MATERIAŁY VII KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z TEORII ZAGADNIEŃ EKSTREMALNYCH

1986 Łódź s. 111

O FUNKCJI GREENA I POJEMNOŚCIACH W $\mathbb{C}^N$

J. *Siciak* (*Kraków*)

WSTĘP. W teorii funkcji analitycznych jednej zmiennej zespolonej ważną rolę, jako jedno z podstawowych narzędzi badawczych, odgrywają funkcje subharmoniczne. Funkcja $f = u + iv$, określona w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}$, jest holomorficzna (w skrócie: $f \in \mathcal{O}(\Omega)$) wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje u,v są harmoniczne i spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Tak więc teoria funkcji analitycznych jednej zmiennej zespolonej jest teorią sprzężonych par funkcji harmonicznych. Z drugiej strony, jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to $|f|^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $\log|f|$ są funkcjami subharmonicznymi w Ω, zaś dowolną funkcja $u \in SH(\Omega)$ (czytaj: u subharmoniczna w Ω) może być przedstawiona w postaci

$$(*) \qquad u = (\limsup_{j\to+\infty} \frac{1}{j} \log |f_j|)^*,$$

gdzie $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ $(j \geq 1)$ oraz $v^*(z) := \limsup_{\zeta\to z} v(\zeta)$.

Wzór $(*)$ szczególnie wyraźnie ujawnia ścisły związek funkcji analitycznych na płaszczyźnie z funkcjami subharmonicznymi zmiennej $z = x + iy$ (dwóch zmiennych rzeczywistych x,y).

Wśród zagadnień i pojęć teorii funkcji subharmonicznych podstawowe znaczenie dla analizy zespolonej na płaszczyźnie ma funkcja Greena i pojemność logarytmiczna. Przedmiotem tego artykułu jest przedstawienie pewnych uogólnień tych pojęć na przypadek przestrzeni $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$. Przedstawione w artykule wielowymiarowe analogony funkcji Greena i pojemności logarytmicznej znajdują w analizie zespolonej wielu zmiennych zarówno zastosowania podobne do zastosowań ich pierwowzorów klasycznych w analizie jednej zmiennej, jak i zastosowania w postaci nowych twierdzeń nie mających odpowiedników w teorii funkcji jednej zmiennej. Podstawowe znaczenie dla uzyskania w $\mathbb{C}^N$ dobrego analogonu klasycznej funkcji Greena i pojemności logarytmicznej ma metoda funkcji ekstremalnych wielu zmiennych zespolonych, zapoczątkowana przez autora ponad 20 lat temu i stanowiąca przeniesienie na przestrzeń $\mathbb{C}^N$ metody punktów ekstremalnych i funkcji ekstremalnych na płaszczyźnie, stworzonej przez Feketego i Leję, a rozwiniętej głównie przez Leję i jego uczniów.

Metoda funkcji ekstremalnych w $\mathbb{C}^N$ zrobiła w ostatnich 8 – 10 latach znaczne postępy zarówno jeśli chodzi o rozbudowę samej metody, jak i poszerzenie zakresu jej stosowalności do badania różnych zagadnień analizy zespolonej.

Kluczowe znaczenie dla rozwoju metody funkcji ekstremalnych i pojemności w $\mathbb{C}^N$ mają niedawne wyniki Bedforda i Taylora [5] na temat nieliniowej teorii potencjału dla funkcji plurisubharmonicznych, zbudowanej w oparciu o teorię zespolonego operatora Monge'a-Ampere'a. Na szczególną wzmiankę zasługuje tutaj twierdzenie Bedforda-Taylora o zbiorach zaniedbywalnych (negligible).

§1. POJEMNOŚĆ LOGARYTMICZNA I FUNKCJA GREENA PŁASKIEGO ZBIORU ZWARTEGO. Niech $T_n(z) = (z - z_{n1})\ldots(z - z_{nn})$ (odp. $T_n^*(z) = (z - z^*_{n1})\ldots(z - z^*_{nn})$) będzie n-tym *wielomianem Czebyszewa* zbioru zwartego $K \subset \mathbb{C}$, zdefiniowanym przez żądanie, by $\tau_n = \|T_n\|_K$ (odp. $\tau_n^* = \|T_n^*\|_K$), gdzie $\tau_n := \inf \{\|P\|_K;\ P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n\}$ (odp. $\tau_n^* := \inf \{\|P\|_K;\ P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \ldots + c_n,\ K \subset P^{-1}(0)\}$. Liczba $\tau(K) := \inf \sqrt[n]{\tau_n} = \lim \sqrt[n]{\tau_n}$ (odp. $\tau^*(K) := \inf \sqrt[n]{\tau_n^*} = \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\tau_n^*}$) nazywa się *stałą Czebyszewa zbioru* K. Niech $\hat{K} = \{z \in \mathbb{C}; |P(z)| \le \|P\|_K$ dla każdego wielomianu $P\}$ oznacza powłokę wielomianową zbioru K. Wiadomo, że

1° $\tau(K) = \tau(\hat{K}) = \tau^*(K)$.

2° $\tau(K) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja $G \in SH(\mathbb{C})$, że

(i) $G \ge 0$ na $\mathbb{C}$, $G = 0$ na $\hat{K} \setminus E$, gdzie E jest zbiorem typu F_σ oraz $\tau(F) = 0$ dla każdego podzbioru zwartego F zbioru E;

(ii) G jest harmoniczna w $\mathbb{C} \setminus K$;

(iii) istnieje granica $\gamma(K) := \lim\limits_{z\to\infty} [G(z) - \log|z|]$ (zwana *stałą Robina zbioru* K).

Funkcję $G(z) \equiv G(z,K)$ spełniającą warunki (i), (ii), (iii) nazywa się *funkcją Greena* zbioru K (lub funkcją Greena dla $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ z biegunem w ∞).

3° $\tau(K) = c(K) := \exp(-\gamma(K))$. Liczbę c(K) nazywa się *pojemnością logarytmiczną* zbioru K.

4° Jeżeli $\tau(K) > 0$ i zbiór $K = \hat{K}$ jest spójny, to $G(z) = \log|f(z)|$ dla $z \in \mathbb{C} \setminus K$, gdzie f jest odwzorowaniem konforemnym obszaru $\hat{\mathbb{C}} \setminus K$ na zewnętrze koła jednostkowego, $f(\infty) = \infty$.

5° Zbiór $E \subset \mathbb{C}$ jest *polarny* (tzn. istnieje taka funkcja $W \in SH(\mathbb{C})$, że $W = -\infty$ na E) wtedy i tylko wtedy, gdy $c^*(E) = 0$, gdzie $c^*(E)$ oznacza zewnętrzną pojemność logarytmiczną zbioru E, tzn. $c^*(E) := \inf\{c_*(\Omega);\ E \subset \Omega,\ \Omega$ jest otwarty$\}$, $c_*(\Omega) := \sup\{c(K);\ K \subset \Omega,\ K$ jest zwarty$\}$.

6° Uogólnienie twierdzenia Riemanna o punkcie pozornie osobliwym: Jeśli E jest podzbiorem polarnym relatywnie domkniętym zbioru otwartego Ω, u jest funkcją subharmoniczną i ograniczoną z góry w $\Omega \setminus E$, to istnieje funkcja $\tilde{u} \in SH(\Omega)$ taka, że $\tilde{u} = u$ w $\Omega \setminus E$. W szczególności, przy danych założeniach o E, funkcja u harmoniczna i ograniczona w $\Omega \setminus E$ daje się przedłużyć do funkcji harmonicznej w Ω.

7° Jeśli $c(K) > 0$, to $G(z) = \lim \frac{1}{n} \log \frac{|T_n^*(z)|}{\tau_n}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \hat{K}$, przy czym zbieżność jest niemal jednostajna. Ponadto istnieje taka miara probabilistyczna λ (*miara równowagi* zbioru K) skupiona na K, że $G(z) = -\log c(K) + \int \log|z-\zeta|\, d\lambda(\zeta)$. Miara λ jest słabą granicą ciągu miar probabilistycznych λ_n, gdzie $\lambda_n(\{z_{nj}^*\}) = \frac{1}{n}$ dla $j = 1,\dots,n$, $n = 1,2,\dots$

Przytaczając twierdzenie 7° chcieliśmy zwrócić uwagę na naturalny związek pojemności i funkcji Greena na płaszczyźnie z teorią potencjału logarytmicznego. Źródłem tego związku jest fakt, że wielomian jednej zmiennej zespolonej jest zawsze przedstawialny w postaci iloczynu czynników liniowych $z - z_j$. Fakt ten nie zachodzi dla wielomianów w przestrzeni $\mathbb{C}^N$, $N \geq 2$.

§2. FUNKCJE PLURISUBHARMONICZNE I ZBIORY PLURIPOLARNE W $\mathbb{C}^N$. Jak wiadomo teoria funkcji harmonicznych i subharmonicznych, w szczególności teoria potencjału, przenosi się na przypadek dowolnej ilości zmiennych rzeczywistych. Niestety, newtonowska teoria potencjału $2N$ zmiennych rzeczywistych, gdy $N > 1$, nie ma większego znaczenia dla teorii funkcji analitycznych w $\mathbb{C}^N$.

