MATERIAŁY XV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z ANALIZY I GEOMETRII ZESPOLONEJ

1994 **Łódź** **str. 69**

GEOMETRYCZNA INTERPRETACJA PODKLAS KLASY FUNKCJI GWIAŹDZISTYCH

J. Sokół, Z. Stankiewicz (Rzeszów)

Niech S oznacza klasę funkcji jednolistnych w kole $E = \{z : |z| < 1\}$, unormowanych warunkiem $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Przez g oznaczamy funkcję konforemnie odwzorującą koło E na obszar G jednospójny, wypukły i taki, że $0 \in \partial G$; $1 \in G$.

Dla danej ustalonej funkcji g tworzymy zbiór:

$$S_g = \left\{ f \in S : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec g(z), \quad z \in E \right\}, \tag{1}$$

gdzie symbol $\prec$ oznacza podporządkowanie obszarowe.

Dobierając odpowiednią funkcję g możemy w ten sposób otrzymać wiele znanych klas funkcji lub określić nowe.

Oto kilka przykładów:

1^0 Gdy $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $z \in E$, to $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ przyjmuje wartości leżące w prawej półpłaszczyźnie, S_g oznacza zatem znaną klasę funkcji gwiaździstych względem początku układu współrzędnych; $S_g = S^*$.

2^0 Jeśli $g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$, $z \in E$, $\alpha \in (0, 1\rangle$, to wyrażenie $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ przyjmuje wartości leżące wewnątrz kąta $|\arg w| < \alpha\frac{\pi}{2}$. S_g oznacza więc klasę $S^*(\alpha)$ funkcji α-kątowo gwiaździstych wprowadzoną i badaną przez J. Stankiewicza (patrz np. [4]).

3^0 Gdy $g(z) = \frac{M(1+z)}{M+(1-M)z}$, $z \in E$, $M > 1/2$, to $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ przyjmuje wartości z koła $|z - M| < M$, co oznacza, że otrzymujemy klasę S^*_M wprowadzoną i badaną przez W. Janowskiego (patrz np. [2]).

4^0 Jeżeli $g(z) = 1 - \frac{i\alpha}{\pi} \ln \frac{1+ze^{\frac{\alpha-1}{\alpha}\pi i}}{1+ze^{\frac{1-\alpha}{\alpha}\pi i}}$, $\alpha > 1$, $z \in E$, to wyrażenie $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ przyjmuje wartości leżące w pasie $0 < \operatorname{Re} w < \alpha$. Klasę S_g oznaczymy przez $S^*(0,\alpha)$.

5^0 Dla funkcji $g(z) = 1 + \frac{4}{\pi^2}\left(\ln \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2$, $z \in E$, gdzie $\operatorname{Im}\sqrt{z} > 0$ lub $0 \le \sqrt{z} < 1$, funkcjonał $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ spełnia warunek $|w-1| < \operatorname{Re} w + 1$. Klasa S_g uzyskana w tym przykładzie pokrywa się z klasą S_p^* wprowadzoną przez F. Rønninga ([3]).

6^0 Gdy $g(z) = \sqrt{z+1}$, $\operatorname{Re}\sqrt{z+1} \ge 0$, to $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ przyjmuje wartości leżące w prawej połówce lemniskaty Bernoulliego $|w^2 - 1| < 1$. Klasę S_g w tym przypadku oznaczymy przez S_L^*.

Mają miejsce następujące relacje:

$$S^*(\alpha) \subseteq S^*; \quad S_M^* \subseteq S^*; \quad S^*(0,\alpha) \subseteq S^*; \quad S_p^* \subset S^*; \quad S_L^* \subset S^*; \quad S_L^* \subset S^*(1/2).$$

Klasy S^* i $S^*(\alpha)$ mają znane interpretacje geometryczne.

W niniejszym komunikacie podamy interpretacje geometryczne dla pozostałych przykładów klas funkcji. Uzyskane wyniki bazują na następującym twierdzeniu (patrz [1]).

Twierdzenie A. *Niech g będzie odwzorowaniem konforemnym $g : E \xrightarrow{\text{na}} G$, gdzie G jest obszarem jednospójnym, wypukłym i takim, że $0 \in \partial G$, $1 \in G$. Niech Θ oznacza taką liczbę, że $\lim_{r\to 1^-} g(re^{i\Theta}) = 0$ oraz $w_0 = \lim_{r\to 1^-} f_0(re^{i\Theta})$, gdzie f_0 dla $z \in E$ spełnia równanie $\frac{zf_0'(z)}{f_0(z)} = g(z)$. Wtedy*

$$f \in S_g \Rightarrow \left\{\forall w, \quad w \in \partial f(E) \Rightarrow f(E) \subseteq w\frac{1}{w_0} f_0(E)\right\}.$$

O funkcjach $f \in S_g$ spełniających powyższe twierdzenie będziemy mówili, że są (Q, w_0)-osiągalne, gdzie $Q = f(E)$.

