MATERIAŁY NA XXXIII KONFERENCJĘ I WARSZTATY
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2012 Łódź str. 67

O PRZYKŁADZIE BRIANÇONA I SPEDERA

Maciej Sękalski (Kielce)

Niech będzie $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Kiełek hiperpowierzchni $(X, 0)$ danej równaniem $f = 0$ w otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^n$ nazywamy *osobliwością izolowaną* w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$, gdy

$$f(0) = 0 \text{ oraz gradient } \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) \neq 0 \text{ dla } x \neq 0$$

w otoczeniu zera w $\mathbb{C}^n$.

Osobliwość $f = 0$ nazywamy *quasi-jednorodną typu* $(w_1, \ldots, w_n)$ jeśli f jest wielomianem postaci

$$f = \sum_{\frac{i_1}{w_1} + \cdots + \frac{i_n}{w_n} = 1} c_{i_1 \ldots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

dla pewnych wymiernych wag $w_1, \ldots, w_n$.

W 1970r. Milnor i Orlik w pracy [MO] pokazali, że liczba Milnora $\mu(X)$ osobliwości izolowanej, quasi-jednorodnej typu $(w_1, \ldots, w_n)$ jest równa $\prod_{i=1}^n (w_i - 1)$. B. Teissier w pracy [T1] rozważa liczby Milnora $\mu^i(X) = \mu(X \cap H_i)$, gdzie H_i jest generyczną i-wymiarową hiperpłaszczyzną przechodzącą przez początek układu współrzędnych. Oczywiście $\mu^n(X) = \mu(X)$, oraz $\mu^1(X) = \operatorname{ord} f - 1$. Oznaczmy za Teissierem $\mu^*(X) = (\mu^n(X), \ldots, \mu^0(X) = 1)$. Hipoteza Teisiera ([T1], Conjecture 1') mówi, że jeżeli osobliwości $(X_0, 0), (X_1, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ mają tę samą liczbę Milnora, to $\mu^*(X_0) = \mu^*(X_1)$. W pracy [B-S] autorzy prezentują przykład, który pokazuje, że powyższa hipoteza jest fałszywa.

Rozważmy rodzinę osobliwości izolowanych X_t, quasi-jednorodnych typu $\left(15, \frac{15}{2}, 3\right)$, określoną wielomianami

$$F_t(x,y,z) = z^3 + ty^5z + y^7x + x^{15}. \tag{1}$$

Ponieważ wagi (w_1, w_2, w_3) determinują typ topologiczny osobliwości (w $\mathbb{C}^3$,[Y], Theorem B), więc hiperpowierzchnie X_t mają ten sam typ topologiczny. Zgodnie z formułą Milnora-Orlika, liczba Milnora $\mu(X_t) = 182$ nie zależy od t.

Rozważmy generyczną płaszczyznę H_2, daną równaniem $x = ay + bz$ oraz osobliwości $X_t \cap H_2$ opisane równaniem

$$\phi_t(y,z) = z^3 + ty^5z + y^7(ay+bz) + (ay+bz)^{15} = 0.$$

Łatwo sprawdzić, że $\mu(\phi_0) = 14$ natomiast $\mu(\phi_t) = 13$ dla $t \neq 0$, wobec tego $\mu^*(X_0) = (182, 14, 2, 1) \neq (182, 13, 2, 1) = \mu^*(X_t)$ dla $t \neq 0$.

B. Teissier udowodnił, że jeżeli $\mu^*(X_t)$ nie zależy od t, to rodzina ta spełnia warunki stratyfikacji Whitneya. Mianowicie rozważmy rodzinę $(X_t, 0)$ osobliwości izolowanych opisanych równaniem $f(x_1, \dots, x_n, t) = f_t(x_1, \dots, x_n) = 0$. Możemy tę rodzinę traktować jako kiełek hiperpowierzchni X w przestrzeni $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$. Niech Y oznacza oś Ot. Wtedy $X \setminus Y$, Y są rozmaitościami gładkimi w $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0)$ oraz $Y \subset \overline{X \setminus Y}$. Rodzina X_t spełnia warunki Whitneya, gdy para $(X \setminus Y, Y)$ spełnia warunki Whitneya.

Przypomnijmy warunek (b) Whitneya. Załóżmy, że X, Y są rozmaitościami analitycznymi w $\mathbb{C}^n$ takimi, że $Y \subset \overline{X}$ i niech $y \in Y$, $\dim X = k$.