• Funkcja $f : \Omega \to \mathbb{C}$, określona w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, nazywa się *holomorficzna* (piszemy $f \in \mathcal{O}(\Omega)$), jeżeli w pewnym otoczeniu dowolnego punktu $a \in \Omega$ jest rozwijalna w szereg wielomianów jednorodnych

$$f(a+z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z), \quad \|z\| < r; \quad Q_n(z) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha z^\alpha.$$

Z definicji tej wynika, że jeśli $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, to f jest holomorficzna na każdej prostej zespolonej (dokładniej: jeśli L jest prostą zespoloną o równaniu $z = a + \lambda w$, $\lambda \in \mathbb{C}$, gdzie $a, w \in \mathbb{C}^N$, $w \neq 0$, to funkcja $f|L \cap \Omega$ jest holomorficzna w zbiorze płaskim $L \cap \Omega$). W konsekwencji $\mathrm{Re}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ są funkcjami *pluriharmonicznymi*, tzn. harmonicznymi na każdej prostej zespolonej L, zaś $|f|^\alpha$ $(\alpha > 0)$, $\log |f|$ są funkcjami plurisubharmonicznymi, tzn. subharmonicznymi na każdej prostej zespolonej.

2.1. DEFINICJA. Mówimy, że funkcja rzeczywista $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ jest *plurisubharmoniczna* (plsh) w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ (co notujemy: $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$), jeśli jest półciągła z góry oraz $\forall\, a \in \Omega$ $\forall\, w \in \mathbb{C}^N$, $\|w\| = 1$ funkcja $\lambda \to u(a + \lambda w)$ jest subharmoniczna w pewnym kole $\{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < r\}$.

Jeśli $N \geq 2$, to $\mathrm{PSH}(\Omega) \subsetneq \mathrm{SH}(\Omega)$.

Na płaszczyźnie każdy obszar D jest *obszarem holomorficzności*, tzn. maksymalnym obszarem istnienia pewnej funkcji holomorficznej. Natomiast w $\mathbb{C}^N$ $(N \geq 2)$ nie każdy obszar jest obszarem holomorficzności. Np. każda funkcja holomorficzna w pierścieniu przestrzennym $r < \|z\| < R$ jest przedłużalna do funkcji holomorficznej w kuli $\|z\| < R$. Fundamentalne znaczenie teorii funkcji plsh dla analizy zespolonej N-wymiarowej wynika z następującego twierdzenia

2.2. TWIERDZENIE. Obszar $D \subset \mathbb{C}^N$ jest obszarem holomorficzności wtedy i tylko wtedy, gdy $\log(1/d_D) \in \mathrm{PSH}(D)$, gdzie $d_D(z) := \mathrm{dist}\,(z, \partial D)$.

Naturalny związek funkcji plsh z funkcjami holomorficznymi uwidoczniony jest także w następującym twierdzeniu

2.3. TWIERDZENIE. Jeśli D jest obszarem holomorficzności w $\mathbb{C}^N$, to każda funkcja $u \in \mathrm{PSH}(D)$ daje się przedstawić w postaci

$$u = \left(\limsup_{j \to \infty} \frac{1}{j} \log |f_j|\right)^*,$$

gdzie $f_j \in \mathcal{O}(D)$ $(j \geq 1)$.

Do najważniejszych osiągnięć teorii funkcji plsh uzyskanych w ostatnich latach należą dwa następujące twierdzenia, dające rozwiązanie starych problemów P. Lelonga.

2.4. *TWIERDZENIE* (B. Josefson [9]). Dla zbioru $E \subset \mathbb{C}^N$ następujące warunki są równoważne:

(a) E jest *globalnie pluripolarny* (plp), tzn. istnieje funkcja $W \in PSH(\mathbb{C}^N)$ taka, że $W = -\infty$ na E;

(b) E jest *lokalnie plp*, tzn. $\forall a \in E \ \exists U_a \ \exists W \in PSH(U_a)$, $W = -\infty$ na $E \cap U_a$, gdzie U_a jest otoczeniem punktu a.

2.5. *TWIERDZENIE* (Bedford-Taylor [5]). Niech $(u_\alpha)_{\alpha \in A} \subset PSH(\Omega)$ będzie rodziną funkcji plsh lokalnie jednostajnie ograniczonych z góry w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{C}^N$. Jeśli $u := \sup\{u_\alpha; \alpha \in A\}$, to zbiór

$$(*) \qquad N := \{z \in \Omega; u(z) < u^*(z)\}$$

jest plp.

Zbiór postaci $(*)$ nazywa się *zaniedbywalny* (negligible). Łatwo widać, że każdy zbiór plp jest zaniedbywalny. Twierdzenie B-T mówi więc, że rodzina zbiorów zaniedbywalnych jest identyczna z rodziną zbiorów plp.

Twierdzenie 2.5 ma fundamentalne znaczenie dla rozwijającej się intensywnie w ostatnich latach teorii funkcji ekstremalnej w $\mathbb{C}^N$, stanowiącej analogon klasycznej funkcji Greena na płaszczyźnie, oraz dla teorii pojemności w $\mathbb{C}^N$.

Okazuje się, że dla wielu zagadnień analizy zespolonej w $\mathbb{C}^N$ wystarczy znać własności pewnej wąskiej klasy L funkcji plsh w $\mathbb{C}^N$, generowanych w prosty sposób przez wielomiany. W szczególności funkcje klasy L wystarczają do scharakteryzowania wszystkich zbiorów plp, pozwalają zdefiniować dobry analogon funkcji Greena oraz rozwinąć teorię pojemności w $\mathbb{C}^N$. Funkcje klasy L w przypadku płaskim redukują się do funkcji subharmonicznych, występujących w teorii potencjału logarytmicznego. Następny paragraf poświęcimy podstawowym własnościom funkcji klasy L.

§3. FUNKCJE plsh W $\mathbb{C}^N$ GENEROWANE PRZEZ WIELOMIANY.

3.1. Literą $L \equiv L(\mathbb{C}^N)$ będziemy oznaczać zbiór wszystkich funkcji $u \in PSH(\mathbb{C}^N)$ spełniających nierówność

$$u(z) \le \beta + \log(1 + \|z\|), \qquad z \in \mathbb{C}^N,$$

gdzie β jest liczbą rzeczywistą zależną od u. Wygodnie jest wraz z funkcjami klasy L rozpatrywać funkcje 4 innych klas, pozostających w ścisłym związku z klasą L. Mianowicie definiujemy

$$G \equiv G(\mathbb{C}^N) := \exp L = \{e^u; u \in L\},$$

$$H \equiv H(\mathbb{C}^N) := \{f \in G; f(\lambda z) = |\lambda| f(z), \lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^N\},$$

$$G_o := \{f \in G;\ f = \sup_j |P_j|^{1/n_j}\},$$

$$H_o := \{f \in H;\ f = \sup_j |Q_j|^{1/n_j}\},$$

gdzie j przebiega dowolny zbiór wskaźników, P_j jest wielomianem stopnia $\le n_j$, Q_j - wielomianem jednorodnym stopnia n_j.

3.2. Jeśli $P(z) = \sum_{|\alpha|\le j} c_\alpha z^\alpha$, $P \not\equiv 0$, to $\frac{1}{j} \log |P| \in L$. Jeśli $Q(z) = \sum_{|\alpha|=j} c_\alpha z^\alpha$, $Q \not\equiv 0$, to $|Q|^{1/j} \in H$. Jeśli $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$, $f, g \in G$ (odp. H), to $f^\alpha g^\beta \in G$ (odp. H).

3.3. Często korzysta się z nierówności

$$f(z) \le \|f\|_{B(a,r)} \max\{1, \frac{\|z-a\|}{r}\}, \quad \text{gdy} \quad f \in G,$$

$$f(z) \le \|f\|_{B(0,r)} \frac{\|z\|}{r}, \quad \text{gdy} \quad f \in H,$$

gdzie $B(a,r)$ oznacza kulę o środku a i promieniu r względem danej normy $\|\cdot\|$, zaś $\|f\|_E := \sup\{|f(z)|; z \in E\}$.

Łatwo sprawdzić, że prawdziwy jest następujący

3.4. *LEMAT* (*Zasada projektywizacji*). Niech M będzie podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{C}^N$, $\dim M = N-1$. Niech $a \in \mathbb{C}^N \setminus M$. Wtedy odwzorowanie (restrykcja do podprzestrzeni afinicznej $a + M$)

$$R : H(\mathbb{C}^N) \ni h \to h|_{a+M} \in G(M)$$

jest bijekcją. W szczególności odwzorowanie

$$H(\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N) \ni h(z_o, z) \to h(1, z) \in G(\mathbb{C}^N)$$

jest bijekcją. Odwzorowanie

$$G(M) \ni f \to \tilde{f} \in H(\mathbb{C}^N),$$

odwrotne do R, dane jest wzorami

$$\tilde{f}(\lambda a + z) := |\lambda| f(z/\lambda), \quad \text{gdy} \quad z \in M, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0$$

$$\tilde{f}(z) := \limsup_{(\lambda,w)\to(0,z)} \tilde{f}(\lambda a + w), \quad z \in M.$$

3.5. *TWIERDZENIE APROKSYMACYJNE I.* Niech $f : \mathbb{C}^N \to [0,+\infty)$ będzie funkcją półciągłą z góry, $f \not\equiv 0$. Wtedy

$$\text{(I.1)} \qquad f \in G \iff f = (\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|P_j|})^*,$$

$$\text{(I.2)} \qquad f \in H \iff f = (\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|Q_j|})^*,$$

gdzie P_j jest wielomianem stopnia $\leq j$, Q_j - wielomianem jednorodnym stopnia j.

Dowód. Dzięki Lematowi 3.4 wystarczy udowodnić (I.2). Nierówności 3.3 implikują, że jeśli f dane jest wzorem z prawej strony (I.2), to $f \in H$. Załóżmy teraz, że $f \in H$. Wtedy $\Omega := \{f < 1\}$ jest kołowym obszarem holomorficzności. Niech F będzie funkcją holomorficzną, dla której Ω jest maksymalnym obszarem istnienia, i niech

$$F(z) = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j(z), \qquad z \in \Omega,$$

będzie jej rozwinięciem w szereg wielomianów jednorodnych, $\deg Q_j = j$. Na podstawie zbieżnościowego kryterium Cauchy'ego

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^N;\ (\limsup \sqrt[j]{|Q_j|})^*(z) < 1\},$$

skąd wynika żądany wzór na f.

