraiczny $\mathcal{Z}$ o nośniku zawartym w S taki, że

$$\deg_x \mathcal{Z} = g(x), \quad \text{dla wszystkich } x \in S,$$

i oznaczamy $V \bullet S$ (istnienie i jedyność $V \bullet S$ wykazyjemy analogicznie jak w propozycji 2.1(3) z [T]).

Nowak w [N_2], wniosek 6 oraz Achilles i Rams w [AR] wniosek 3 wykazali, że rozszerzony indeks $\tilde{g}(x)$ przecięcia V z S w punkcie x jest osiągnięty na otwartym w topologii naturalnej i gęstym podzbiorze zbioru $\mathcal{H}_S(V)$. Głównym wynikiem pracy jest następujące (udowodnione w punkcie 6) wzmocnienie tego rezultatu. Mianowicie, $\tilde{g}(x)$ jest osiągnięty na otwartym w topologii Zariskiego i niepustym podzbiorze zbioru $\mathcal{H}_S(V)$. Dowodzimy nawet mocniejszy fakt.

Twierdzenie 3. *Istnieje zbiór konstruowalny algebraicznie $\mathcal{W}_S(V) \subset S \times \mathcal{H}_S(V)$ taki, że dla $(x, H) \in \mathcal{W}_S(V)$ zachodzi*

$$\tilde{g}(x) = \tilde{\nu}_x(H)$$

oraz dla każdego $x \in S$ zbiór $\{H \in \mathcal{H}_S(V) : (x, H) \in \mathcal{W}_S(V)\}$ jest niepustym i otwartym w topologii Zariskiego podzbiorem $\mathcal{H}_S(V)$. $\square$

W dalszym ciągu zwrot "dla generycznego $x \in U$" oznacza, że "istnieje podzbiór algebraiczny W taki, że $U \setminus W$ jest gęsty w U oraz dla każdego $x \in U \setminus W$".

Przez $C_x(W)$ oznaczamy stożek styczny do zbioru $W \subset \mathbb{C}^N$ w punkcie x (o wierzchołku w punkcie x) w sensie Whitneya [Wh_3], strona 510.

Jeśli $W \subset \mathbb{C}^N$ jest zbiorem algebraicznym czystego wymiaru l, to piszemy $\dim W \equiv l$.

Ponieważ dla funkcji liniowej $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$, $L \neq 0$, zbiór $H = \ker L$ jest hiperpłaszczyzną w $\mathbb{C}^N$, więc w pracy będziemy zamiennie używać pojęć hiperpłaszczyzny i funkcji liniowej.

2. Przecięcia zbioru algebraicznego generycznym układem hiperpłaszczyzn

Niech $N = n + m$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m > 0$. Oznaczmy $S = \mathbb{C}^n \times \{0\} \subset \mathbb{C}^N$. Niech w dalszym ciągu $V \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem algebraicznym nierozkładalnym wymiaru k takim, że $V \cap S \neq \emptyset$. Rozważmy rzutowanie

$$p : \mathbb{C}^N \ni (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \longmapsto (y_1, ..., y_m) \in \mathbb{C}^m.$$

Niech $r = \dim p(V)$. Jeśli $r = 0$, to $V \subset S$, więc cyklem przecięcia niewłaściwego zbioru V z przestrzenią S jest $V \bullet S = V$. W dalszym ciągu zajmiemy się przypadkiem $r > 0$, a więc $V \not\subset S$.

Oznaczmy przez $\mathcal{L}_S^j$ zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $L : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^j$ takich, że $S \subset \ker L$. Oczywiście $\mathcal{L}_S^j$ możemy utożsamiać z $\mathbb{C}^{mj}$. Jeśli $j = r$, to $\mathcal{L}_S^j$ oznaczamy przez $\mathcal{L}_S$. Dla $L = (L_1, ..., L_j) \in \mathcal{L}_S^j$ oznaczamy

$$Z_{L,0} = V, \qquad Z_{L,i} = (Z_{L,i-1} - Z_{L,i-1}^S) \cap \ker L_i, \qquad 1 \leq i \leq j.$$

Niech $X^0 = V$,

$$X^j = \overline{\{(w, L) \in \mathbb{C}^N \times \mathcal{L}_S^j : \ w \in V \setminus S, \ L(w) = 0\}}, \quad j \geq 1$$

oraz

$$P_{X^j} : X^j \ni (w, L) \longmapsto L \in \mathcal{L}_S^j, \quad j \geq 1.$$

Lemat 1. *(i) Zbiór X^j jest nierozkładalny wymiaru $k - j + mj$.*

(ii) Jeśli $0 < j < r$, to zbiory

$$\mathcal{U}_{X^j} = \{L \in \mathcal{L}_S^j : \ \dim(P_{X^j})^{-1}(L) \equiv k - j\},$$
$$\tilde{\mathcal{U}}_{X^j} = \{L \in \mathcal{U}_{X^j} : \ \dim[(P_{X^j})^{-1}(L) \cap (S \times \mathcal{L}_S^j)] < k - j\}$$

są otwartymi w topologii Zariskiego i niepustymi podzbiorami $\mathcal{L}_S^j$. Ponadto dla $L \in \tilde{\mathcal{U}}_{X^j}$ mamy

$$(P_{X^j})^{-1}(L) = (Z_{L,j} - Z_{L,j}^S) \times \{L\}. \tag{1}$$

(iii) Jeśli $j \geq r$, to dla generycznego $L \in \mathcal{L}_S^j$ mamy

$$(P_{X^j})^{-1}(L) \cap (S \times \mathcal{L}_S^j) = \emptyset.$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności możemy założyć, że $V_0 = \{(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in V : \ y_1 \neq 0\}$ jest gęstym podzbiorem V. Jest to oczywiście zbiór analityczny nierozkładalny (w $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{m-1}$). Dla $w = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m) \in V_0$, określamy automorfizm liniowy $l_w : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \ni (\xi, t_1, ..., t_m) \longmapsto (\xi, y_1 t_1, y_2 t_1 + t_2, ..., y_m t_1 + t_m)$. Niech $\tilde{X}^j = \{(w, L) \in X^j : \ w \in V_0\}$ oraz

$$f : \tilde{X}^j \ni (w, L) \longmapsto (w, L \circ l_w) \in V_0 \times \tilde{\mathcal{L}}_S^j,$$

gdzie $\tilde{\mathcal{L}}_S^j = \{L \in \mathcal{L}_S^j : \ \mathbb{C}^{n+1} \times \{(0, ..., 0)\} \subset \ker L\}$. Oczywiście f jest biholomorfizmem i $V_0 \times \tilde{\mathcal{L}}_S^j$ jest zbiorem analitycznym nierozkładalnym wymiary $k - j + mj$. W konsekwencji $\tilde{X}^j$ jest nierozkładalny. Ponieważ $X^j = \overline{\tilde{X}^j}$, więc X^j jest zbiorem algebraicznym nierozkładalnym wymiaru $k - j + mj$. To daje (i).

