MATERIAŁY NA XXXIV KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2013 **Łódź** **str. 33**

LICZBA MILNORA PRZEKROJU OSOBLIWOŚCI IZOLOWANEJ HIPERPŁASZCZYZNAMI

Maciej Sękalski (Kielce)

Niech będzie $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Szereg f nazywamy *osobliwością izolowaną* w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, gdy $f(0) = 0$ oraz gradient $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$ ma zero izolowane w początku układu $0 \in \mathbb{C}^n$. Osobliwość f nazywamy *quasi-jednorodną typu* $(w_1, \ldots, w_n)$ jeśli f jest wielomianem postaci

$$f = \sum_{\frac{i_1}{w_1} + \cdots + \frac{i_n}{w_n} = 1} c_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

dla pewnych wymiernych, dodatnich wag $w_1, \ldots, w_n$. Ponieważ osobliwość jest izolowana jest $w_i > 1$ dla $i = 1, \ldots, n$.

W 1970r. Milnor i Orlik w pracy [MO] udowodnili

Twierdzenie 1 *Jeżeli f jest osobliwością izolowaną quasi-jednorodną typu $(w_1, \ldots, w_n)$, to*

$$\mu(f) = \prod_{i=1}^{n} (w_i - 1).$$

Załóżmy, że $w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_n$ i rozważmy k-wymiarową hiperpłaszczyznę $H^{(k)}$ określoną równaniami

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= a_{k+1,1}x_1 + \cdots + a_{k+1,k}x_k = L_{k+1}(x_1, \ldots, x_k), \\ x_{k+2} &= a_{k+2,1}x_1 + \cdots + a_{k+2,k}x_k = L_{k+2}(x_1, \ldots, x_k), \\ \ldots & \\ x_n &= a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,k}x_k = L_n(x_1, \ldots, x_k) \end{aligned}$$

o generycznych współczynnikach $a_{i,j}$, $i = k+1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$.

Połóżmy $f^{(k)} = f(x_1, \ldots, x_k, L_{k+1}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, L_n(x_1, \ldots, x_k))$. W pracy [T] Teissier pokazał, że $f^{(k)}$ jest również osobliwością izolowaną. Oznaczmy liczbę Milnora tej osobliwości przez $\mu^{(k)}(f)$ i połóżmy $\mu^*(f) = (\mu^{(n)}(f), \ldots, \mu^{(1)}(f), \mu^{(0)}(f) = 1)$. Oczywiście $\mu^{(n)}(f) = \mu(f)$.

Przykład 1. Jeżeli osobliwość izolowana $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ jest formą jednorodną stopnia d, to z formuły Milnora-Orlika wynika, że $\mu^{(k)}(f) = (d-1)^k$ dla $k = 1, \ldots, n$.

Przypomnijmy oszacowanie liczby Milnora osobliwości izolowanej f w terminach diagramu Newtona $\Gamma_+(f)$ (c.f. [K]). Niech $X \subset \langle 0, +\infty)^n$ będzie zwartym wielościanem. Dla $I \subset \{1, \ldots, n\}$ przyjmijmy $X^I = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X : x_i = 0 \text{ dla } i \notin I\}$. *Liczbą Newtona* wielościanu X nazywamy liczbę

$$\nu(X) = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}} (-1)^{n-|I|} |I|! \mathrm{Vol}_{|I|}(X^I)$$

gdzie $|I|$ oznacza liczbę elementów podzbioru I, a $\mathrm{Vol}_{|\mathrm{I}|}(X^I)$ jest $|I|$-wymiarową objętością zbioru X^I. Przyjmujemy, że $\mathrm{Vol}_0(X^\emptyset) = 1$, gdy $0 \in X$ oraz $\mathrm{Vol}_0(X^\emptyset) = 0$, gdy $0 \notin X$.

Niech $f = \sum_{i \in \mathbb{N}^n} c_i x^i \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$, $f(0) = 0$, dla $i = (i_1, \ldots, i_n)$ przyjmujemy $x^i = x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$. *Diagramem Newtona* osobliwości f nazywamy zbiór

$$\Gamma_+(f) = \mathrm{convex}\{i + \langle 0, +\infty)^n, c_i \neq 0\}.$$

Załóżmy, że $\Gamma_+(f)$ ma punkty wspólne z każdą osią układu współrzędnych i niech $\Gamma_-(f) = \overline{\langle 0, +\infty)^n \setminus \Gamma_+(f)}$. Kusznirenko w pracy [K] udowodnił, że jeżeli f jest osobliwością izolowaną, to

$$\mu(f) \geqslant \nu(\Gamma_-(f)). \tag{1}$$

Udowodnimy oszacowanie

Twierdzenie 2 *Jeżeli f jest osobliwością izolowaną, quasi-jednorodną typu $(w_1, \ldots, w_n)$, to $\mu^{(k)}(f) \geqslant \prod_{i=1}^k (w_i - 1)$.*

Dowód. Pokażemy, że diagram Newtona osobliwości $f^{(k)}$ leży powyżej hiperpłaszczyzny o równaniu $\frac{\alpha_1}{w_1} + \cdots + \frac{\alpha_k}{w_k} = 1$. Istotnie, mamy

$$f^{(k)} = \sum_{\frac{i_1}{w_1}+\cdots+\frac{i_n}{w_n}=1} c_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k} L_{k+1}(x_1,\ldots,x_k)^{i_{k+1}}\cdots L_n(x_1,\ldots,x_k)^{i_n}.$$