3.6. *TWIERDZENIE APROKSYMACYJNE II.* Dla każdej funkcji $h \in H$ (odp. $g \in G$) istnieje ciąg $h_n \in H_o$ (odp. $g_n \in G_o$) taki, że $h_n \downarrow h$ (odp. $g_n \downarrow g$) w $\mathbb{C}^N$.

Dowód. Dzięki zasadzie projektywizacji wystarczy zająć się przypadkiem jednorodnym. Jeśli $h \in H$, to $\Omega := \{h < 1\}$ jest obszarem jednostajnej zbieżności pewnego szeregu wielomianów jednorodnych. Przeto Ω jest wypukły względem klasy wielomianów jednorodnych. Stąd zaś wynika istnienie ciągu wielościanów wielomianowych

$$E_n := \{z \in \Omega;\ |Q_j^{(n)}(z)|^{1/d_j} \le 1,\ j = 1,\dots,k_n\},$$

spełniających następujące warunki: $Q_j^{(n)}$ jest wielomianem jednorodnym stopnia d_j, E_n jest zbiorem zwartym, $E_n \subset \overset{o}{E}_{n+1}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Przyjmijmy

$$h_n(z) := \sup\{|Q_j^{(n)}(z)|^{1/d_j};\ 1 \le j \le k_n\}, \qquad z \in \mathbb{C}^N.$$

Wtedy $h_n \in H_o$, $h_n \ge h_{n+1} \ge h$ oraz $h_n \downarrow h$.

3.7. *TWIERDZENIE*. Jeśli $h \in H \cap C$ oraz $h(z) \ge m\,\|z\|$ (odp. $g \in G \cap C$ oraz $g(z) \ge m(1 + \|z\|)$), gdzie $m = \text{const} > 0$, to $h \in H_o$ (odp. $g \in G_o$).

Dowód. Zbiór $E := \{h(z) = 1\}$ jest zwarty. Jeśli $h_n \in H_o$, $h_n \downarrow h$, to dla każdego $k \ge 1$ istnieje n_k takie, że $h_{n_k}(z) \le \frac{k+1}{k}$ na E. Stąd, dzięki jednorodności rozpatrywanych funkcji, wynika, że $\frac{k}{k+1} h_{n_k}(z) \le h(z)$ w $\mathbb{C}^N$ $(k \ge 1)$. Zatem $h \in H_o$.

Można pokazać, że założenie $h(z) \ge m\,\|z\|$ (odp. $g(z) \ge m(1 + \|z\|)$) jest istotne. Również założenie ciągłości funkcji h (odp. g) jest konieczne, gdyż $H_o \subset H \cap C$, $G_o \subset G \cap C$, gdzie C oznacza zbiór funkcji ciągłych w $\mathbb{C}^N$.

§4. CHARAKTERYZACJA ZBIORÓW plp W $\mathbb{C}^N$ PRZY POMOCY FUNKCJI KLAS G LUB H.

4.1. *LEMAT*. Niech θ oznacza znormalizowaną miarę Lebesgue'a na torusie jednostkowym $T := \{z \in \mathbb{C}^N;\ |z_j| = 1,\ j = 1,\dots,N\}$, tzn. $d\theta = (2\pi)^{-N} d\theta_1 \dots d\theta_N$, gdzie θ_j jest miarą Lebesgue'a na okręgu jednostkowym. Wtedy dla każdej funkcji u klasy L zachodzi nierówność

$$\int_T u\,d\theta \ge \max_T u - N \log 2. \tag{1}$$

Dowód. Niech $p(z) = c_n(z - z_1)\dots(z - z_n)$ będzie wielomianem jednej zmiennej stopnia n. Niech z_o będzie takim punktem okręgu jednostkowego, że $|p(z_o)| = \max\limits_{|z|=1} |p(z)|$. Możemy założyć, że zera wielomianu p są tak ponumerowane, że $|z_j| < 1$ $(j = 1,\dots,s)$, $|z_j| \ge 1$ $(j = s+1,\dots,n)$.

Na podstawie wzoru Poissona-Jensena

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})|d\theta = \log |p(z_o)| + \log \left|\frac{z_{s+1}\dots z_n}{(z_o-z_1)\dots(z_o-z_n)}\right| \geq$$

$$\geq \log |p(z_o)| - n \log 2,$$

skąd wynika, że

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log |p(e^{i\theta})|^{1/n} d\theta \geq \sup_{|z|=1} \log |p(z)|^{1/n} - \log 2$$

dla każdego wielomianu $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stopnia $\leq n$. Jeśli p jest wielomianem N zmiennych zespolonych stopnia $\leq n$, to przez N-krotną iterację nierówności (2) otrzymujemy nierówność

$$(3) \qquad \int_T \log |p(z)|^{1/n} d\theta(z) \geq \sup_{z\in T} \log |p(z)|^{1/n} - N \log 2.$$

Nierówność (1) wynika z (3) poprzez Twierdzenie Aproksymacyjne I.

4.2. TWIERDZENIE. Niech $B = B(0,1)$ oznacza kulę jednostkową w $\mathbb{C}^N$ względem dowolnie ustalonej normy $\|\cdot\|$ w $\mathbb{C}^N$. Jeśli $f_n \in {G \atop H}$ $(n \geq 1)$, $\|f_n\|_B = 1$, $\mathcal{E}_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_n = 1$, to $f := \prod_{n=1}^{\infty} f_n^{\mathcal{E}_n} \in {G \atop H}$.

Dowód. Zauważmy, że $\log f_n(z) \leq \log^+ \|z\|$ w $\mathbb{C}^N$ oraz dla każdego $R > 1$ ciąg $u_n(z) := \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \log \frac{f_j(z)}{R}$ jest malejący w kuli $\|z\| < R$. W takim razie $\log f = \log R + \lim_{n\to\infty} u_n$ jest albo funkcją plsh, albo identycznie równą $-\infty$. Ten ostatni przypadek jest wykluczony, gdyż dzięki Lematowi 4.1 mamy $\int_T \log f\, d\theta = \lim_{n\to\infty} \int_T \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \log f_j(z) d\theta(z) \geq -N \log 2$. Jest widoczne, że $\log f \in L$, gdyż $\log f(z) \leq \log^+ \|z\|$.

4.3. DEFINICJA. Definiujemy

$$\alpha(E) := \inf \{ \|f\|_E;\ f \in G,\ \|f\|_B = 1\},$$

$$\rho(E) := \inf \{ \|f\|_E;\ f \in H,\ \|f\|_B = 1\},$$

gdy $E \subset \mathbb{C}^N$ jest ograniczony, oraz

$$\alpha(E) := \sup\{\alpha(F);\ F \subset E,\ F \text{ jest ograniczony}\},$$

$$\rho(E) := \sup\{\rho(F);\ F \subset E,\ F \text{ jest ograniczony}\},$$

gdy $E \subset \mathbb{C}^N$ jest dowolny.

4.4. TWIERDZENIE.

$$\alpha(E) = 0 \iff \exists_{f\in G}\ E \subset f^{-1}(0),$$

$$\rho(E) = 0 \iff \exists_{f\in H}\ E \subset f^{-1}(0).$$

Dowód. Załóżmy, że $\alpha(E) = 0$ i E jest ograniczony. Wtedy istnieje ciąg $f_n \in G$ taki, że $\|f_n\|_B = 1$ oraz $\|f_n\|_E^{2^{-n}} \le e^{-1}$ $(n \ge 1)$. Dzięki 4.2 funkcja $f := \prod_{n=1}^{\infty} f_n^{2^{-n}} \in G$, przy czym $f = 0$ na E. Jeśli $\alpha(E) = 0$ i E jest nieograniczony, to $\alpha(E_n) = 0$, gdzie $E_n := E \cap B(0,n)$. Niech f_n będzie taką funkcją klasy G, że $f_n = 0$ na E_n oraz $\|f_n\|_B = 1$. Wtedy $f := \prod_{n=1}^{\infty} f_n^{2^{-n}} \in G$ oraz $f = 0$ na $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pozostałe części twierdzenia są albo oczywiste, albo dają się udowodnić analogicznie.

4.5. Z nierówności 3.3 i z definicji liczb α, ρ wynikają następujące nierówności

$$f(z) \le \frac{\|f\|_E}{\alpha(E)} \max\{1, \|z\|\}, \qquad \text{gdy} \quad f \in G, \quad \alpha(E) > 0;$$

$$f(z) \le \frac{\|f\|_E}{\rho(E)} \|z\|, \qquad \text{gdy} \quad f \in H, \quad \rho(E) > 0.$$

4.6. Z 4.2 i 4.4 wynika, że jeśli $\alpha(E_n) = 0$ $(\rho(E_n) = 0)$ $(n \ge 1)$, to $\alpha(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ $(\rho(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0)$.