Dla $L \in \mathcal{L}_S^j$, oznaczamy przez $L^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^j$ jedyne odwzorowanie liniowe takie, że $L(x,y) = L^*(y)$ dla $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$.

Niech $0 < j < r$. Oczywiście dla każdego $L \in \mathcal{L}_S^j$ mamy $0 \in p(V) \cap \ker L^*$, więc $\operatorname{codim}(p(V) \cap \ker L^*) < m$, zatem $(P_{X^j})^{-1}(L) \neq \emptyset$. To daje, że P_{X^j} jest odwzorowaniem dominującym i w konsekwencji z wniosku 3.15 w [M], $\mathcal{U}_{X^j}$ zawiera podzbiór otwarty w topologii Zariskiego. Z wniosków 3.16 i 3.14 w [M] mamy, że $(P_{X^j})^{-1}(\mathcal{U}_{X^j})$ jest otwartym w topologii Zariskiego podzbiorem X^j. Stąd i z twierdzenia Remmerta o odwzorowaniach otwartych dostajemy, że $\mathcal{U}_{X^j}$ jest zbiorem otwartym w topologii Zariskiego. Postępując analogicznie dla każdej składowej nierozkładalnej zbioru $X^j \cap (S \times \mathcal{L}_S^j)$ dostajemy, że $\tilde{\mathcal{U}}_{X^j}$ również jest otwartym w topologii Zariskiego podzbiorem $\mathcal{L}_S^j$. Dla $L \in \tilde{\mathcal{U}}_{X^j}$ mamy

$$(P_{X^j})^{-1}(L) = \overline{Z_{L,j} \setminus S} \times \{L\} = (Z_{L,j} - Z_{L,j}^S) \times \{L\}.$$

To daje (1) i w konsekwencji daje (ii).

Niech teraz $j \geq r$. Przypuśćmy przeciwnie, że (iii) nie zachodzi. Wówczas P_{X^j} jest dominujące i analogicznie jak powyżej mamy, że dla generycznego $L \in \mathcal{L}_S^j$, $\dim(P_{X^j})^{-1}(L) \equiv k - j$, ponadto

$$(P_{X^j})^{-1}(L) = \left[p^{-1}((\overline{p(V)} \setminus \{0\}) \cap \ker L^*) \times \{L\}\right] \cup \left[(P_{X^j})^{-1}(L) \cap (S \times \mathcal{L}_S^j)\right].$$

Oczywiście dla generycznego $L \in \mathcal{L}_S^j$ zbiór $(\overline{p(V)} \setminus \{0\}) \cap \ker L^*$ jest skończony i nie zawiera punktu 0, więc $p^{-1}((\overline{p(V)} \setminus \{0\}) \cap \ker L^*) \cap S = \emptyset$. W konsekwencji dla generycznego $L \in \mathcal{L}_S^j$, $\dim[(P_{X^j})^{-1}(L) \cap (S \times \mathcal{L}_S^j)] \equiv k - j$, co jest niemożliwe, bo $\dim V \cap S < k$. Otrzymana sprzeczność daje (iii) i kończy dowód. $\square$

Niech

$$Y^1 = \{(w, L) \in \mathbb{C}^N \times \mathcal{L}_S^1 : \ w \in V, \ \ L(w) = 0\},$$
$$Y^j = \{(w, L_1, ..., L_j) \in \mathbb{C}^N \times \mathcal{L}_S^j : \ (w, L_1, ..., L_{j-1}) \in X^{j-1}, \ \ L_j(w) = 0\}, \ j \geq 2$$

oraz

$$P_{Y^j} : Y^j \ni (w, L) \longmapsto L \in \mathcal{L}_S^j.$$

Przechodząc do składowych nierozkładalnych zbioru Y^j, stosując lemat 1 i postępując analogicznie jak w dowodzie tego lematu dostajemy

Lemat 2. *(i) Jeśli $1 \leq j \leq r$, to istnieje zbiór otwarty w topologii Zariskiego i niepusty $\mathcal{U}_{Y^j} \subset \mathcal{L}_S^j$ taki, że dla każdego $L \in \mathcal{U}_{Y^j}$ mamy $\dim(P_{Y^j})^{-1}(L) \equiv k - j$. Ponadto, dla $L \in \mathcal{U}_{Y^j}$ mamy*

$$(P_{Y^j})^{-1}(L) = Z_{L,j} \times \{L\}.$$

(ii) dla $j > r$ i generycznego $L \in \mathcal{L}_S^j$ mamy

$$(P_{Y^j})^{-1}(L) \cap (S \times \mathcal{L}_S^j) = \emptyset. \qquad \square$$

Oznaczmy przez

$$\mathcal{U}_S(V) = \{(L_1, ..., L_r) \in \mathcal{U}_{Y^r} : \ (L_1, ..., L_j) \in \tilde{\mathcal{U}}_{X^j} \cap \mathcal{U}_{Y^j}, \ 1 \le j \le r-1\},$$

$$\mathcal{L}_S(V) = \{(L_1, ..., L_r) \in \mathcal{L}_S : \ \text{przecięcia } Z_{L,j} = (Z_{L,j-1} - Z^S_{L,j-1}) \cap \ker L_j, \\ 1 \le j \le r \text{ są właściwe i niepuste}\},$$

gdzie przyjmujemy $Z_{L,0} = V$.