Przyjrzyjmy się jak wygląda (Q, w_0)-osiągalność we wszystkich wprowadzonych przypadkach.

Ad. 1^0 $w_0 = -1/4$. Obszar Q jest całą płaszczyzną z wyłączenie półprostej $\partial Q = \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} w = 0 \wedge \operatorname{Re} w < -1/4\}$. Oznacza to, że dla każdego $w \in \partial f(E)$ półprosta $\frac{w}{w_0}\partial Q$ nie ma punktów wspólnych z obszarem $f(E)$, co pokrywa się z interpretacją geometryczną klasy S^*.

Ad. 2^0 Brzegiem obszaru $\frac{1}{w_0}Q$ są symetryczne względem osi rzeczywistej łuki spiral logarytmicznych o stromości równej $\operatorname{ctg}\alpha$, tzn. tworzące ze sobą kąt $(1-\alpha)\pi$. Oznacza to, że dla każdego $w \in \partial f(E)$ obszar $f(E)$ nie ma punktów wspólnych z kątem o wierzchołku w i rozwartości $(1-\alpha)\pi$, którego dwusieczna przechodzi przez początek układu współrzędnych ([3]).

Ad. 3^0

Twierdzenie 1. *Jeżeli* $f \in S_M^*$, $M > 1/2$, *to* $\forall w,\ w \in \partial f(E) \Rightarrow f(E) \subset \frac{w}{w_0} f_0(E)$, *gdzie*

$$f(z) = \begin{cases} ze^z & \text{dla } M = 1, \\ z\left[1 + \frac{1-M}{M} z\right]^{\frac{2M-1}{1-M}} & \text{dla } M \neq 1, \end{cases}$$

$$w_0 = f_0(-1) = \begin{cases} -e^{-1} & \text{dla } M = 1, \\ -\left(\frac{2M-1}{M}\right)^{\frac{2M-1}{1-M}} & \text{dla } M \neq 1, \end{cases}$$

dla $z \in E$.

Twierdzenie 1 mówi, że funkcje klasy S_M^* są (Q, w_0)-osiągalne z obszarem Q, którego brzeg jest krzywą

$$w = f_0(e^{i\Theta}) = \begin{cases} \exp(\cos\Theta + i(\sin\Theta + \Theta)) & \text{dla } M = 1, \\ e^{i\Theta}\left(1 + \frac{1-M}{M} e^{i\Theta}\right)^{\frac{2M-1}{1-M}} & \text{dla } M \neq 1, \end{cases}$$

gdzie $\Theta \in \langle 0, 2\pi)$.

Ad. 4^0

Twierdzenie 2. *Jeżeli* $f \in S^*(0,\alpha)$, $\alpha > 1$, *to* $\forall w,\ w \in \partial f(E) \Rightarrow f(E) \subset \frac{w}{w_0} f_0(E)$, *gdzie*

$$f_0(z) = z \exp\left\{\frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n^2} \sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\pi n\right)\right\}, \qquad z \in E,$$

$$w_0 = -\exp\left\{\frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\pi n\right)\right\} = f_0(-1).$$

Twierdzenie 2 mówi, że funkcje klasy $S^*(0,\alpha)$ są (Q, w_0)-osiągalne z obszarem Q o brzegu opisanym równaniem $w = f_0(e^{i\Theta})$, $\Theta \in \langle 0, 2\pi)$.

Obserwacja komputerowych wykresów, dla ustalonego α, krzywych otrzymanych z równania $w = f_0(e^{i\Theta})$ przez zastąpienie szeregu - różnej długości odcinkami wykazuje, że podobnie jak dla klasy S_M^* są to linie o kształcie zbliżonym do kardioidy.

Ad. 5^0

Twierdzenie 3. *Jeżeli* $f \in S_p^*$, *to* $\forall w,\ w \in \partial f(E) \Rightarrow f(E) \subset \frac{w}{w_0} f_0(E)$, *gdzie*

$$f_0(z) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4m - 4m^2 + 4mk - 1 - 2k} \right) \frac{z^k}{k},$$

$$z \in E, \quad w_0 = f_0(-1) \cong -0{,}2852.$$

Ad. 6^0

Twierdzenie 4. *Jeżeli* $f \in S_L^*$*, to* $\forall w,\ w \in \partial f(E) \Rightarrow f(E) \subset \frac{w}{w_0} f_0(E)$*, gdzie*

$$f_0(z) = \frac{4}{z}(\sqrt{z+1}-1)^2 \exp(2\sqrt{z+1}-2), \quad z \in E, \quad \operatorname{Re}\sqrt{z+1} \geq 0;$$
$$w_0 = f_0(-1) \cong -0,53.$$

W przypadku 5^0, postępując analogicznie jak dla klas $S^*(0,\alpha)$, otrzymujemy, że obszar Q jest kardioidopodobny.