4.7. TWIERDZENIE. Jeśli $E \subset \mathbb{C}^N$ jest zbiorem plp, to $\alpha(E) = 0$.

Dowód. Przypuśćmy, że $\alpha(E) \ne 0$. Bez szkody można założyć, że E jest ograniczony i leży w kuli $B(0,r)$. Przyjmijmy

$$\Phi_E(z) := \sup \{f(z);\ f \in G,\ \|f\|_E \le 1\}, \qquad z \in \mathbb{C}^N.$$

Wtedy

$$\max\{1, \frac{\|z\|}{r}\} \le \Phi_E^*(z) \le \frac{1}{\alpha(E)} \max\{1, \|z\|\} \quad \text{w} \quad \mathbb{C}^N.$$

Niech $M := \sup_E \Phi_E^*(z)$. Weźmy $R > r$ tak duże, że $R/r > (M+1)M$ i niech $\mathcal{U} \in PSH(\mathbb{C}^N)$, $\mathcal{U} = -\infty$ na E oraz $\mathcal{U} \le 0$ w kuli $B(0,R)$. Przyjmijmy

$$\log f_k(z) := \begin{cases} \max\{\frac{1}{k}\,\mathcal{U}(z) + \log(M+1),\ \log\frac{\Phi_E^*(z)}{M}\}, & \text{gdy } \|z\| < R \\ \log\frac{\Phi_E^*(z)}{R}, & \text{gdy } \|z\| \ge R. \end{cases}$$

Wtedy $f_k \in G$ oraz $\|f_k\|_E \le 1$ $(k \ge 1)$. Przeto $\frac{1}{k}\,\mathcal{U}_k(z) + \log(M+1) \le \Phi_E^*(z)$ w $\mathbb{C}^N$ $(k \ge 1)$. Stąd $M + 1 \le M$. Sprzeczność.

4.8. TWIERDZENIE (Charakteryzacja zbiorów plp w $\mathbb{C}^N$). Rozważmy następujące warunki nałożone na zbiór $E \subset \mathbb{C}^N$:

(1) E jest lokalnie plp;	(a) $\rho(E) = 0$;
(2) E jest globalnie plp;	(b) $\exists_{h \in H}\ E \subset h^{-1}(0)$;
(3) $\alpha(E) = 0$;	(c) $\rho(\mathbb{C}\cdot E) = 0$;
(4) $\exists_{f \in G}\ E \subset f^{-1}(0)$;	(d) $\rho(\partial B \cap \mathbb{C}\cdot E) = 0$.

(tzn. $\exists_{\mathcal{U} \in L}\ \mathcal{U} = -\infty$ na E).

Wówczas warunki (1)-(4) są równoważne, warunki (a)-(d) są równoważne. Zbiór kołowy $E \subset \mathbb{C}^N$ jest plp wtedy i tylko wtedy, gdy $\rho(E) = 0$.

Dowód. Równoważność warunków wynika z twierdzenia Josefsona 2.4 oraz 4.4 i 4.7. Ponieważ $\alpha(E) \le \rho(E)$, więc każdy zbiór E, dla którego $\rho(E) = 0$, jest plp. Niech E będzie plp, Wtedy $E \subset f^{-1}(0)$, gdzie $f \in G$. Jeśli ponadto E jest kołowy, to $f = 0$ na stożku $\mathbb{C}\cdot E = \{\lambda z; \lambda \in \mathbb{C}, z \in E\}$. Niech h_1 będzie takim elementem zbioru $H(\mathbb{C}^N)$, że $h_1(1,z') = f(1,z')$, gdy $z' \in \mathbb{C}^{N-1}$. Jeśli

$$h(z) := (|z_1|h_1(z_1,z'))^{1/2}, \qquad z = (z_1,z') \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{N-1},$$

to $h \in H(\mathbb{C}^N)$ i $h = 0$ na $\mathbb{C}\cdot E$, w szczególności $h = 0$ na E. Przeto $\rho(E) = 0$.

4.9. *WNIOSEK*. Dla $E \subset \mathbb{C}^N$ następujące warunki są równoważne:

(i) E jest plp;

(ii) stożek $\mathbb{C}\cdot(\{1\} \times E)$ jest plp w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$;

(iii) zbiór $S \cap \mathbb{C}\cdot(\{1\} \times E)$ jest plp w $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, gdzie

$$S := \{(z_o,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N;\ |z_o|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2 = 1\}.$$

§5. FUNKCJE EKSTREMALNE W $\mathbb{C}^N$. ANALOGON KLASYCZNEJ FUNKCJI GREENA W $\mathbb{C}^N$.

5.1. *DEFINICJA*. Dla dowolnego zbioru $E \subset \mathbb{C}^N$ definiujemy w $\mathbb{C}^N$ dwie *funkcje ekstremalne* Φ_E i Ψ_E przy pomocy następujących wzorów:

$$\Phi_E(z) := \sup\{f(z);\ f \in G,\ \|f\|_E \le 1\},$$
$$\Psi_E(z) := \sup\{h(z);\ h \in H,\ \|h\|_E \le 1\},$$

gdy E jest ograniczony;

$$\Phi_E(z) := \inf\{\Phi_F(z);\ F \subset E,\ F \text{ jest ograniczony}\},$$
$$\Psi_E(z) := \inf\{\Psi_F(z);\ F \subset E,\ F \text{ jest ograniczony}\},$$

gdy E jest dowolny.

5.2. Dzięki zasadzie projektywizacji między funkcją ekstremalną jednorodną Ψ $N+1$ zmiennych a funkcją ekstremalną Φ N zmiennych zachodzi następujący związek. Jeśli $E \subset \mathbb{C}^N$, to

$$\Phi_E(z) = \Psi_{\{1\}\times E}(1,z), \qquad z \in \mathbb{C}^N,$$

gdzie po prawej stronie występuje funkcja ekstremalna jednorodna N+1 zmiennych $(z_o,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$, przyporządkowana zbiorowi $\{1\} \times E$.

5.3. *TWIERDZENIE*. Jeśli $K \subset \mathbb{C}^N$ jest zbiorem zwartym oraz

$$\Phi_n(z) := \sup\{|P(z)|;\ P(z) = \sum_{|\alpha|\le n} c_\alpha z^\alpha,\ \|P\|_K \le 1\},$$
$$\Psi_n(z) := \sup\{|Q(z)|;\ Q(z) = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha z^\alpha,\ \|Q\|_K \le 1\},$$

to

$$\Phi_K(z) = \sup_{n\geq 1} \Phi_n^{1/n}(z) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n^{1/n}(z),$$

$$\Psi_K(z) = \sup_{n\geq 1} \Psi_n^{1/n}(z) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n^{1/n}(z).$$

W szczególności funkcje Φ_K, Ψ_K są półciągłe z dołu.

Dowód. Jest to wniosek z Twierdzenia Aproksymacyjnego II oraz z łatwych do wykazania nierówności: $\Phi_{n+m} \geq \Phi_n\Phi_m$, $\Psi_{n+m} \geq \Psi_n\Psi_m$.

5.4. *WNIOSEK.* Jeśli $K \subset \mathbb{C}^N$ jest zbiorem zwartym, to jego powłoka wielomianowo-wypukła $\hat{K}$ dana jest wzorem $\hat{K} = \{\Phi_K \leq 1\}$, zaś $\hat{K}_c := \{\Psi_K \leq 1\}$ jest powłoką wielomianowo-wypukłą zbioru $K_c := \{e^{i\theta}z;\ \theta \in \mathbb{R},\ z \in K\}$ (powłoką zbioru K względem wielomianów jednorodnych).

5.5. *TWIERDZENIE.* Jeśli $K \subset \mathbb{C}$, $c(K) > 0$, to $\log \Phi_K^* = G(z,K)$.

Twierdzenie to pokazuje, że $\log \Phi_K^*$ jest naturalnym uogólnieniem klasycznej funkcji Greena na przypadek N zmiennych zespolonych. Uogólnienie to uzyskane ponad 20 lat temu [28], znalazło zastosowania jako narzędzie badawcze w analizie wielowymiarowej, podobne do zastosowań klasycznej funkcji Greena na płaszczyźnie. Początkowo ([27], [28]) funkcje ekstremalne były wprowadzone tylko dla zbiorów zwartych za pomocą wzorów 5.3. W ciągu ostatnich 8-10 lat rozwinęła się teoria funkcji ekstremalnych Φ_E, Ψ_E dla dowolnych podzbiorów E przestrzeni $\mathbb{C}^N$. Znaleziono też wiele nowych zastosowań. Oprócz wyników matematyków krakowskich na ten temat (J. Siciak, W. Pleśniak, T. Winiarski, M. Klimek, S. Kołodziej) ważne wyniki w tym kierunku uzyskali matematycy zagraniczni: Zaharjuta, Sadullaev, Cegrell, Nguyen Thanh Van, Zeriahi, Bedford, Taylor, Alexander, Levenberg. Wśród tych ostatnich szczególnie ważną rolę dla rozwoju teorii funkcji ekstremalnych odegrały prace Zaharjuty, Sadullaeva, Bedforda, Taylora i Alexandera.

5.6. *TWIERDZENIE* [29]. Jeśli $E_j \subset \mathbb{C}^{N_j}$ $(j = 1,2)$ i oba zbiory są bądź jednocześnie zwarte, bądź jednocześnie otwarte, to

$$\Phi_{E_1\times E_2}(z,w) = \max\{\Phi_{E_1}(z), \Phi_{E_2}(w)\}, \qquad (z,w) \in \mathbb{C}^{N_1} \times \mathbb{C}^{N_2}.$$

5.7. *PRZYKŁAD*. Jeśli $h \in H$, $h(z) \geq m\|z\|$ $(m > 0)$, $E := \{h < 1\}$, $F := \{h \leq 1\}$, to $\Psi_E = h$, $\Phi_E = \max\{1,h\}$, $\Psi^*_F = h$, $\Phi^*_F = \max\{1,h\}$.

5.8. *TWIERDZENIE* (Podstawowe własności funkcji ekstremalnych; [30]).

I. $\Phi_B \leq \Phi_A$, $\Psi_B \leq \Psi_A$, gdy $A \subset B$.

II. $\Phi_{K_n} \uparrow \Phi_K$, $\Psi_{K_n} \uparrow \Psi_K$, gdy $K_{n+1} \supset K_n$, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$

III. $\Phi^*_{E_n} \downarrow \Phi^*_E$, $\Psi^*_{E_n} \downarrow \Psi^*_E$, gdy $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

IV. Zbiory $\{\Phi_E < \Phi^*_E\}$, $\{\Psi_E < \Psi^*_E\}$ są plp. W szczególności $\Phi^*_E = 1$ na $E \setminus A$, gdzie A jest plp. Ponadto, jeśli $E = K$ jest zwarty, to zbiór punktów nieciągłości funkcji Φ_K, Ψ_K jest plp typu F_σ.