Propozycja 1. *Zbiór $\mathcal{U}_S(V)$ jest otwartym w topologii Zariskiego i niepustym podzbiorem $\mathcal{L}_S$ oraz*

$$\mathcal{U}_S(V) \subset \mathcal{L}_S(V).$$

Ponadto dla $L \in \mathcal{U}_S(V)$ mamy $(Z_{L,r} - Z^S_{L,r}) \cap S = \emptyset$.

Dowód. W myśl lematu 1 i 2 mamy, że zbiór $\mathcal{U}_S(V)$ jest otwartym w topologii Zariskiego i niepustym podzbiorem $\mathcal{L}_S$ i oczywiście zawiera się w $\mathcal{L}_S(V)$. To daje tezę. □

3. Krotność odwzorowania regularnego w punkcie

Jeśli $X \subset \mathbb{C}^N$ jest zbiorem algeraicznym oraz $f : X \to \mathbb{C}^n$ jest odwzorowaniem regularnym, to dla $x \in X$, przez $\mu_x(f)$ oznaczamy *krotność odwzorowania* f w punkcie x, to znaczy

$$\mu_x(f) = \inf_{\varepsilon>0}[\limsup_{y\to x} \#(f^{-1}(f(y)) \cap B(x,\varepsilon))],$$

gdzie $B(x,\varepsilon)$ oznacza kulę w $\mathbb{C}^N$ o środku x i promieniu ε. Ponadto, jeśli $x \notin X$, to przyjmujemy $\mu_x(f) = 0$.

W przypadku, gdy X jest zbiorem czystego wymiaru, f jest dominujące i x jest punktem izolowanym włókna $f^{-1}(f(x))$, to $\mu_x(f)$ jest krotnością $*$-nakrycia $f|_\Delta : \Delta \to f(\Delta)$, gdzie $\Delta \subset X$ jest dostatecznie małym otoczeniem punktu x (lemat 3.11 i twierdzenie 3.13 w [M] oraz twierdzenie Andreottiego-Stolla w [Ł], V.7.2, patrz też definicja 3.12 w [M] w przypadku, gdy X jest rozmaitością afiniczną).

Lemat 3 (por. [Wh$_1$], VII.8, twierdzenie 8E)**.** *Niech $X \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem algebraicznym,* $\dim X \equiv n$ *i niech $f : X \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem regularnym dominującym. Wówczas funkcja*

$$\mu : X \ni x \longmapsto \mu_x(f) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

jest konstruowalna algebraicznie i półciągła z góry. Ponadto dla każdego $x \in X$ takiego, że $\mu_x(f) < +\infty$ i dostatecznie małego otoczenia $\Omega \subset X$ punktu x zbiór $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^n$ jest otwarty i dla każdego $t \in f(\Omega)$,

$$\mu_x(f) = \sum_{w \in f^{-1}(t) \cap \Omega} \mu_w(f).$$

Dowód. Druga część tezy wynika prosto z definicji krotności odwzorowania i twierdzenia Remmerta o odwzorowaniach otwartych.

Udowodnimy pierwszą część. Pokażemy najpierw, że dla dowolnego zbioru algebraicznego nierozkładalnego $Z \subset X$ istnieje $s \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ takie, że dla generycznego $x \in Z$ mamy $\mu_x(f) = s$. Istotnie, weźmy dowolny zbiór algebraiczny nierozkładalny $Z \subset X$. Niech $s = \min\{\mu_x(f) : x \in Z\}$. Wystarczy rozważyć przypadek, gdy $s < +\infty$. Z twierdzenia Chevalley'a ([M], propozycja 2.31), zbiór $W = \overline{f(Z)}$ jest algebraiczny i oczywiście nierozkładalny. Ponieważ $s < +\infty$, więc istnieje $x \in Z$ taki, że x jest punktem izolowanym włókna $f^{-1}(f(x))$. Stąd dostajemy, że $\dim W = \dim Z$ ([M], twierdzenie 3.13). Z propozycji 3.17 w [M] wynika, że istnieją właściwe podzbiory algebraiczne $W' \subset W$, $Z' \subset Z$ takie, że $f|_{Z \setminus Z'} : Z \setminus Z' \to W \setminus W'$ jest nakryciem nierozgałęzionym. Niech $Z'' = \{x \in Z : \mu_x(f) = +\infty\}$ oraz Z''' będzie zbiorem punktów osobliwych zbioru $f^{-1}(W)$. Oznaczmy $Z^* = Z' \cup Z'' \cup Z'''$. Niech

$$Z_0 = \{x \in Z \setminus Z^* : \mu_x(f) = s\}.$$

Pokażemy, że

$$Z_0 = Z \setminus Z^*.$$

Istotnie, niech $x^0 \in Z$ będzie takim punktem, że $\mu_{x^0}(f) = s$. Wówczas x^0 jest punktem izolowanym włókna $f^{-1}(f(x^0))$. Z lematu 3.11 w [M] istnieje otoczenie $\Omega \subset X$ punktu x^0 takie, że $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^n$ jest zbiorem otwartym oraz $f|_\Omega : \Omega \to f(\Omega)$ jest odwzorowaniem właściwym. Zmniejszając ewentualnie Ω możemy założyć, że $f(\Omega)$ jest zbiorem spójnym oraz $f^{-1}(f(x^0)) \cap \overline{\Omega} = \{x^0\}$. Wówczas z twierdzenia Andreottiego-Stolla ([Ł], V.7.2) dostajemy łatwo, że

$$\sum_{w \in f^{-1}(f(x)) \cap \Omega} \mu_w(f) = s, \qquad \text{dla } x \in \Omega.$$

Stąd i z określenia s mamy, że $\mu_x(f) = s$ dla $x \in \Omega \cap Z$. To daje, że zbiór Z_0 jest niepusty i otwarty w przestrzeni $Z \setminus Z^*$. Ponieważ $Z \setminus Z^*$ jest zbiorem spójnym ([Ł], IV.2.9, wniosek 1 z propozycji 3), więc wystarczy pokazać, że Z_0 jest zbiorem domkniętym w $Z \setminus Z^*$. Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje punkt skupienia $x^1 \in Z \setminus Z^*$ zbioru Z_0 taki, że $\mu_{x^1}(f) > s$. Wówczas podobnie jak poprzednio istnieje otoczenie $\Omega \subset X$ punktu x^1 takie, że $f|_\Omega : \Omega \to f(\Omega)$ jest odwzorowaniem właściwym oraz zmniejszając ewentualnie Ω pokazujemy, że

$$\sum_{w \in f^{-1}(f(x)) \cap \Omega} \mu_w(f) = \mu_{x^1}(f), \qquad \text{dla } x \in \Omega \cap Z.$$

Stąd wynika łatwo, że $x^1 \in Z^*$. To przeczy przypuszczeniu i daje, że $Z_0 = Z \setminus Z^*$.

