MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2008 **Łódź** **str. 53**

O GRZE HIRONAKI

Maciej Sękalski (Kielce)

Wstęp

W roku 1964 Hironaka w pracy [Hi] udowodnił, że dla dowolnego zbioru algebraicznego $X \subset \mathbb{K}^n$ nad ciałem $\mathbb{K}$ charakterystyki zero istnieje dwuwymierne odwzorowanie $f : \tilde{X} \to X$, gdzie $\tilde{X}$ jest rozmaitością gładką takie, że na otwartym i gęstym podzbiorze U w $\tilde{X}$, odwzorowanie f jest izomorfizmem. Takie odwzorowanie może być zdefiniowane poprzez skończony ciąg rozdmuchań [Ha]. Przypomnijmy konstrukcję rozdmuchania.

Niech X będzie zbiorem algebraicznym w $\mathbb{K}^n$, a Z podrozmaitością w $\mathbb{K}^n$ zadaną układem równań $g_1 = g_2 = \ldots = g_k = 0$, $g_i \in \mathbb{K}[x]$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, k$. Rozważmy injekcję

$$X \setminus Z \ni x \to (x, g_1(x) : \ldots : g_k(x)) \in X \times \mathbb{P}^{k-1},$$

$\mathbb{P}^{k-1}$ oznacza $k-1$-wymiarową przestrzeń rzutową nad ciałem $\mathbb{K}$. Rozdmuchaniem zbioru X względem rozmaitości Z nazywamy domknięcie $\tilde{X}$ obrazu tej injekcji w przestrzeni $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$. Rzutowanie

$$\pi : \tilde{X} \ni (x, u_1 : \ldots : u_k) \to x \in X$$

jest izomorfizmem poza zbiorem $\pi^{-1}(Z)$, który nazywamy dywizorem wyjątkowym. Zbiór Z nazywamy centrum rozdmuchania.

Przykład 1.
Niech $X = \{x = (x_1, ..., x_n) : f(x) = 0\}$, $f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x]$, $Z = \{x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0\}$. Wtedy

$$\tilde{X} = \{(x_1, \ldots, x_n; u_1 : \ldots : u_k) : f(x) = 0, \quad u_i x_j = u_j x_i, \quad i, j = 1, \ldots, k\}.$$

Mapy na $\mathbb{P}^{k-1}$ indukują mapy na $\mathbb{K}^n \times \mathbb{P}^{k-1}$. Mianowicie zbiory

$$U_i = \{(x; u_1 : \ldots : u_k) : u_i x_j = u_j x_i, \quad u_i \neq 0\}$$

pokrywają $\tilde{X}$ oraz odwzorowania

$$\begin{aligned} &\phi_i(x; u_1 : \ldots : u_{i-1} : 1 : u_{i+1} : \ldots : u_k) = \\ &\quad = (u_1, \ldots, u_{i-1}, x_i, u_{i+1} \ldots, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

określają układ współrzędnych na U_i. Zbiór $\tilde{X}$ w mapie ϕ_i zadany jest równaniem

$$f' = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha u_1^{\alpha_1} \cdots u_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\sum_{m=1}^k \alpha_m} u_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots u_k^{\alpha_k} x_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} = 0.$$

1 Gra Hironaki

Niech $A = \{a_1, \ldots, a_d\} \subset \mathbb{N}^n$ będzie skończonym zbiorem punktów w $\mathbb{R}^n$. Diagramem Newtona wyznaczonym przez A nazywamy otoczkę wypukłą $N(A)$ zbioru $A + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ w $\mathbb{R}^n$.

Niech $\emptyset \neq J \subset \{1, \ldots, n\}$ oraz $j \in J$. Określamy funkcję $\mathbb{Z}^n \ni w \to \tau_{J,j}(w) = w' \in \mathbb{Z}^n$ jak następuje

$$\begin{aligned} w'_j &= \sum_{i \in J} w_i, \\ w'_k &= w_k \quad \text{dla} \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Gracze $\mathcal{P}_1$ oraz $\mathcal{P}_2$ wykonują następujące ruchy:

1. Gracz $\mathcal{P}_1$ wybiera niepusty podzbiór $J \subset \{1, \ldots, n\}$,
2. Gracz $\mathcal{P}_2$ wybiera $j \in J$ i zastępuje zbiór A zbiorem $A' = \tau_{J,j}(A)$, któremu odpowiada diagram Newtona $N(A')$.

Sekwencja ruchów powtarza się dla $N(A')$. Gracz $\mathcal{P}_1$ wygrywa, gdy po skończonej liczbie m ruchów diagram Newtona $N(A^m)$ będzie miał postać kwadrantu

$$a + \mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$$

dla pewnego $a \in \mathbb{N}^n$. W przeciwnym razie wygrywa gracz $\mathcal{P}_2$.