V. $\Phi^*_{E \cup A} = \Phi^*_E$, gdy A jest plp; $\Psi^*_{E \cup A} = \Psi^*_E$, gdy $\mathbb{C} \cdot A$ jest plp.

VI. $\log \Phi^*_E \in \mathcal{L} \iff E$ nie jest plp.

$\log \Phi^*_E \equiv +\infty \iff E$ jest plp.

$\Psi^*_E \in H \iff \mathbb{C} \cdot E$ nie jest plp.

$\Psi^*_E \equiv +\infty \iff \mathbb{C} \cdot E$ jest plp.

VII. Jeśli $\Phi^*_E = 1$ na E, to $\Phi^*_E = \Phi_E$ w $\mathbb{C}^N$. W szczególności, jeśli K jest takim zbiorem zwartym, że Φ_K jest ciągła w każdym punkcie zbioru K, to Φ_K jest ciągła w $\mathbb{C}^N$.

VIII. Jeśli K nie jest plp, to $(dd^c \log \Phi^*_K)^n = 0$ w $\mathbb{C}^N \setminus \hat{K}$, gdzie $dd^c = 2i\partial\bar{\partial}$, $d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$ (zob. [5]).

W powyższych sformułowaniach symbole A,B,E,E_n oznaczają zbiory dowolne, K,K_n - zbiory zwarte.

Dowód (Szkic). Własność I jest oczywista, II wynika z 5.3, III i IV wynikają z twierdzenia Bedforda-Taylora o zbiorach zaniedbywalnych oraz z tego, że przeliczalna suma zbiorów plp jest zbiorem plp.

Podamy dowód własności V dla Φ (dla Ψ jest analogiczny). Bez szkody można założyć, że E jest ograniczony i nie plp. Dzięki 4.8 istnieje taka funkcja $g \in G$, że $g = 0$ na $A \cup \{\Phi_E < \Phi^*_E\}$ oraz $g \leq 1$ na E. Ponieważ $(\Phi^*_E)^{1-\varepsilon} g^\varepsilon \in G$ oraz $(\Phi^*_E)^{1-\varepsilon} g^\varepsilon \leq 1$ na $E \cup A$ $(0 < \varepsilon < 1)$, więc

$(\Phi_E^*)^{1-\varepsilon} g^{\varepsilon} \le \Phi_{E\cup A}^*$ $(0 < \varepsilon < 1)$. Przeto $\Phi_E^* \le \Phi_{E\cup A}^*$. Ponieważ nierówność przeciwna jest oczywista, więc V jest wykazane.

Wykażemy teraz własności VI (tylko dla Φ, bo dla Ψ dowód jest analogiczny). Wystarczy rozważyć przypadek zbioru E ograniczonego. Jeśli E jest plp, to niech g będzie taką funkcją klasy G, że $g = 0$ na E. Wtedy $\forall_{k\ge 1}$ $kg \le \Phi_E$, skąd wynika, że $\Phi_E^* \equiv +\infty$.

Na odwrót, jeśli E nie jest plp; to dzięki 4.5 mamy

$$f(z) \le \frac{\|f\|_E}{\alpha(E)} \max\{1, \|z\|\}, \qquad f \in G,$$

skąd wynika, że $\Phi_E^*(z) \le \max\{1, \|z\|\}/\alpha(E)$ w $\mathbb{C}^N$. Przeto $\log \Phi_E^*(z) \in L$.

Własność VII wynika z VI i (5.3).

§6. POJEMNOŚĆ W $\mathbb{C}^N$. Niech B oznacza kulę jednostkową w $\mathbb{C}^N$ względem ustalonej normy.

6.1. Łatwo sprawdzić, że funkcje zbioru α i ρ, określone w 4.3, wyrażają się przy pomocy funkcji ekstremalnych Φ i Ψ odpowiednio wzorami

$$\alpha(E) = 1/\|\Phi_E\|_B = 1/\|\Phi_E^*\|_B, \quad \rho(E) = 1/\|\Psi_E\|_B = 1/\|\Psi_E^*\|_B, \quad E \subset \mathbb{C}^N,$$

co dzięki 5.8 implikuje następujące

6.2. *TWIERDZENIE* [30]. Jeśli c oznacza którąkolwiek z funkcji α lub ρ, to c jest *pojemnością Choqueta*, tzn. c spełnia następujące aksjomaty

(I) $c(A) \le c(B)$, gdy $A \subset B$;

(II) $c(K_n) \downarrow c(K)$, gdy $K_{n+1} \subset K_n$, $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$;

(III) $c(E_n) \uparrow c(E)$, gdy $E_n \subset E_{n+1}$, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$,

gdzie A, B, E, E_n są dowolnymi zbiorami, a K, K_n – zbiorami zwartymi w $\mathbb{C}^N$.

WNIOSEK (Twierdzenie Choqueta). Jeśli $E \subset \mathbb{C}^N$ jest zbiorem borelowskim (lub ogólniej zbiorem K-analitycznym), to

$$c(E) = \sup\{c(K);\ K \subset E\} = \inf\{c_*(\Omega);\ \Omega \supset E\},$$

gdzie K oznacza zbiór zwarty, Ω - otwarty, zaś $c_*(\Omega) := \sup \{c(K); K \subset \Omega\}$.

6.3. Warto odnotować, że dzięki 4.6 oraz 5.8 (V) pojemność c ma następującą własność: Jeśli $c(E_n) = 0$ $(n \geq 1)$, to $c(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$. Jeśli $c(A) = 0$, to $c(E \cup A) = c(E)$.

6.4. Określamy w $\mathbb{C}^N$ dwie nowe funkcje zbioru wzorami

$$\tilde{\rho}_1(E) := \rho(\{1\} \times E), \quad \tilde{\rho}_2(E) := \rho(\mathbb{C} \cdot (\{1\} \times E) \cap S), \quad E \subset \mathbb{C}^N,$$

gdzie

$$S := \{(z_o, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N;\ |z_o|^2 + |z_1|^2 + \ldots + |z_N|^2 = 1\}.$$

Dzięki (4.8), (4.9), (5.2), (5.8) i (6.2) funkcje $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$ są pojemnościami Choqueta w $\mathbb{C}^N$, przy czym

$$\tilde{\rho}_j(E) = 0 \Longleftrightarrow E \text{ jest plp};$$
$$\tilde{\rho}_j(E \cup A) = \tilde{\rho}_j(E), \quad \text{gdy} \quad \tilde{\rho}_j(A) = 0;$$
$$\tilde{\rho}_j(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0, \quad \text{gdy} \quad \tilde{\rho}_j(E_n) = 0 \quad (n \geq 1).$$

Można sprawdzić, że

$$\alpha(E) \leq \tilde{\rho}_1(E) \leq 2\alpha(E), \quad \text{gdy} \quad E \subset \mathbb{C}^N,$$

$$\frac{\alpha(E)}{\sqrt{1+R^2}} \leq \tilde{\rho}_2(E) \leq \min\{1, \tilde{\rho}_1(E)\}, \quad \text{gdy} \quad E \subset B(0,R).$$

6.5. Odpowiednikiem pojemności logarytmicznej zbioru płaskiego jest funkcja zbioru w $\mathbb{C}^N$ zdefiniowana wzorem

$$(*) \qquad c(E) := 1/\limsup_{\|z\| \to \infty} (\Phi_E(z)/\|z\|).$$

Już dość dawno było wiadomo, że $c(E) = 0 \Longleftrightarrow E$ jest plp oraz, że c spełnia aksjomaty (I) i (III) pojemności Choqueta. Ostatnio S. Kołodziej [13], student V roku matematyki UJ udowodnił, że c spełnia także aksjomat (II). Pojemność $(*)$, podobnie jak pojemność logarytmiczna na płaszczyźnie, ma następującą własność

$$c(a + r\,U(K)) = r\,c(K), \qquad K \subset \mathbb{C}^N,$$

gdzie $a \in \mathbb{C}^N$, $r \geq 0$, U jest przekształceniem $\mathbb{C}$-liniowym unitarnym przestrzeni $\mathbb{C}^N$.

Pomiędzy pojemnościami c i α zachodzą następujące związki

$$c(E) \leq \alpha(E) \leq M(r)c(E)^{1/N}, \quad \text{gdy} \quad E \subset B(0,r),$$

gdzie $M(r) = \text{const} > 0$. Nierówność z lewej strony wynika z 4.5. Nierówność prawostronna została wykazana przez Taylora [31] z pewnym wykładnikiem $\delta > 0$ zamiast $1/N$. Ostatnio S. Kołodziej udowodnił, że gdy $N = 2$, wykładnik $1/2$ nie może być zastąpiony przez $\delta > 1/2$.

§7. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA POJEMNOŚCI ρ. Jeśli K jest zbiorem zwartym w $\mathbb{C}^N$, to - jak już wiemy -

$$\hat{K}_c = \{z \in \mathbb{C}^N;\ \Psi_K(z) \leq 1\}$$

jest powłoką wielomianowo-wypukłą zbioru K względem wielomianów jednorodnych (powłoką wielomianowo-jednorodną). Jest oczywiste, że

$$\operatorname{int} \hat{K}_c = \{z \in \mathbb{C}^N;\ \Psi_K^*(z) < 1\}.$$

Ponieważ $\Psi_K(z) \leq \|z\|/\rho(K)$ w $\mathbb{C}^N$, więc

$$\rho(K) = \sup\{r \geq 0;\ B(0,r) \subset \hat{K}_c\},$$

czyli $\rho(K)$ jest promieniem maksymalnej kuli (przy danej normie w $\mathbb{C}^N$) domkniętej o środku 0, leżącej w powłoce wielomianowo-jednorodnej zbioru K.