Niech $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ będzie rozkładem zbioru X na składowe nierozkładalne. Z poprzedniego mamy, że istnieją właściwe podzbiory algebraiczne $X_i' \subset X_i$ takie, że funkcja μ jest stała w każdym zbiorze $X_i \setminus X_i'$. Biorąc składowe nierozkładalne zbioru $Z = X_1' \cup \ldots \cup X_r'$ i postępując indukcyjnie dostajemy, że μ jest funkcją konstruowalną algebraicznie.

Powtarzając powyższe rozumowanie dostajemy, że dla każdego $l \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, zbiór $\{x \in X : \mu(x) \geq l\}$ jest algebraiczny. To daje, że μ jest funkcją półciągłą z góry i kończy dowód $\square$

W dalszym ciągu przez $\mathcal{A}^i$ oznaczamy zbiór wszystkich przekształceń afinicznych $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^i$.

Z lematu 3 dostajemy

Wniosek 1. *Jeśli $\mathcal{Z}$ jest dodatnim cyklem algebraicznym w $\mathbb{C}^N$, to funkcja*

$$\nu_{\mathcal{Z}} : \mathbb{C}^n \ni x \longmapsto \deg_x \mathcal{Z} \in \mathbb{N}$$

jest konstruowalna algebraicznie i półciągła z góry.

Dowód. Wobec addytywności stopnia lokalnego, wystarczy rozważyć przypadek, gdy $\mathcal{Z} = V$ jest nierozkładalnym zbiorem algebraicznym. Niech $k = \dim V$. Weźmy dowolne $A \in \mathcal{A}^k$ i określmy funkcję

$$\mu_A : V \ni x \longmapsto \mu_x(A|_V) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}.$$

Jeśli każdy $x \in V$ nie jest punktem izolowanym włókna $(A|_V)^{-1}(A(x))$, to $\mu_A(x) = +\infty$ dla $x \in V$. Załóżmy więc, że istnieje $x \in V$ który jest punktem izolowanym włókna $(A|_V)^{-1}(A(x))$. Wówczas z twierdzenia 3.13 w [M] mamy, że $A|_V : V \to \mathbb{C}^k$ jest odwzorowaniem dominującym którego generyczne włókno jest skończone. Zatem z lematu 3, funkcja μ_A jest konstruowalna algebraicznie i półciągła z góry. Z definicji stopnia lokalnego ([D], §6) mamy, $\nu_{\mathcal{Z}} = \inf_{A \in \mathcal{A}^k} \mu_A$. Weźmy dowolne $l \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Wówczas

$$\nu_{\mathcal{Z}}^{-1}(\langle l, +\infty\rangle) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}^k} \mu_A^{-1}(\langle l, +\infty\rangle).$$

Stąd, wobec półciągłości z góry i konstruowalności funkcji μ_A dostajemy, że $\nu_{\mathcal{Z}}^{-1}(\langle l, +\infty\rangle)$ jest zbiorem algebraicznym. To daje konstruowalność algebraiczną i półciągłość z góry funkcji $\nu_{\mathcal{Z}}$. $\square$

Lemat 4. *Niech $X \subset \mathbb{C}^N$ będzie zbiorem algebraicznym i $g_i : X \to \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq r$, układem odwzorowań konstruowalnych algebraicznie i półciągłych z góry. Wówczas odwzorowanie $g = (g_1, ..., g_r) : X \to \mathbb{N}^r$ jest konstruowalne algebraicznie i półciągłe z góry, gdzie w $\mathbb{N}^r$ rozważamy porządek leksykograficzny. Inaczej, dla dowolnego $I \in \mathbb{N}^r$ oraz zbioru $\mathbb{N}^r_I$ wszystkich $J \in \mathbb{N}^r$ nie poprzedzających I, zbiór $g^{-1}(\mathbb{N}^r_I)$ jest algebraiczny.*

Dowód. Dla dowolnego $I = (i_1, ..., i_r) \in \mathbb{N}^r$ mamy, że zbiór

$$g^{-1}(\mathbb{N}^r_I) = \bigcup_{j=1}^{r+1} \left(g_j^{-1}(\langle i_j + 1, +\infty\rangle) \cap \bigcap_{l=1}^{j-1} g_l^{-1}(\langle i_l, +\infty\rangle) \right),$$

przy oczywistej konwencji dla $j = 1$ i $j = r + 1$, jest algebraiczny. To daje, że g jest odwzorowaniem konstruowalnym algebraicznie i półciągłym z góry w porządku leksykograficznym. $\square$

Wykorzystując wniosek 1 udowodnimy twierdzenie 2.