(b) Para (X, Y) spełnia warunek (b) Whitneya w punkcie y, gdy dla każdego ciągu $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ rozmaitości X oraz dla dowolnego ciągu $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset Y$, zachodzi implikacja

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{i\to\infty} x_i = \lim\limits_{i\to\infty} y_i = y, \\ \lim\limits_{i\to\infty} T_{x_i}X = \tau \in \mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{C}), \\ \lim\limits_{i\to\infty} \mathbb{C}\,(x_i - y_i) = \delta \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \delta \subset \tau.$$

T_xX oznacza k-wymiarową przestrzeń styczną w punkcie x do rozmaitości X, natomiast $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbb{C})$ jest przestrzenią k-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w $\mathbb{C}^n$.

Pokażemy, że rodzina osobliwości X_t opisana równaniem (1) nie spełnia warunku Whitneya w początku układu współrzędnych. Oznaczmy

$$X = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{C}^4 : F(x,y,z,t) = z^3 + ty^5z + y^7x + x^{15} = 0\} \text{ i } Y = \text{oś } Ot$$

i wybierzmy ciąg punktów (x_i) leżących na krzywej opisanej równaniami

$$F(x,y,z,t) = z^3 + ty^5z + y^7x + x^{15} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + ty^5 = 0, \tag{3}$$

$$y^7x + x^{15} - 2y^8 = 0. \tag{4}$$

Z powyższych równań $((2)-z\cdot(3)-(4))$ otrzymujemy

$$-2z^3+2y^8=0.$$

Połóżmy $y=u^3$, $z=u^8$. Z równania (4) mamy $0=x^{15}+u^{21}x-2u^{24}=(x^{14}+u^{21}+\cdots)(x-2u^3+\cdots)$. Przyjmijmy $x=2u^3+\cdots$ i z (3) mamy $t=\frac{-3z^2}{y^5}=-3u$. Punkty $X(u)=(2u^3+\cdots,u^3,u^8,-3u)$, $u\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ leżą na hiperpowierzchni $X\setminus Y$ i niech $Y(u)=(0,0,0,-3u)$ bedzie rzutem $X(u)$ na Y. Oczywiście $X(u)\to 0\in\mathbb{C}^4$ oraz $Y(u)\to 0\in\mathbb{C}^4$, gdy $u\to 0$. Ponadto $\lim_{u\to 0}\mathbb{C}(X(u)-Y(u))=(2:1:0:0)\in\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Ponieważ $F_x(X(u))=u^{21}+\cdots$, $F_y(X(u))=-u^{21}+\cdots$, $F_z(X(u))=0$ oraz $F_t(X(u))=u^{23}$, więc granicznym położeniem przestrzeni stycznych do X w punktach $X(u)$ przy $u\to 0$ jest hiperpłaszczyzna τ dana równaniem

$$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0.$$

Łatwo zauważyć, że prosta $(2:1:0:0)$ nie zawiera się w τ.

1 Ilorazy polarne hiperpowierzchni

Niech $l=(l_1:l_2:\ldots:l_n)\in\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ i $f(x_1,\ldots,x_n)=0$ będzie osobliwością izolowaną w otoczeniu $0\in\mathbb{C}^n$. *Krzywą polarną* w kierunku l nazywamy krzywą $(\nabla f)^{-1}(\mathbb{C}l)=\left\{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{l_1}=\ldots=\frac{\frac{\partial f}{\partial x_n}}{l_n}\right\}$. Przyjmujemy l generyczne. Krzywa polarna jest sumą nierozkładalnych gałęzi γ_i, $i=1,\ldots,r$ o parametryzacjach injektywnych odpowiednio $u\to p_i(u)=(p_{i1}(u),\ldots,p_{in}(u))\in\gamma_i\subset\mathbb{C}^n$. Przyjmijmy $\operatorname{ord}\gamma_i=\min_{j=1}^n\{\operatorname{ord}p_{ij}(u)\}$. *Ilorazami polarnymi* hiperpowierzchni $f(z_1,\ldots,z_n)=0$ w kierunku generycznym $l\in\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ nazywamy liczby $q_i=\frac{\operatorname{ord}f(p_i(u))}{\operatorname{ord}\gamma_i}$. Teissier pokazał, że wykładnik Łojasiewicza $\mathcal{L}_0(f)=\inf\{\theta:|\nabla f(x)|\geqslant|x|^\theta\}$ w otoczeniu zera dany jest wzorem

$$\mathcal{L}_0(f)=\max_{i=1}^r\{q_i\}-1.$$

W przypadku osobliwości $f=0$ quasi-jednorodnej typu (w_1,w_2,w_3) w przestrzeni $\mathbb{C}^3$, Krasiński, Oleksik, Płoski udowodnili w pracy [KOP], że $\max_{i=1}^r\{q_i\}=\max\{w_1,w_2,w_3\}$.