WNIOSEK. $\rho(K) > 0 \iff \operatorname{int} \hat{K}_c \neq \emptyset \iff$ stożek $\mathbb{C} \cdot K$ nie jest plp.

Z własności jednorodnej funkcji ekstremalnej Ψ oraz ze wzoru $\rho(E) = 1/\|\Psi_E\|_B$ wynika, że

$$\rho(\Omega) = \sup\{\rho(K);\ K \subset \Omega\}, \qquad \rho(E) = \inf\{\rho(\Omega);\ \Omega \supset E\},$$

gdzie K oznacza zbiór domknięty, Ω - zbiór otwarty. Tak więc ρ jest *pojemnością zewnętrzną*.

Pomiędzy zbiorami $E \subset \mathbb{C}^N$ a podzbiorami kołowymi sfery jednostkowej $S = \{(z_0,z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^N;\ |z_0|^2 + \ldots + |z_N|^2 = 1\}$ w przestrzeni $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^N$ rzutowanie

$$\pi : E \to \mathbb{C} \cdot (\{1\} \times E) \cap S$$

ustala odpowiedniość wzajemnie jednoznaczną. Jeśli K jest zbiorem zwartym w $\mathbb{C}^N$, to $\tilde{\rho}_2(K) := \rho(\pi(K))$ jest promieniem maksymalnej kuli domkniętej o środku 0, leżącej w powłoce wielomianowo-jednorodnej zbioru $\pi(K)$.

Dlatego pojemność $\tilde{\rho}_2(E)$ zbioru $E \subset \mathbb{C}^N$ będziemy nazywać *promieniem rzutowym* zbioru E.

Można sprawdzić, że jeśli $N = 1$, to

$$\tau(K) \le \tilde{\rho}_2(K) \le \sqrt{e}\,\tau(K), \quad K \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

gdzie $\tau(K)$ jest pojemnością eliptyczną zbioru K.

§8. LEMAT O POCHODNYCH KIERUNKOWYCH. W niedawnej pracy dwaj matematycy holenderscy J. Korevaar i J. Wiegerinck [32] przedstawili proste kryterium na $\mathbb{R}$-analityczność funkcji ciągłej N zmiennych rzeczywistych, podali nowy dowód twierdzenia o ostrzu klina, ulepszyli twierdzenie Helgasona o nośniku transformaty Radona oraz twierdzenie Forelliego (mówiące, że funkcja określona w kuli przestrzeni $\mathbb{C}^N$, klasy C^∞ w 0 i holomorficzna na każdej prostej wektorowej, jest holomorficzna w kuli). Wszystkie te rezultaty oparli na następującym lemacie, pozwalającym szacować pochodne cząstkowe przez pochodne kierunkowe.

8.1. LEMAT K.-W. [32]. Niech Ω będzie niepustym otwartym podzbiorem sfery jednostkowej S^{N-1} w $\mathbb{R}^N$. Wtedy istnieją takie stałe dodatnie A i r, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, klasy C^∞ w punkcie $a \in \mathbb{R}^N$, zachodzą nierówności

$$(1) \qquad \left|\frac{s!}{\alpha!} D^\alpha f(a)\right| \le r^s A \sup_{\xi \in \Omega} \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s f(a + t\xi)\right|_{t=0},$$

gdy $s \ge 0$, $s = |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$, $\alpha \in \mathbb{Z}^N_+$.

Opierając się na własnościach pojemności ρ, podam teraz uogólnienie powyższego lematu, które automatycznie pozwoli uzyskać wyniki Korevaara-Wiegerincka w ulepszonej wersji. W dalszym ciągu przestrzeń $\mathbb{R}^N$ będziemy utożsamiać z podzbiorem $\mathbb{R}^N + i0$ przestrzeni $\mathbb{C}^N$, wyposażonej w normę euklidesową.

8.2. NIEROWNOSCI PODSTAWOWE. Niech $Q(z) = \sum_{|\alpha|=s} c_\alpha z^\alpha$ będzie wielomianem jednorodnym N zmiennych stopnia s. Niech K będzie podzbiorem zwartym przestrzeni $\mathbb{C}^N$ o dodatnim promieniu $\rho = \rho(K) = 1/\|\Psi_K\|_B$. Wtedy

(i) $\quad |Q(z)| \le \|Q\|_K \left(\frac{\|z\|}{\rho(K)} \right)^s, \qquad z \in \mathbb{C}^N,$

(ii) $\quad |c_\alpha| \le \left(\frac{\sqrt{N}}{\rho(K)} \right)^s \|Q\|_K, \qquad$ gdy $\quad |\alpha| \le s.$

Pierwsza nierówność wynika stąd, że $|Q(z)| \le \|Q\|_{B(0,\rho)} \left(\frac{\|z\|}{\rho} \right)^s$ oraz $\|Q\|_{B(0,\rho)} \le \|Q\|_K$. Druga wynika z nierówności Cauchy'ego, gdyż polidysk $\{|z_j| \le \rho/\sqrt{N}\ (j=1,\ldots,N)\}$ leży w kuli $B(0,\rho)$.

8.3. *ULEPSZONA WERSJA LEMATU K.-W.* Niech K będzie takim zbiorem zwartym w $\mathbb{R}^N$, że $\rho = \rho(K) > 0$. Jeśli $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ jest funkcją klasy C^∞ (dla (i') wystarczy G^∞) w punkcie $a \in \mathbb{R}^N$, to

(i') $\quad \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^s f(a+tx) \right|_{t=0} \le \left(\frac{\|x\|}{\rho} \right)^s \sup_{\xi \in K} \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^s f(a+t\xi) \right|_{t=0}, \qquad x \in \mathbb{R}^N;$

(ii') $\quad \left| \frac{s!}{\alpha!} D^\alpha f(a) \right| \le \left(\frac{\sqrt{N}}{\rho} \right)^s \sup_{\xi \in K} \left| \left(\frac{d}{dt}\right)^s f(a+t\xi) \right|_{t=0},$

gdzie $s \ge 0$, $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_N!$, $|\alpha| = s$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$.

Dowód. $Q(x) := \left(\frac{d}{dt}\right)^s f(a+tx)|_{t=0} = s! \sum_{|\alpha|=s} \frac{D^\alpha f(a)}{\alpha!} x^\alpha$ jest wielomianem jednorodnym N zmiennych stopnia s o współczynnikach $c_\alpha = \frac{s!}{\alpha!} D^\alpha f(a)$ (gdy f jest funkcją klasy C^∞ w punkcie a). Zatem (i'), (ii') są prostymi wnioskami z nierówności podstawowych (i), (ii).

Przypomnijmy, że f jest klasy G^∞ (G od Gateaux) w punkcie $a \in \mathbb{R}^N$, jeśli dla każdego $s \ge 1$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}^N$ istnieje pochodna kierunkowa

$$Q_s(x) = \left(\frac{d}{dt}\right)^s f(a+tx)|_{t=0},$$

przy czym Q_s jest wielomianem jednorodnym stopnia s.

8.4. *UOGÓLNIENIE TWIERDZENIA PRINGSHEIMA.* Klasyczne twierdzenie Pringsheima brzmi następująco: Jeśli $f : (a,b) \to \mathbb{C}$ jest klasy C^∞ i istnieje taka stała $r > 0$, że promień szeregu Taylora funkcji f jest w dowolnym punkcie z przedziału (a,b) nie mniejszy niż r, to f jest $\mathbb{R}$-

-analityczna w (a,b).

Opierając się na Lemacie 8.3 przedstawimy dwie wersje tego twierdzenia w $\mathbb{R}^N$.

I wersja. Niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$ będzie funkcją klasy G^∞ w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, spełniającą warunek

$$(1) \qquad \sup_{\xi \in K_x} \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s f(x+t\xi)\right|_{t=0} \le s!\, M_x c^s, \qquad x \in \Omega, \quad s \ge 0,$$

gdzie K_x jest podzbiorem zwartym przestrzeni $\mathbb{R}^N$, dla którego $\rho(K_x) \ge$ $\ge r = \text{const} > 0$, $M_x > 0$, $c = \text{const} > 0$.

Wtedy f jest $\mathbb{R}$-analityczna.

II wersja. Niech $f : \Omega \to \mathbb{C}$ będzie taką funkcją ciągłą w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, że

$$(2) \qquad \sup_{\xi \in K_x} \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s f(x+t\xi)\right|_{t=0} \le s!\, c^s M, \qquad s \ge 0, \quad x \in \Omega,$$

gdzie $K_x \subset \mathbb{R}^N$ jest zwarty, $\rho(K_x) \ge r = \text{const} > 0$, $c = \text{const} > 0$, $M =$ $= \text{const} > 0$. Zakładamy, że pochodne kierunkowe występujące w (2) istnieją.

Wtedy f jest $\mathbb{R}$-analityczna.