Dowód twierdzenia 2. Dla dowolnego $H \in \mathcal{H}_S(V)$ weźmy odwzorowanie

$$\nu_H : S \ni x \longmapsto (\deg_x \mathcal{Z}^S_{H,1}, ..., \deg x \mathcal{Z}^S_{H,r}).$$

Ponieważ $\mathcal{Z}^S_{H,j}$ jest dodatnim cyklem algebraicznym lub cyklem zerowym, więc w myśl wniosku 1, wszystkie funkcje $\nu_{H,j} : S \ni x \longmapsto \deg_x \mathcal{Z}^S_{H,j}$ są konstruowalne algebraicznie i półciągłe z góry. Stąd i z lematu 4 mamy, że ν_H jest odwzorowaniem konstruowalnym algebraicznie i półciągłym z góry w porządku leksykograficznym. Z definicji odwzorowania $\tilde{g}$ mamy $\tilde{g} = \min\limits_{H \in \mathcal{H}_S(V)}{}_{lex}\, \nu_H$. Stąd wynika, że dla dowolnego $I \in \mathbb{N}^r$,

$$\tilde{g}^{-1}(\mathbb{N}^r_I) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_S(V)} \nu_H^{-1}(\mathbb{N}^r_I),$$

jest zbiorem algebraicznym, więc $\tilde{g}$ jest odwzorowaniem konstruowalnym algebraicznie i półciągłym z góry w porządku leksykograficznym. $\square$

4. Zbiór przecięć zbioru algebraicznego układem hiperpłaszczyzn

Zgodnie z propozycją 1, dla każdego $L = (L_1, ..., L_r) \in \mathcal{L}_S(V)$ mamy ciąg przecięć właściwych

$$Z_{L,j} = (Z_{L,j-1} - Z^S_{L,j-1}) \cap \ker L_j, \quad 1 \le j \le r, \qquad \text{gdzie } Z_{L,0} = V$$

oraz ciąg cykli przecięć właściwych

$$\mathcal{Z}_{L,j} = (\mathcal{Z}_{L,j-1} - \mathcal{Z}^S_{L,j-1}) \cdot (\ker L_j), \quad 1 \le j \le r, \qquad \text{gdzie } \mathcal{Z}_{L,0} = V.$$

Oznaczmy $M^j = \mathcal{L}_S \times \mathbb{C} \times \mathcal{A}^{k-j}$, $1 \le j \le r$, gdzie $\mathcal{A}^{k-j}$ jest zbiorem wszystkich odwzorowań afinicznych $\mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^{k-j}$. Dla $L \in \mathcal{L}_S$, przez $L_1, ..., L_r$ oznaczamy jego współrzędne, to znaczy $L = (L_1, ..., L_r)$.

1. Zbiór przecięć $Z_{L,j}$. Niech $1 \le j \le r$,

$$\mathcal{V}^j = \{(x, L, \xi, A) \in \mathbb{C}^N \times M^j : \ (x, L_1, ..., L_{j-1}) \in X^{j-1}, \ L_j(x) = \xi, \ A(x) = 0\}$$

oraz

$$\pi^j : \mathcal{V}^j \ni (x, L, \xi, A) \longmapsto (L, \xi, A) \in M^j.$$

Stosując lemat 1, łatwo sprawdzamy, że $\mathcal{V}^j$ jest zbiorem algebraicznym nierozkładalnym oraz $\dim \mathcal{V}^j = \dim M^j$ dla $1 \le j \le r$.

Własność 1. *(i) π^j jest odwzorowaniem dominującym, którego generyczne włókno jest skończone i niepuste.*

(ii) Dla każdego $L \in \mathcal{U}_S(V)$, $A \in \mathcal{A}^{k-j}$ mamy

$$(\pi^j)^{-1}(L, 0, A) = (Z_{L,j} \cap A^{-1}(0)) \times \{(L, 0, A)\}.$$

(iii) Dla każdego $L \in \mathcal{U}_S(V)$ i generycznego $A \in \mathcal{A}^{k-j}$,

$$0 < \#(\pi^j)^{-1}(L, 0, A) < \infty.$$

W szczególności dla każdego $x \in Z_{L,j}$ i generycznego A takiego, że $(x, L, 0, A) \in \mathcal{V}^j$ mamy, że punkt $(x, L, 0, A)$ jest izolowanym punktem włókna $\pi^{-1}(L, 0, A)$.

Dowód. Z lematów 1 i 2 dostajemy, że przy ustalonym $1 \le j \le r$ oraz $L \in \mathcal{U}_S(V)$, dla generycznego $A \in \mathcal{A}^{k-j}$, odwzorowanie $\overline{(V \setminus S) \cap \ker L_1 \cap ... \cap \ker L_{j-1}} \ni x \longmapsto (L_j(x), A(x)) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{k-j}$ jest dominujące i ma generyczne włókno skończone. Stąd łatwo dostajemy (i). Części (ii) oraz (iii) wynikają bezpośrednio z lematu 2. $\square$

2. Pewne funkcje konstruowalne. Niech

$$\mathcal{F}^j = \{(x, L) \in \mathbb{C}^N \times \mathcal{U}_S(V) : (x, L_1, ..., L_j) \in Y^j\} \quad \text{dla } 1 \le j \le r,$$
$$\mathcal{F}^j_0 = \{(x, L) \in \mathbb{C}^N \times \mathcal{U}_S(V) : (x, L_1, ..., L_j) \in X^j\} \quad \text{dla } 1 \le j \le r-1.$$

Własność 2. *Funkcje*

$$\eta^j : \mathcal{F}^j \ni (x, L) \longmapsto \min_{(x,L,0,A) \in \mathcal{V}^j} \mu_{(x,L,0,A)}(\pi^j) \in \mathbb{N} \quad \textit{dla } 1 \le j \le r,$$
$$\eta^j_0 : \mathcal{F}^j_0 \ni (x, L) \longmapsto \min_{(x,L,0,A) \in \mathcal{V}^j} \mu_{(x,L,0,A)}(\pi^j) \in \mathbb{N} \quad \textit{dla } 1 \le j \le r-1.$$

są konstruowalne algebraicznie i półciągłe z góry.

Dowód. Pokażemy tezę dla η^j. Dla η^j_0 dowód przebiega analogicznie.