Przykład Briançona i Spedera pokazuje, że ilorazy polarne (poza maksymalnym) nie dają się wyrazić przez wagi (w_1,w_2,w_3). Mianowicie obliczymy ilorazy polarne dla rodziny osobliwości danej formami quasi-jednorodnymi

$$F_t(x,y,z)=z^3+ty^5z+y^7x+x^{15}.$$

Rozważmy najpierw przypadek $t\neq 0$. Krzywa polarna S_t w kierunku generycznym $(a:b:c)\in\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ dana jest równaniami

$$\begin{aligned}by^7+15bx^{14}&=5aty^4z+7axy^6,\\cy^7+15cx^{14}&=3az^2+aty^5.\end{aligned}$$

Można sprawdzić, że $S_t = \gamma_1 \cup \gamma_2$ przy czym parametryzacje gałęzi γ_1 oraz γ_2 są postaci

$$u \to (\alpha_1 u + \cdots, \beta_1 u^2 + \cdots, \delta_1 u^5 + \cdots) \in \gamma_1,$$
$$u \to (\alpha_2 u^{12} + \cdots, \beta_2 u^{26} + \cdots, \delta_2 u^{65} + \cdots) \in \gamma_2.$$

Wobec tego, mamy dwa ilorazy polarne $q_1 = \frac{15}{1} = 15$ oraz $q_2 = \frac{180}{12} = 15$.

Jeżeli $t = 0$, to krzywa polarna S_0 dana jest równaniami

$$by^7 + 15bx^{14} = 7axy^6,$$
$$cy^7 + 15cx^{14} = 3az^2.$$

Łatwo sprawdzić, że S_0 rozkłada się na sumę trzech gałęzi $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ o parametryzacjach

$$u \to (\alpha_1 u^2 + \cdots, \beta_1 u^2 + \cdots, \delta_1 u^7 + \cdots) \in \gamma_1,$$
$$u \to (\alpha_2 u^6 + \cdots, \beta_2 u^{13} + \cdots, \delta_2 u^{42} + \cdots) \in \gamma_2,$$
$$u \to (\alpha_2 u^6 + \cdots, \beta_2 u^{13} + \cdots, -\delta_2 u^{42} + \cdots) \in \gamma_3.$$

W tym przypadku ilorazami polarnymi są $q_1 = 8$ oraz $q_2 = q_3 = 15$.

Literatura

[B-S] J. Briançon, J-P. Speder, *GÉOMÉTRIE ANALITIQUE – La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 280, 1975, pp. 365-367.

[KOP] T. Krasiński, G. Oleksik, A. Płoski, *The Łojasiewicz exponent of an isolated weighted homogeneous surface singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (10) (2009) 3387-3397.

[MO] J. Milnor, P. Orlik, *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials*, Topology 9 (1970) 385-393.

[T] B. Teissier, *Variétés polaires: I – Invariant polaires de singularités d'hypersurfaces*, Invent. Math. 40 (1977), 267-292.

[T1] B. Teissier, *Astérisque 7 et 8*, 1973, 285-362.

[Y] S. S.-T. Yau, *Toplogical Types and Multiplicities of I solated Quasi-homogeneous Surface Singularities*, Bull. of the AMS, Vol. 19, No. 2, 1988, pp. 447-454.

On the Briançon and Speder example

Summary. We present Briançon and Speder example of the family of quasi-homogeneous singularities with type topologic constant for which topological type of the sections with generic hyperplanes is changing. We also show that the polar quotients can not be expressed in terms of weights.

Politechnika Świętokrzyska,
Katedra Matematyki,
25-314 Kielce, Al. 1000-lecia PP 7,
E-mail: matms@tu.kielce.pl

Łódź, 9 – 13 stycznia 2012 r.