Dowód. I. $Q_s(x,\xi) := \frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dt}\right)^s f(x+t\xi)|_{t=0}$ jest dla ustalonego $x \in \Omega$ wielomianem jednorodnym stopnia s zmiennej $\xi \in \mathbb{R}^N$. Na podstawie (1), dzięki klasycznemu twierdzeniu Pringsheima, funkcja f jest $\mathbb{R}$-analityczna na każdej prostej $\{x+t\xi;\ t \in \mathbb{R}\}$, gdzie $x \in \Omega$, $\xi \in K_x$. Dzięki (1) oraz (i) mamy

$$(3) \qquad |Q_s(x;z)| \le M_x \left(\frac{c}{r}\|z\|\right)^s, \qquad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{C}^N, \quad s \ge 0,$$

skąd wynika, że szereg $\sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x,z)$ jest zbieżny dla $z \in B(0,r)$, przy każdym $x \in \Omega$. Z zasady identyczności dla funkcji $\mathbb{R}$-analitycznych jednej zmiennej otrzymujemy

$$f(x+\xi) = \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x,\xi), \quad \text{gdy} \quad x \in \Omega, \quad \|\xi\| < \min\left\{\frac{c}{r}, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\right\}.$$

W takim razie f jest $\mathbb{R}$-analityczna w Ω.

Dowód II wersji (taki sam jak w [32], gdzie zakładano, że nierówność (2) zachodzi dla K_x niezależnego od x i mającego niepuste wnętrze).

1^o Najpierw rozważmy przypadek, gdy f jest funkcją klasy C^∞. Wtedy na podstawie I wersji funkcja f jest $\mathbb{R}$-analityczna i ponadto, dzięki (3) dla każdego podzbioru wypukłego Ω_o zbioru Ω takiego, że

$$\operatorname{dist}\ (\Omega_o,\partial\Omega) \le \theta\frac{r}{c},$$

gdzie $0 < \theta < 1$, istnieje obszar $\tilde{\Omega}_\theta \supset \Omega_o$ w przestrzeni $\mathbb{C}^N$ oraz funkcja $\tilde{f}_\theta$ holomorficzna w $\tilde{\Omega}_\theta$ taka, że $\tilde{f}_\theta = f$ w Ω_o oraz

$$|\tilde{f}_\theta(z)| \le \sum_{s=0}^{\infty} |Q_s(x;z-x)| \le \frac{M}{1-\theta}, \qquad z \in \tilde{\Omega}_\theta.$$

2^o Niech $\{w_j\}$ będzie ciągiem standardowych funkcji klasy C^∞ w R^N aproksymujących δ Diracka. Wtedy splot $f_j = f * \omega_j$ jest funkcją klasy $C^\infty(\Omega_o)$, $\Omega_o \subset\subset \Omega$, Ω_o - wypukły. Ponadto funkcja f_j spełnia nierówności (2) w Ω_o. Przeto istnieje funkcja $\tilde{f}_j$ holomorficzna w $\tilde{\Omega}_\theta$ taka, że $\tilde{f}_j = f_j$ w Ω_o oraz $|\tilde{f}_j| \le \frac{M}{1-\theta}$ w $\tilde{\Omega}_\theta$. Na podstawie twierdzenia Vitaliego ciąg $\{\tilde{f}_j\}$ jest w $\tilde{\Omega}_\theta$ zbieżny lokalnie jednostajnie do funkcji holomorficznej $\tilde{f}$ takiej, że $\tilde{f} = f$ w Ω_o.

§.5. *WZMOCNIONE TWIERDZENIA HELGASONA O SUPPORCIE TRANSFORMACJI RADONA.* Przypomnijmy najpierw

TWIERDZENIE HELGASONA [8]. Jeśli $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą spełniającą warunek

$$(4)\qquad |f(x)| \le \frac{M_k}{(1+\|x\|)^k}, \qquad k \ge 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

której transformata Radona, określona wzorem

$$(5)\qquad \hat{f}(x,t) := \int_{\{\omega\cdot x=t\}} f(x)dm(x), \qquad \omega \in S^{N-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

(gdzie $\omega\cdot x = \omega_1 x_1 + \ldots + \omega_N x_N$, zaś m oznacza $(N-1)$-wymiarową miarę Lebesgue'a na hiperpłaszczyźnie $\{\omega\cdot x = t\}$) ma nośnik zwarty, to f ma nośnik zwarty.

WZMOCNIONE TWIERDZENIE HELGASONA. Niech funkcja ciągła $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ spełnia warunek (4). Ponadto załóżmy, że

$$(6)\qquad |\hat{f}(\omega,t)| \le M_\omega e^{-\varepsilon_\omega |t|}, \qquad \omega \in S^{N-1}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$(M_\omega > 0,\ \varepsilon_\omega > 0)$ oraz, że $\forall \omega \in K$, gdzie $K \subset S^{N-1}$ i $\rho(K) > 0$, funkcja $t \to \hat{f}(\omega,t)$ ma nośnik zwarty. Wtedy f ma nośnik zwarty.

Korevaar i Wiegerinck [32] udowodnili to twierdzenie przy dodatkowym założeniu, że $\operatorname{int} K \ne \emptyset$.

Dowód. Przyjmijmy $K_\nu := \{\omega \in K;\ \operatorname{supp} \hat{f}(\omega,\cdot) \subset [-\nu,\nu]\}$, $\nu \ge 1$. Wtedy $K_\nu \uparrow K$. Wiadomo, że $\rho(K_\nu) \uparrow \rho(K)$, więc $\rho(K_\nu) \ge r > 0$ $(\nu \ge \nu_0)$. Ponieważ f jest szybko malejąca w ∞, więc $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ oraz $\hat{f}$ jest ograniczona, zaś transformata Fouriera

$$\tilde{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot y} f(y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

jest funkcją klasy C^∞ oraz $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Dla ustalonego $\omega \in S^{N-1}$ mamy (dzięki twierdzeniu Fubiniego)

$$(7)\qquad \tilde{f}(\lambda\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega,t)e^{-i\lambda t}dt, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dzięki (6) prawa strona (7) przedstawia funkcję holomorficzną w zbiorze $\{\lambda = u + iv;\ |v| < \varepsilon\omega\}$ (otoczenie osi rzeczywistej). Jeśli $\omega \in K_{\nu_0}$, to funkcja $\lambda \to \tilde{f}(\lambda\omega)$ jest całkowita typu wykładniczego, przy czym

$$(8)\qquad |\tilde{f}(\lambda\omega)| \le Ce^{\nu_0|\lambda|}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Zatem

$$\frac{1}{s!}\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s \tilde{f}(t\omega)\right|_{t=0} \le Ce^{\nu_0 r}/r^s, \qquad r > 0,\quad s > 0,\quad \omega \in K_{\nu_0}.$$

Ponieważ $e^{\nu_0 r}/r^s$ przyjmuje najmniejszą wartość dla $r_s := s/\nu_0$, więc

$$\frac{1}{s!}\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s \tilde{f}(t\omega)\right|_{t=0} \le C_1 \frac{\nu_0^s}{s!}, \qquad s \ge 0,\quad \omega \in K_{\nu_0}.$$

Przyjmijmy

$$Q_s(x) := \frac{1}{s!}\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s \tilde{f}(tx)\right|_{t=0}, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Wedy dzięki (8.2) (i),

$$|Q_s(z)| \le C_1 \frac{\nu_o^s}{s!} \left(\frac{\|z\|}{r}\right)^s, \qquad z \in \mathbb{C}^N, \quad s \ge 1,$$

stąd wynika, że funkcja $\tilde{F}(z) := \sum_{s=0}^{\infty} Q_s(z)$ jest całkowita typu wykładniczego, przy czym

$$|\tilde{F}(z)| \le C_1 \exp \frac{\nu_o}{r} \|z\|, \qquad z \in \mathbb{C}^N.$$

Ponadto z zasady identyczności wynika, że

$$\tilde{F}(\lambda\omega) = \tilde{f}(\lambda\omega), \qquad \text{gdy} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \omega \in S^{N-1},$$

lub innymi słowy $\tilde{F} = \tilde{f}$ w $\mathbb{R}^N$. Ponieważ $\tilde{F}$ jest typu wykładniczego oraz $\tilde{F}|_{\mathbb{R}^N} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, więc na podstawie twierdzenia Paleya-Wienera $\tilde{F}$ jest transformatą Fouriera funkcji o nośniku zwartym (leżącym w kuli $\{\|x\| \le \frac{\nu_o}{r}\}$. A więc funkcja f ma nośnik zwarty.

8.6. TWIERDZENIE O OSTRZU KLINA. Niech G będzie podzbiorem przestrzeni $\mathbb{C}^N$ postaci

$$G = (\Omega + iV_+) \cup (\Omega + i0) \cup (\Omega + iV_-),$$

gdzie Ω jest zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^N$, $V_+ = \{t\xi;\ 0 < t < R,\ \xi \in \omega\}$, $V_- = \{t\xi;\ -R < t < 0,\ \xi \in \omega\}$, ω jest podzbiorem otwartym sfery jednostkowej S^{N-1}, $V_+ \cap V_- = \emptyset$. Przyjmijmy $\delta(x) := \min\{R, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)\}$, $x \in \Omega$ i niech $\tilde{\Omega} := \bigcup_{x\in\Omega} B(x, \rho\delta(x))$, gdzie $\rho = \rho(\omega)$.

Wtedy każda funkcja $f \in C(G) \cap \mathcal{O}((\Omega + iV_-) \cup (\Omega + iV_+))$ daje się przedłużyć do funkcji holomorficznej $\tilde{f}$ w $\tilde{\Omega}$.

Dowód. Przy wszelkich ustalonych $x \in \Omega$, $\xi \in \omega$ funkcja $\lambda = u + iv \to f(x + \lambda\xi) = f(x + u\xi + iv\xi)$ jest (dzięki twierdzeniu Morery) holomorficzna w kole $\{|\lambda| < \delta(x)\}$. Dlatego

$$\frac{1}{s!} \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^s f(x + t\xi)\right|_{t=0} \le M(x)/\delta(x)^s, \qquad s \ge 1, \qquad \xi \in \omega,$$

przy czym funkcja $M(x)$ jest lokalnie ograniczona z góry w Ω, a funkcja $\delta(x)$ jest lokalnie ograniczona z dołu przez liczbę dodatnią. Stąd, dzięki 8.4, f jest $\mathbb{R}$-analityczna w Ω. Ponadto

$$|Q_s(x,z)| \le M(x)\left(\frac{\|z\|}{\rho\delta(x)}\right)^s, \qquad s \ge 0, \quad x \in \Omega, \quad z \in \mathbb{C}^N,$$

gdzie $Q_s(x,z) := \frac{1}{s!}\left(\frac{d}{dt}\right)^s f(x+tz)|_{t=0}$. W takim razie przy ustalonym $x \in \Omega$ szereg $\sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x,z)$ jest zbieżny w kuli $\|z\| < \rho\delta(x)$, skąd wynika istnienie przedłużenia $\tilde{f}$ na zbiór $\tilde{\Omega}$.