Oznaczając $\mathcal{C} = \{(x, L, \xi, A) \in \mathcal{V}^j : \ \xi = 0\}$, z lematu 3 dostajemy natychmiast, że $\mu : \mathcal{C} \ni w \longmapsto \mu_w(\pi^j)$ jest funkcją konstruowalną algebraicznie i półciągłą z góry. Dla każdego $A \in \mathcal{A}^{k-j}$, niech $\mathcal{C}_A = \{(x, L, 0, a) \in \mathcal{C} : \ a = A - A(x)\}$. Wówczas C_A jest śladem zbioru algebraicznego w $\mathcal{C}$. Zatem funkcja $\mu|_{\mathcal{C}_A}$ jest konstruowalna algebraicznie i półciągła z góry. Ponadto przyporządkowanie $\mathcal{F}^j \ni (x, L) \longmapsto A - A(x) \in \mathcal{A}^{k-j}$ jest odwzorowaniem regularnym. Stąd wynika, że funkcja $\eta_A : \mathcal{F}^j \ni (x, L) \longmapsto \mu(x, L, 0, a) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ jest konstruowalna algebraicznie i półciągła z góry. Ponieważ $\eta^j = \inf_{A \in \mathcal{A}^{k-j}} \eta_A$, więc η^j jest funkcją konstruowalną algebraicznie i półciągłą z góry. $\square$

Przyjmijmy dodatkowo $\eta^j(x, L) = 0$, gdy $(x, L) \notin \mathcal{F}^j$ oraz $\eta^j_0(x, L) = 0$, gdy $(x, L) \notin \mathcal{F}^j_0$.

Wniosek 2. *Weźmy dowolny* $(x, L) \in \mathcal{F}^j$*. Wówczas dla* $A \in \mathcal{A}^{k-j}$ *takiego, że* $A(x) = 0$ *mamy*

$$\eta^j(x, L) = \mu_{(x,L,0,A)}(\pi^j) \iff A^{-1}(0) \cap C_x(Z_{L,j}) = \{x\}.$$

Ponadto jeśli $\mathcal{T}_{L,j} = (Z_{L,j-1} - Z^S_{L,j-1}) \cdot (\ker L_j)$*, to*

(2) $\eta^j(x, L) = \deg_x \mathcal{T}_{L,j} \leq \deg_x \mathcal{Z}_{L,j}, \qquad 1 \leq j \leq r$

(3) $\eta^j_0(x, L) = \deg_x(\mathcal{T}_{L,j} - \mathcal{T}^S_{L,j}) \leq \deg_x(\mathcal{Z}_{L,j} - \mathcal{Z}^S_{L,j}), \quad 1 \leq j \leq r-1, \quad x \notin S.$

W szczególności $\eta^j(x, L) = \eta^j_0(x, L)$ *dla* $L \in \mathcal{U}_S(V)$*,* $x \notin S$*.*

Dowód. Ostatnia część tezy wynika bezpośrednio z definicji $\mathcal{F}^j$ i $\mathcal{F}^j_0$. Nierówności w (2) i (3) wynikają prosto z definicji ciągu cykli przecięć $\mathcal{Z}_{L,j}$. Udowodnimy równości w (2) i (3).

Udowodnimy najpierw równość w (2) dla $j = 1$. Ponieważ $\mathcal{T}_{L,1} = V \cdot (\ker L_1)$, więc aby obliczyć stopień $\deg_x \mathcal{T}_{L,1}$, wystarczy (wobec twierdzenia 6.3 w [D]) wziąć podprzestrzeń afiniczną $A^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^N$, gdzie $A \in \mathcal{A}^{k-1}$, wymiaru $N-k+1$ taką, że $A^{-1}(0) \cap C_x(V \cap \ker L_1) = \{x\}$ i obliczyć krotność przecięcia właściwego izolowanego

$$V \cdot (\ker L_1) \cdot A^{-1}(0) = V \cdot ((\ker L_1) \cap A^{-1}(0))$$

(patrz twierdzenie 5.1 z [D]). Wówczas dla generycznego $A \in \mathcal{A}^{k-j}$ takiego, że $A(x) = 0$, mamy

$$\deg_x \mathcal{T}_1 = i(V \cdot (\ker L_1 \cap A^{-1}(0)), x),$$

gdzie prawa strona oznacza krotność właściwego przecięcia izolowanego zbiorów analitycznych V i $\ker L_j \cap A^{-1}(0)$ w punkcie x (definicja 3.4 w [D]). Weźmy dowolne otoczenie ograniczone $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ punktu x takie, że $V \cap \ker L_1 \cap A^{-1}(0) \cap \overline{\Omega} = \{x\}$. Z powyższego, istnieje otoczenie $\Delta \subset M^j$ punktu $(L, 0, A)$ takie, że dla generycznego $(l, \xi, a) \in \Delta$, przecięcie $V \cap (l_1^{-1}(\xi) \cap a^{-1}(0))$ jest transwersalne. Stąd i z definicji krotności przecięcia właściwego izolowanego (patrz [Wi], Section 4) mamy, że

$$i(V \cdot (\ker L_1 \cap A^{-1}(0)), x) = \mu_{(x,L,0,A)}(\pi^1) = \eta^1(x, L).$$

Ponieważ $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{T}_1$, więc $\deg_x \mathcal{T}_1 = \deg_x \mathcal{Z}_1$. Stąd dostajemy (2) w przypadku $j = 1$. W szczególności jeśli $A^{-1}(0) \cap C_x(V \cap \ker L_1) = \{x\}$, to $\eta^1(x, L) = \mu_{(x,L,0,A)}(\pi^1)$. Z powyższego, uwzględniając twierdzenie 6.3 z [D] dostajemy implikację przeciwną. Mamy więc pierwszą część tezy dla $j = 1$. Analogicznie pokazujemy (2) i pierwszą część tezy dla pozostałych $2 \leq j \leq r$.

Niech teraz $x \notin S$. Udowodnimy równości w (3). Z definicji funkcji η^j i η^j_0 i lematu 3 dostajemy, że dla każdego $A \in \mathcal{A}^{k-j}$ takiego, że $A^{-1}(0) \cap C_x(Z_{L,j}) = \{x\}$ istnieją dowolnie małe otoczenia $x \in \Omega \subset \mathbb{C}^N$, $A \in \tilde{\Delta} \subset \mathcal{A}^{k-j}$ takie, że dla generycznego $a \in \tilde{\Delta}$ (to znaczy $a^{-1}(0)$ przecina transwersalnie $Z_{L,j}$ i nie przecina $Z^S_{L,j} \cap \Omega$) mamy

$$\eta^j_0(x, L) = \sum_{\substack{w \in \Omega \cap (Z_{L,j} - Z^S_{L,j}) \\ a(w)=0}} \eta^j_0(w, L) = \sum_{\substack{w \in \Omega \cap Z_{L,j} \setminus S \\ a(w)=0}} \eta^j(w, L).$$

