MATERIAŁY NA XXXI KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2010 **Łódź** **str. 27**

O WYKŁADNIKU ŁOJASIEWICZA FORM QUASIJEDNORODNYCH

Maciej Sękalski (Kielce)

Profesorowi Jackowi Chądzyńskiemu z okazji Jego siedemdziesiątych urodzin

Niech $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie *osobliwością izolowaną* w punkcie $0 \in \mathbb{C}^n$ tzn. $f(0) = 0$ oraz gradient $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ ma zero izolowane w $0 \in \mathbb{C}^n$. Osobliwość f jest *quasijednorodna typu* $(w_1, \ldots, w_n)$ jeśli jest wielomianem postaci

$$f = \sum_{\frac{i_1}{w_1}+\cdots+\frac{i_n}{w_n}=1} c_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

dla pewnych wymiernych $w_1, \ldots, w_n$. Zauważmy, że jeżeli osobliwość jest izolowana i quasijednorodna typu $(w_1, \ldots, w_n)$, to $w_i > 1$ dla wszystkich $i \in \{1, \ldots, n\}$. Istotnie, gdyby zachodziła nierówność np. $w_1 \leqslant 1$, to dla jednomianu $c_{i_1\ldots i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ mielibyśmy $i_1 + \frac{i_2}{w_2} + \cdots + \frac{i_n}{w_n} \leqslant \frac{i_1}{w_1} + \cdots + \frac{i_n}{w_n} = 1$, co jest możliwe tylko wtedy gdy $i_1 = 1$ i $i_2 = \cdots = i_n = 0$ lub $i_1 = 0$, ale wtedy albo jednomian x_1 występuje w f z niezerowym współczynnikiem albo f nie zależy od zmiennej x_1. W pierwszym przypadku $\nabla f(0) \neq 0$ a w drugim, zero nie jest izolowane.

Osobliwości izolowane, quasijednorodne badane były przez wielu autorów.

W 1970r. Milnor i Orlik w pracy [MO] pokazali, że liczba Milnora osobliwości izolowanej, quasijednorodnej typu $(w_1, \dots, w_n)$ jest równa $\prod_{i=1}^{n}(w_i - 1)$. W pracy [OW] autorzy podali klasyfikację osobliwości izolowanych quasijednorodnych trzech zmiennych. Na podstawie tej klasyfikacji S. S.-T. Yau w [Y] wyraził krotność $\operatorname{ord} f$ osobliwości izolowanej, quasijednorodnej typu (w_1, w_2, w_3) w terminach wag. Mianowicie

$$\operatorname{ord} f = \min\{n \in \mathbb{N} : n \geqslant \min\{w_1, w_2, w_3\}\}.$$

Formuła powyższa przenosi się na przypadek n zmiennych (cf. [S]). W terminach wag $(w_1, \dots, w_n)$ można również oszacować wykładnik Łojasiewicza osobliwości izolowanej, quasijednorodnej. Przypomnijmy, że *wykładnikiem Łojasiewicza* $\mathcal{L}_0(f)$ osobliwości izolowanej f nazywamy najmniejszą liczbę $\theta > 0$ taką, że istnieją otoczenie U punktu $0 \in \mathbb{C}^n$ oraz stała $C > 0$ takie, że dla wszystkich $x \in U$ zachodzi nierówność

$$|\nabla f(x)| \geqslant C|x|^{\theta}.$$

W [KOP] autorzy pokazali, że dla osobliwości izolowanej, quasijednorodnej typu $(w_1, \dots, w_n)$ spełnione jest oszacowanie

$$\mathcal{L}_0(f) \leqslant \min\left\{\max_{i=1}^{n}(w_i - 1), \prod_{i=1}^{n}(w_i - 1)\right\} \tag{1}$$

przy czym dla $n = 2$ i $n = 3$ zachodzi równość. Celem tej noty jest podanie przykładu, że dla $n > 3$ nierówność (1) może być ostra.

Przykład. Wielomian $f = x_1x_4 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^5$ jest osobliwością izolowaną, quasijednorodną typu $(\frac{5}{4}, 3, 3, 5)$, dla której

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0(f) = 2 < \min&\left\{\max_{i=1}^{4}(w_i - 1), \prod_{i=1}^{4}(w_i - 1)\right\}\\ = \min&\left\{\max\left\{\frac{1}{4}, 2, 2, 4\right\}, \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4\right\} = 4.\end{aligned}$$

Aby to sprawdzić obliczymy wykładnik Łojasiewicza $\mathcal{L}_0(f)$. Przyjmijmy $|(x_1, x_2, x_3, x_4)| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$ dla $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4$. Mamy $\nabla f = (x_4, 3x_2^2, 3x_3^2, x_1 + 5x_4^4)$. Więc

$$\begin{aligned}|\nabla f| &= |x_4| + 3|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + |x_1 + 5x_4^4| \geqslant\\ &\geqslant |x_4| + 3|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + |x_1| - 5|x_4|^4 =\\ &= |x_4|(1 - 5|x_4|^3) + 3|x_2|^2 + 3|x_3|^2 + |x_1|.\end{aligned}$$

Jeżeli x_1, x_4 spełniają nierówności $|x_1| \geqslant 3|x_1|^2$ oraz $1 - 5|x_4|^3 \geqslant 3|x_4|$, co ma miejsce w dostatecznie małym otoczeniu $0 \in \mathbb{C}^4$, to

$$|\nabla f| \geqslant 3(|x_4|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_1|^2),$$

a ponieważ normy w $\mathbb{C}^4$ są równoważne więc otrzymujemy nierówność

$$|\nabla f| \geqslant C(|x_4| + |x_2| + |x_3| + |x_1|)^2$$

dla pewnego $C > 0$. Zatem

$$\mathcal{L}_0(f) \leqslant 2.$$

Załóżmy teraz, że $\mathcal{L}_0(f) < 2$. Przyjmując $x = (0, x_2, 0, 0)$, widzimy, że równości $\nabla f(x) = (0, 3x_2^2, 0, 0)$ oraz $|\nabla f(x)| = 3|x|^2$ dają sprzeczność.

Literatura

[KOP] **Krasiński T., Oleksik G., Płoski A.**, *The Łojasiewicz exponent of an isolated weighted homogeneous surface singularity*, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (2009), 3387-3397.

[MO] **Milnor J., Orlik P.,** *Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials,* Topology 9 (1970), 385-393,

[OW] **Orlik P., Wagreich P.,** *Isolated singularities of algebraic surfaces with C^*-action,* Ann. of Math. (2) 93 (1971), 205-228,

[S] **Sękalski M.,** *On the multiplicity of a quasi-homogeneous isolated singularity,* Univ. Iag. Acta Mathematica, FASC. XLVI, 2008, 95-97,

[Y] **Yau S. S.-T.,** *Topological types and multiplicities of isolated quasi-homogeneous surface singularities,* Bulletin of the AMS, Volume 19, Number 2, October 1988, 447-454.

ON THE ŁOJASIEWICZ EXPONENT
OF QUASI-HOMOGENEOUS FORMS

Summary. In [KOP], the authors proved that the Łojasiewicz exponent $\mathcal{L}_0(f)$ of an isolated, quasi-homogeneous singularity f of a type $(w_1, \ldots, w_n)$ satisfies the estimation

$$\mathcal{L}_0(f) \leqslant \min\left\{\max_{i=1}^{n}(w_i - 1), \prod_{i=1}^{n}(w_i - 1)\right\}$$

with the equality for $n = 2$, $n = 3$. We show that for $n > 3$ the inequality may be strict.

Łódź, 11 – 15 stycznia 2010 r.