8.7. WARUNEK WYSTARCZAJĄCY NA TO, BY FUNKCJA $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ *BYŁA CAŁKOWITA.* Jeśli $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ jest klasy G^∞ w $0 \in \mathbb{R}^N$, funkcja $\mathbb{R} \ni t \to f(t\omega)$ jest $\mathbb{R}$-analityczna dla każdego $\omega \in E \subset S^{N-1}$, gdzie $\rho(E) > 0$, to f jest całkowita (tzn. f jest restrykcją do $\mathbb{R}^N$ pewnej funkcji $\tilde{f}$ holomorficznej w $\mathbb{C}^N$).

Dowód. Przyjmijmy $Q_n(x) := \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(tx)|_{t=0}$ $(n \ge 0)$. Dla danego ciągu $\varepsilon_j > 0$, $\lim \varepsilon_j = 0$, określmy

$$F_{jl} := \{z \in \mathbb{C}^N;\ |z| = 1,\ |Q_n(z)| \le \varepsilon_j^n,\ n \ge l\}, \qquad j,l \ge 1.$$

Jeśli $2r := \rho(E)$, to $\rho(F_{jl}) > r$ $(l \ge l(j))$ oraz

$$|Q_n(z)| \le \left(\frac{\varepsilon_j\|z\|}{r}\right)^n, \qquad n \ge l(j), \qquad z \in \mathbb{C}^N.$$

W takim razie szereg $\sum_{n=0}^{\infty} Q_n$ jest jednostajnie zbieżny w kuli $\|z\| < r/\varepsilon_j$ $(j \ge 1)$. Funkcja $f := \sum_{n=0}^{\infty} Q_n$ jest holomorficzna w $\mathbb{C}^N$ oraz $\tilde{f} = f$ w $\mathbb{R}^N$.

8.8. PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA FUNKCJI EKSTREMALNEJ JEDNORODNEJ W TEORII RODZIN NORMALNYCH W SENSIE MONTELA. Udowodnimy, że:

Jeśli $D \subset \mathbb{C}^N$ jest obszarem zbalansowanym, F jest taką rodziną funkcji holomorficznych w D, że dla każdej prostej zespolonej L przechodzącej przez 0 rodzina F jest lokalnie ograniczona w kole $L \cap D$, to F jest lokalnie ograniczona w D.

Dowód. Przyjmijmy $E_j := \{z \in D: |f(\lambda z)| \le j,\ \forall_{f\in F},\ \forall_{\lambda\in\mathbb{C}} |\lambda| \le 1\}$. Wtedy E_j jest zbalansowany, $E_j \subset E_{j+1}$, $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = D$. Przeto $\Psi^*_{E_j} \downarrow \Psi_D$.

Niech U_a będzie relatywnie zwartym podzbiorem otwartym obszaru D, zawierającym ustalony punkt $a \in D$. Wtedy $\theta := \sup_{U_a} \Psi_D(z) < 1$. Dla liczby ω, gdzie $\theta < \omega < 1$, znajdziemy j tak duże, że $\Psi^*_{E_j}(z) \le \omega$, gdy $z \in U_a$. Jeśli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z;f), \qquad z \in D,$$

jest rozwinięciem funkcji $f \in F$ w szereg wielomianów jednorodnych, to

$$|Q_n(z;f)| \le j. \qquad z \in U_a, \quad f \in F, \quad n \ge 0,$$

skąd wynika, że $|f(z)| \le j/(1-\omega)$, $z \in U_a$, $f \in F$, czyli funkcje rodziny F są jednostajnie ograniczone w U_a.

SPIS LITERATURY

[1] H. Alexander, *Projective capacity,* Ann. of Math. Studies 100 (1981), 3 -27.

[2] H. Alexander, *A note of projective capacity,* Canad. J. Math.34 (1982), 1319-1329.

[3] H. Alexander, *Capacities in $\mathbb{C}^N$,* Contemporary Mathematics 32(1984) 1-6.

[4] H. Alexander and B.A. Taylor, *Comparison of two capacities in $\mathbb{C}^N$,* Math. Z. 186 (1984), 407-417.

[5] E. Bedford and B.A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions,* Acta Math. 149 (1982), 1-40.

[6] M. Brelot, *Elements de la theorie classique du potentiel,* Centre de Documentation, Paris 1959.

[7] U. Cegrell, *Some characterizations of L-regular points,* Monatsh. für Math. 89 (1980), 289-292.

[8] S. Helgason, *The Radon transform,* Progress in Mathematics 5, Birkhäuser, Stuttgart 1980.

[9] B. Josefson, *On the equivalence between locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions,* Ark. Mat. 16 (1)(1978), 109--115.

[10] M. Klimek, *Extremal plurisubharmonic functions and L-regular sets in $\mathbb{C}^N$,* Proc. Royal Irish Acad. 82A (1982), 217-230.

[11] M. Klimek, *Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudodistances,* Bull. Soc. Math. France (w druku).

[12] M. Klimek, *Joint spectra and analytic set-valued functions,* University College Dublin, Preprint, 1985.

[13] S. Kołodziej, *Pojemność logarytmiczna w* $\mathbb{C}^N$, Praca magisterska, Instytut Matematyki UJ, 1985.

[14] F. Leja, *Sur l'existence du domaine de convergence des series des polynomes homogenes,* Bull. de l'Ac. Pol. de Sc. Math. 1933, 435-461.

[15] F. Leja, *Sur une classe de fonctions homogenès et les séries de Taylor,* Ann. de la Soc. Pol. de Math. 22 (1949), 245-268.

[16] F. Leja, *Teoria Funkcji Analitycznych,* PWN, Warszawa 1957.

[17] N. Levenberg, *Capacities in Several Complex Variables,* The University of Michigan, Dissertation, 1984.

[18] N. Levenberg, *Monge-Ampère measures associated to extremal plsh functions in* $\mathbb{C}^N$, Preprint 1984.

[19] N. Levenberg and B.A. Taylor, *Comparison of a Robin constant with Tchebysheff constants,* Proceedings Toulouse Conference 1983, Springer Lecture Notes 1094.

[20] M. Lundin, *The extremal plsh function for the complement of convex symmetric subset of* $\mathbb{R}^N$, The University of Göteborg, Preprint 1983-8.

[21] M. Lundin, *An explicit solution of the complex Monge-Ampère equation,* The University of Göteborg, Preprint, 1984.

[22] Nguyen Thanh Van et A. Zeriahi, *Familles de polynômes presque partout bornées,* Bull. Sc. Math. 197 (1983), 81-91.

[23] W. Pleśniak, *Quasianalytic functions in the sense of Bernstein,* Diss. Math. CXLVII, Warszawa 1977.

[24] W. Pleśniak, *Sur la L-regularité des compacts de* $\mathbb{C}^N$, Polycopie de la Faculté des sciences de Toulouse, U.E.R. de Math., Toulouse 1980.

[25] A. Sadullaev, *Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds,* Usp. Mat. Nauk 36, 4 (220)(1981), 53-105.

[26] A. Sadullaev, *An estimate of polynomials on analytic sets,* Izv. Akad. Nauk SSSR 46, 3 (1982), 524-534.

[27] J. Siciak, *On an extremal function and domains of convergence of series of homogeneous polynomials,* Ann. Pol. Math. 10 (1961), 297-307.

[28] J. Siciak, *On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several variables,* Trans. Amer. Math. Soc. 105, 2 (1962), 322-357.

[29] J. Siciak, *Extremal plsh functions in* $\mathbb{C}^N$, Ann. Pol. Math.39 (1981), 175-211, (ukazała się wcześniej w materiałach Konferencji Szkoleniowej w Podlesicach 1977).

[30] J. Siciak, *Extremal plsh functions and capacities in* $\mathbb{C}^N$, Sophia Kokyuroku in Math. 14, Sophia University, Tokyo 1982, 1-97.

[31] B.A. Taylor, *An estimate for an extremal plsh function in* $\mathbb{C}^N$, Seminaire Lelong-Skoda, Springer Lecture Notes.

[32] J. Wiegerinck, *Entire functions of Paley-Wiener type in* $\mathbb{C}^N$, *Radon transforms and problems of holomorphic extension*, University of Amsterdam, Thesis, 1985.

[33] T. Winiarski, *Application of approximation and interpolation methods to the examination of entire functions of* n *complex variables,* Ann. Pol. Math. 28 (1973), 97-121.

[34] V.P. Zahariuta, *Transfinite diameter, Čebyšhev constants and a capacity of a compact set in* $\mathbb{C}^N$, Mat. Sb. 96 (138)(3)(1975), 374-389.

[35] V.P. Zahariuta, *Extremal plsh functions, orthogonal polynomials and Bernstein-Walsh theorem for analytic functions of several variables,* Ann. Pol. Math. 33 (1976), 137-148.

[36] A. Zeriahi, *Capacité, constante de Tchebysheff et polynômes orthogonaux associés a un compact de* $\mathbb{C}^N$, University of Toulouse, Preprint, 1984.

Sielpia, 14-19 stycznia 1985