Ponieważ $L_s(x_1,\ldots,x_k)^{i_s} = \sum_{j_1^s+\cdots j_k^s=i_s} b_{j_1^s\ldots j_k^s} x_1^{j_1^s}\cdots x_k^{j_k^s}$ dla $s = k+1,\ldots,n$, zatem

$$f^{(k)} = \sum d_{i,j} x_1^{i_1+\sum_{s=k+1}^n j_1^s} x_2^{i_2+\sum_{s=k+1}^n j_2^s}\cdots x_k^{i_k+\sum_{s=k+1}^n j_k^s},$$

gdzie

$$\frac{i_1}{w_1}+\cdots+\frac{i_n}{w_n} = 1,$$
$$\sum_{p=1}^k j_p^s = i_s, \text{ dla } s = k+1,\ldots,n.$$

Mamy

$$\frac{i_1+\sum_{s=k+1}^n j_1^s}{w_1}+\cdots+\frac{i_k+\sum_{s=k+1}^n j_k^s}{w_k} = \sum_{p=1}^k \frac{i_p}{w_p} + \sum_{p=1}^k \frac{1}{w_p}\sum_{s=k+1}^n j_p^s =$$
$$= \sum_{p=1}^k \frac{i_p}{w_p} + \sum_{s=k+1}^n \sum_{p=1}^k \frac{j_p^s}{w_p} \geqslant \sum_{p=1}^k \frac{i_p}{w_p} + \sum_{s=k+1}^n \sum_{p=1}^k \frac{j_p^s}{w_s} =$$
$$= \sum_{p=1}^k \frac{i_p}{w_p} + \sum_{s=k+1}^n \frac{1}{w_s}\sum_{p=1}^k j_p^s = \sum_{p=1}^k \frac{i_p}{w_p} + \sum_{s=k+1}^n \frac{i_s}{w_s} = 1.$$

Zatem hiperpłaszczyzna o równaniu $\frac{\alpha_1}{w_1}+\cdots+\frac{\alpha_k}{w_k} = 1$ leży poniżej diagramu Newtona osobliwości $f^{(k)}$. Oznaczmy $\tilde{f}^{(k)} = f^{(k)} + x_1^m + \cdots + x_k^m$, gdzie $m \in \mathbb{N}$ jest na tyle duże aby $\mu(\tilde{f}^{(k)}) = \mu(f^{(k)})$. Wtedy

$$\mu(f^{(k)}) = \mu(\tilde{f}^{(k)}) \geqslant \nu(\Gamma_-(\tilde{f}^{(k)})) \geqslant (w_1-1)\cdots(w_k-1).$$

Pierwsza nierówność powyżej wynika z oszacowania (1) Kusznirenki, druga z wniosku 3.1 pracy [F], który cytujemy poniżej:

Twierdzenie 3 (Corollary 3.1,[F]) *Niech $f \in \mathbb{C}\{z_1,\ldots,z_n\}$ będzie osobliwością izolowaną w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$ i niech H będzie dowolną $(n-1)$-wymiarową hiperpłaszczyzną leżącą poniżej diagramu $\Gamma_+(f)$ i przecinającą osie układu współrzędnych w punktach $a_1,\ldots,a_n$, gdzie $a_i \geqslant 1$ dla $i = 1,\ldots,n$. Wtedy*

$$\mu(f) \geqslant (a_1-1)\cdot\cdots\cdot(a_n-1).$$

Przykład Briançona, Spedera pokazuje, że w przypadku quasi-jednorodnym może zachodzić nierówność ostra.

Przykład 2. ([BS]) Rozważmy rodzinę osobliwości izolowanych

$$f_t(x,y,z) = z^5 + ty^6z + y^7x + x^{15}.$$

Wielomiany f_t są quasi-jednorodne typu $\left(15, \frac{15}{2}, 5\right)$. Liczba Milnora $\mu(f_t) = 364$. Rozważmy płaszczyznę dwuwymiarową określoną równaniem $x = ay + bz$, wtedy $f_t^{(2)} = f_t(ay+bz, y, z) = z^5 + ty^6z + y^7(ay+bz) + (ay+bz)^{15}$. Łatwo sprawdzić, że $\mu^{(2)}(f_t) = \begin{cases} 26 \text{ dla } t \neq 0, \\ 28 \text{ dla } t = 0. \end{cases}$. Zatem $\mu^{(2)}(f_t) \geqslant 26 = (5-1)(\frac{15}{2} - 1)$.

Literatura

[B-A] C. Bivià-Ausina, *Generic linear sections of complex hypersurfaces and monomial ideals*, Topology and its Applications, 159 (2012), pp. 414-419.

[BS] J. Briançon, J-P. Speder, *GÉOMÉTRIE ANALITIQUE – La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, pp. 365-367.

[F] M. Furuya, *Lower Bound of Newton Number*, Tokyo J. Math., Vol. 27, No.1, 2004, pp. 177-186.

[K] A. G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Inventiones Math. 32 (1976), 131.

[MO] J. Milnor, P. Orlik, *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology 9 (1970), 385-393.

[T] B. Teissier, *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque 7 et 8, Soc. Math. France, Paris, 1973, 285-362.

The Milnor number of the hyperplane sections of an isolated singularity

Summary. We give a lower bound for the Milnor number of a generic hyperplane section of an isolated quasi-homogeneous singularity.

Politechnika Świętokrzyska,
Katedra Matematyki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia PP 7,
E-mail: matms@tu.kielce.pl

Łódź, 7 – 11 stycznia 2013 r.