Analogicznie, dla generycznego $a \in \tilde{\Delta}$ mamy

$$\deg_x(\mathcal{T}_{L,j} - \mathcal{T}^S_{L,j}) = \sum_{\substack{w \in \Omega \cap (Z_{L,j} - Z^S_{L,j}) \\ a(w)=0}} \deg_w(\mathcal{T}_{L,j} - \mathcal{T}^S_{L,j}) = \sum_{\substack{w \in \Omega \cap Z_{L,j} \setminus S \\ a(w)=0}} \deg_w \mathcal{T}_{L,j}.$$

Z powyższego i z (2) dostajemy (3). $\square$

5. Dowód twierdzenia 1

Udowodnimy teraz twierdzenie 1. Dokładniej pokażemy

Propozycja 2. *Istnieje otwarty w topologii Zariskiego i niepusty podzbiór $\mathcal{U}^{\not\,}_S(V) \subset \mathcal{U}_S(V)$ taki, że dla każdego $L \in \mathcal{U}^{\not\,}_S(V)$, wszystkie współczynniki cykli*

$$\mathcal{Z}_{L,j} - \mathcal{Z}^S_{L,j}, \quad 1 \leq j \leq r - 1$$

są równe 1.

Dowód. Oznaczmy przez $\mathcal{U}^{*}_S(V)$ zbiór wszystkich $L \in \mathcal{U}_S(V)$ spełniających tezę propozycji. Pokażemy najpierw, że zbiór $\mathcal{U}^{*}_S(V)$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{L}_S(V)$.

Podobnie jak w dowodzie lematu 1, dla $L \in \mathcal{L}^1_S$, przez L^* oznaczamy jedyną funkcję liniową $L^* : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}$ taką, że $L^*(y) = L(x, y)$ dla $x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$. Niech $\Gamma = \overline{p(V)} \subset \mathbb{C}^m$. Pokażemy najpierw, że dla generycznej funkcji $L \in \mathcal{L}^1_S$, przecięcie $\Gamma \cap \ker L^*$ jest transwersalne (to znaczy dla każdej składowej nierozkładalnej Γ_1 zbioru $\Gamma \cap \ker L^*$ istnieje $y \in \Gamma_1$, że Γ przecina $\ker L^*$ transwersalnie w punkcie y). Istotnie, niech

$$C_4(\Gamma) = \overline{\{(y, v) \in \Gamma \times \mathbb{C}^m : \ v \in C_y(\Gamma)\}}.$$

W myśl twierdzenia 5.1 z [Wh$_2$], $C_4(\Gamma)$ jest nierozkładalnym zbiorem analitycznym. Ponadto $\dim C_4(\Gamma) = 2r$. Łatwo sprawdzamy, że jest to zbiór algebraiczny. Niech

$$W = \{(y, v, L) \in C_4(\Gamma) \times \mathcal{L}^1_S : \ L^*(y) = L^*(v) = 0\}.$$

Biorąc rzutowanie $W \ni (y, v, L) \longmapsto (y, v)$ łatwo pokazujemy (ponieważ $r > 1$), że $\dim W \leq 2r + m - 2$. Z lematu 1 dostajemy, że rzutowanie $\Pi : W \ni (y, v, L) \longmapsto L \in \mathcal{L}^1_S$ jest odwzorowaniem dominującym. W konsekwencji dla generycznego $L \in \mathcal{L}^1_S$ mamy $\dim \Pi^{-1}(L) \leq 2r - 2$. To, wobec definicji zbioru W daje, że dla generycznego $L \in \mathcal{L}^1_S$ przecięcie $\Gamma \cap \ker L^*$ jest transwersalne. Z powyższego łatwo wynika, że dla generycznego $L \in \mathcal{L}_S^1$ przecięcie $V \cap \ker L$ jest transversalne w $\mathbb{C}^N \setminus S$. Powtarzając indukcyjnie powyższe rozumowanie dostajemy, że $\mathcal{U}_S^{*}(V)$ jest gęstym podzbiorem zbioru $\mathcal{L}_S(V)$.

Stąd, uwzględniając wniosek 2, wobec półciągłości z góry funkcji η_0^j dostajemy, że funkcje η_0^j przyjmują wartość równą 1 na otwartych w topologii Zariskiego i niepustych podzbiorach $\mathcal{D}^j$ zbiorów $\mathcal{F}_0^j$. Wobec nierozkładalności $\overline{\mathcal{F}_0^j}$ (patrz lemat 1 i definicja zbioru $\mathcal{F}_0^j$) mamy, że $\mathcal{D}^j$ jest gęstym podzbiorem $\mathcal{F}_0^j$. Rzuty zbiorów $\mathcal{D}^j$ są otwartymi podzbiorami $\mathcal{L}_S$ (z twierdzenia Remmerta o odwzorowaniach otwartych). Zatem, w myśl wniosku 2, istnieje zbiór otwarty w topologii Zariskiego i niepusty $\mathcal{U}_S^{\neq}(V) \subset \mathcal{U}_S^{*}(V)$ taki, że dla $L \in \mathcal{U}_S^{\neq}(V)$, wszystkie współczynniki cykli $\mathcal{T}_{L,j} - \mathcal{T}_{L,j}^S$, $1 \leq j \leq r-1$ są równe 1. Stąd i z definicji ciągu $\mathcal{Z}_{L,j}$ dostajemy tezę. □

6. Dowód twierdzenia 3

Niech
$$\nu^j : S \times \mathcal{U}_S^{\neq}(V) \ni (x, L) \longmapsto \deg_x \mathcal{Z}_{L,j}^S, \qquad 1 \leq j \leq r.$$

Pokażemy, że funkcje ν^j są konstruowalne algebraicznie i półciągłe z góry. Jeśli $j = r$, to z twierdzenia 1, wniosku 2 i lematu 2 mamy, że $\nu^j(x, L) = \eta^j(x, L)$, więc powyższa obserwacja wynika z własności 2.