W przypadku 6^0 obszar $\frac{w}{w_0}Q$ ma tę własność, że styczne wyprowadzone z punktu w_0 tworzą kąt $\frac{\pi}{2}$. Wynika to z faktu, że $S_L^* \subset S^*\left(\frac{1}{2}\right)$.

Z Twierdzenia A wyprowadzamy następujące wnioski:

Wniosek 1. *Jeżeli* $f \in S_g$*, to* $K(0,|w_0|) \subset f(E) \subset K(0,|f_0(1)|)$*, gdzie* $K(a,r)$ *oznacza koło o środku* a *i promieniu* r*.*

Wniosek 2. *Liczba* $|w_0|$ *jest stałą Koebe'go dla klasy* S_g*.*

Oznaczając $K(S_g) = |w_0|$, mamy:

$K(S^*) = 1/4$;

$$K(S^*(\alpha)) = \exp\int_0^1 \left\{\left[\frac{1-t}{1+t}\right]^\alpha - 1\right\}\frac{dt}{t} = \exp\left\{\frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}\right\},$$

gdzie $\Gamma(t)$ jest funkcją Γ-Eulera (patrz [3]);

$$K(S_M^*) = \begin{cases} \left(\frac{2M-1}{M}\right)^{\frac{2M-1}{1-M}} & \text{dla } M \neq 1, \\ 1/e & \text{dla } M = 1, \\ 1/4 & \text{dla } M \to \infty; \end{cases}$$

$$K(S^*(0,\alpha)) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\pi n\right)\right\} & \text{dla } 1 < \alpha < \infty, \\ 1/4 \quad \text{dla } \alpha \to \infty; \end{cases}$$

$$K(S_p^*) \cong 0,2852;$$

$$K(S_L^*) \cong 0,53.$$

Wniosek 3.

$$|f(z)| \leq |f_0(1)|, \qquad z \in E, \quad f \in S_g.$$

Stąd otrzymujemy oszacowania:

$$f \in S_M^* \Rightarrow |f(z)| \leq \begin{cases} M^{\frac{1-M}{2M-1}} & \text{dla } M \neq 1, \quad z \in E, \\ e & \text{dla } M = 1, \end{cases}$$

$$f \in S^*(0,\alpha) \Rightarrow |f(z)| \leq \exp\left\{\frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\pi n\right)\right\}, \quad z \in E,$$

$$f \in S_p^* \Rightarrow |f(z)| \leq \exp\left(\frac{28}{n^2}\zeta(3)\right), \qquad \text{gdzie } \zeta(t) \text{ jest funkcją } \zeta-\text{Riemanna},$$

$$f \in S_L^* \Rightarrow |f(z)| \leq 4(\sqrt{2}-1)^2 e^{2(\sqrt{2}-1)}, \quad z \in E.$$

References

1. O.A. Busowskaja, *Geometriceskaja charakteristika podklassow odnolistnych funkcij*, Ukr. Mat. Żur. **35** (1985), no. 5, 558–562. (in Russian)
2. W. Janowski, *Extremal problems for a family of functions with positive real part and for some related families*, Ann. Polon. Math. **23** (1970), 159–177.
3. F. Rønning, *Uniformly convex functions and corresponding class of starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).
4. J. Stankiewicz, *Quelques problèmes extremaux dans les classes fonctions α-angulairement étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A **20** (1966), 59–75.

A geometrical interpretation of subclasses of the class of starlike functions

Summary. Let S stand for the class of functions univalent in the disc $E = \{z : |z| < 1\}$ and normalized by the condition $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. We denote by g a function mapping the disc E conformally onto a simply connected convex domain G such that $0 \in \partial G$ and $1 \in G$.

For a fixed function g, we form the set

$$S_g = \left\{ f \in S : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec g(z), \quad z \in E \right\}, \tag{1}$$

where the symbol $\prec$ denotes a domain subordination . Choosing a suitable function g, we can obtain in this way many well-known classes of functions or define new ones.

In the paper we give geometrical interpretations for a few classes of functions so obtained. The results we obtain are based on a theorem on (Q, w_0)-attainable functions $f \in S_g$ where $Q = f(E)$ (Theorem A).

Bronisławów, 11–15 stycznia, 1993 r.