Załóżmy teraz, że $1 \leq j \leq r-1$. Niech
$$\mathcal{E}^j = \{(x, L, A) \in \mathbb{C}^N \times \mathcal{U}_S^{\neq}(V) \times \mathcal{A}^{k-j} : \ (x, L) \in \mathcal{F}_0^j, \ A(x) = 0\},$$
$$\Pi^j : \mathcal{E}^j \ni (x, L, A) \longmapsto (L, A) \in \mathcal{U}_S^{\neq}(V) \times \mathcal{A}^{k-j}$$
oraz
$$\delta^j : \mathcal{F}_0^j \ni (x, L) \longmapsto \min_{(x,L,A) \in \mathcal{E}^j} \mu_{(x,L,A)}(\Pi^j) \in \mathbb{N}.$$

Podobnie jak we własności 2 pokazujemy, że δ^j jest funkcją konstruowalną algebraicznie i półciągłą z góry. Ponadto z definicji zbioru $\mathcal{F}_0^j$ dostajemy łatwo, że dla $(x, L) \in \mathcal{F}_0^j$ mamy $\delta^j(x, L) = \deg_x(Z_{L,j} - Z_{L,j}^S)$. Stąd i z twierdzenia 1 mamy
$$\delta^j(x, L) = \deg_x(\mathcal{Z}_{L,j} - \mathcal{Z}_{L,j}^S). \tag{4}$$

Ponadto jeśli $A \in \mathcal{A}^{k-j}$, $A^{-1}(0) \cap C_x(Z_{L,j} - Z_{L,j}^S) = \{x\}$, to
$$\delta^j(x, L) = \mu_{(x,L,A)}(\Pi^j). \tag{5}$$

Połóżmy dodatkowo $\delta^j(x, L) = 0$, gdy $(x, L) \notin \mathcal{F}_0^j$. Z wniosku 2 i poprzedniego, dla $x \in S$, $L \in \mathcal{U}_S^{\neq}(V)$ mamy
$$\nu^j(x, L) = \eta^j(x, L) - \delta^j(x, L),$$
czyli ν^j jest funkcją konstruowalną algebraicznie.

Weźmy dowolny $(x, L) \in \mathcal{F}_0^j$ i niech $A \in \mathcal{A}^{k-j}$ będzie takie, że $A^{-1}(0) \cap C_x(Z_{L,j}) = \{x\}$. Wówczas dla dowolnie małego otoczenia $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ punktu x istnieje otoczenie $\Delta \subset \mathcal{U}_S^{\neq}(V) \times \mathcal{A}^{k-j}$ punktu (L, A) takie, że dla generycznego $(l, a) \in \Delta$ oraz $w \in a^{-1}(0) \cap Z_{L,j} \cap \Omega$ mamy $a^{-1}(0) \cap C_w(Z_{l,j}) = \{w\}$. W konsekwencji, z lematu 3, wniosku 2 i (5), dla generycznego $(l, a) \in \Delta$ mamy

$$\eta^j(x, L) - \delta^j(x, L) = \sum_{\substack{w \in \Omega \cap Z_{l,j} \\ a(w)=0}} \eta^j(w, l) - \sum_{\substack{w \in \Omega \cap Z_{l,j} \\ a(w)=0}} \delta^j(w, l).$$

Stąd, z wniosku 2 i (4) dla generycznego $(l, a) \in \Delta$ mamy

$$\nu^j(x, L) = \sum_{\substack{w \in \Omega \cap Z_{l,j}^S \\ a(w)=0}} \deg_w \mathcal{Z}_{l,j}^S. \tag{6}$$

Zmniejszając ewentualnie Δ i dla każdego $(l, a) \in \Delta$ powtarzając (6) we wszystkich punktach $w \in a^{-1}(0) \cap Z_{l,j}^S \cap \Omega$ dostajemy, że (6) zachodzi dla każdego $(l, a) \in \Delta$. Stąd łatwo dostajemy półciągłość z góry funkcji ν^j.

Reasumując twierdzenie 3 wynika natychmiast z lematu 4 i wniosku 3 w [AR].

References

[AR] R. Achilles, S. Rams, *Intersection numbers, Segre numbers and generalized Samuel multiplicities*, Preprint (2000), 1-10.

[ATW] R. Achilles, P. Tworzewski, T. Winiarski, *On improper isolated intersection in complex analytic geometry*, Ann. Polon. Math **51** (1990), 21-36.

[Ch] E. M, Chirka, *Complex analytic sets*, Kluwer Acad. Publishers, 1989.

[D] R. N. Draper, *Intersection theory in analytic geometry*, Math. Ann. **180** (1969), 175-204.

[F] W. Fulton, *Intersection theory*, Springer, Berlin, 1983.

[Ł] S. Łojasiewicz, *Introduction to complex analytic geometry*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1991.

[M] D. Mumford, *Algebraic geometry I, Complex projective varieties*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[N_1] K. J. Nowak, *Analytic Improper Intersections I: Deformation to the Normal Cone*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **48** (2000), 121-130.

[N_2] K. J. Nowak, *Analytic Improper Intersections I: Deformation to an Algebraic Bicone and Applications*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **48** (2000), 131-140.

[T] P. Tworzewski, *Intersection theory in complex analytic geometry*, Ann. Polon. Math **62** (1995), 177-191.

[TW] P. Tworzewski, T. Winiarski, *Cycle of Zeroes of holomorphic mappings*, Bull. Acad. Polon. Math. **37** (1989), 95-101.

[Wh_1] H. Whitney, *Complex analytic varieties*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1972.

[Wh_2] H. Whitney, *Local Properties of analytic Varieties*, Differential and Combinatorial Topology (symposium), Princeton University Press, 1965.

[Wh_3] H. Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. **81** (1965), 496-549.

[Wi] T. Winiarski, *Continuity of total number of intersection*, Ann. Polon. Math **46** (1986), 155-178.

The generic intersections of algebraic set by hyperplanes

Summary. Let $V \subset \mathbb{C}^N$ be an algebraic set and S be a linear subspace of $\mathbb{C}^N$. In the paper we show that the intersection index in the Tworzewski sense of V and S at a point $x \in V \cap S$ is attained on the generic system of hyperplanes containing S.

Będlewo, 8 – 12 stycznia 2001 r.