Przykład 2.
Niech $A = \{(0,6),(3,5)\}$. Gracz $\mathcal{P}_1$ musi wybrać $J = \{1,2\}$ (wybór zbioru jednoelementowego powoduje, że $\tau_{J,j}$ jest identycznością). Gracz $\mathcal{P}_2$ ma dwie możliwości. Jeżeli wybierze $j = 2$ to $A' = \{(0,6),(3,8))\}$, wtedy $N(A') = (0,6) + \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$ i wygrywa $\mathcal{P}_1$.

Jeżeli gracz $\mathcal{P}_2$ wybierze $j = 1$, to $A' = \{(6,6),(8,5)\}$. Kolejny wybór $j = 1$ ($j = 2$ prowadzi do wygranej gracza $\mathcal{P}_1$) daje $A^2 = \{(12,6),(13,5)\}$.

Jeżeli teraz gracz $\mathcal{P}_2$ wybierze $j = 1$ to $A^3 = \{(18,6),(18,5)\}$ i $N(A^3) = (18,5)+\mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$, natomiast jeżeli $j = 2$ to $A^3 = \{(12,18),(13,18)\}$ i $N(A^3) = (12,18)+\mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$. W obu przypadkach $\mathcal{P}_1$ wygrywa.

Twierdzenie 3 *Istnieje strategia wygrywająca dla gracza $\mathcal{P}_1$.*

Dowód twierdzenia wraz z podaniem strategii wygrywającej za Zeillingerem [Ze] przedstawimy w następnym rozdziale. Powyższe twierdzenie udowodnił w 1983 r. Spivakovsky w [Sp]. Odnotujmy teraz w jaki sposób jeden ruch w grze odpowiada rozdmuchaniu. Mianowicie, niech $f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{K}[x]$ i niech $\operatorname{supp}(f) = \{\alpha \in \mathbb{N}^n : c_\alpha \neq 0\}$. Z wielomianem tym możemy związać jego diagram Newtona $N(f) = N(\operatorname{supp}(f))$. Wybór gracza $\mathcal{P}_1$ np. $J = \{1,\dots,k\}$ odpowiada wyborowi centrum rozdmuchania $Z = \{x_1 = \ldots = x_k = 0\}$, a wybór $i \in J$ gracza $\mathcal{P}_2$ odpowiada wyborowi odpowiedniej mapy ϕ_i (przykład 1 ze wstępu). Jeżeli f' oznacza postać wielomianu f we współrzędnych ϕ_i to $N(f') = N(\operatorname{supp}(f'))$.

2 Strategia wygrywająca

Aby pomóc graczowi $\mathcal{P}_1$ wybrać podzbiór $J \subset \{1,\dots,n\}$ dla danego diagramu Newtona N przyjmijmy następujące oznaczenia. Jeżeli $w \in \mathbb{Z}^n$ to

$$L(w) = \max_{i=1}^{n} w_i - \min_{i=1}^{n} w_i,$$
$$S(w) = \sharp\{k : w_k = \min_{i=1}^{n} w_i\} + \sharp\{k : w_k = \max_{i=1}^{n} w_i\}.$$

Ponadto oznaczmy $B = \{\alpha - \beta : \alpha, \beta \text{ wierzchołki diagramu } N\}$. Wektorem charakterystycznym v_N diagramu N nazywamy wektor minimalny zbioru B względem nierówności

$$(L(v_N), S(v_N)) \leqslant_{lex} (L(w), S(w))$$

dla wszystkich $w \in B$, $\leqslant_{lex}$ oznacza porządek leksykograficzny w $\mathbb{N}^2$.

Przykład 4.
Niech $N = N(\{(0,0,4),(5,0,1),(1,5,1)\})$. Wtedy

B	$L(v)$	$S(v)$
$\pm(5,0,-3)$	8	2
$\pm(1,5,-3)$	8	2
$\pm(4,-5,0)$	9	2

Zatem charakterystycznymi wektorami są $\pm(5, 0, -3)$ oraz $\pm(1, 5, -3)$.

Twierdzenie 5 (Strategia wygrywająca) *Niech N będzie diagramem Newtona, który nie jest kwadrantem. Gracz $\mathcal{P}_1$ wygra jeżeli w każdym ruchu wybierze podzbiór $J = \{k, l\} \subset \{1, \ldots, n\}$ taki, że $k \neq l$ oraz w_k jest maksymalną a w_l minimalną współrzędną wektora charakterystycznego $w = (w_1, \ldots, w_n)$ diagramu N.*

Dowód. Z diagramem Newtona N możemy związać trójkę liczb naturalnych $\delta(N) = (\sharp E(N), L(v_N), S(v_N))$, gdzie $E(N)$ oznacza zbiór wierzchołków diagramu N, v_N jest dowolnym wektorem charakterystycznym N. Pokażemy, że jeżeli N' jest diagramem Newtona powstałym z N po jednym ruchu zgodnie ze strategią to $\delta(N') <_{lex} \delta(N)$.

Zauważmy, że ponieważ $\tau_{J,j}$ jest odwzorowaniem liniowym, więc zachodzi nierówność $\sharp E(N') \leqslant \sharp E(N)$. Jeżeli $\sharp E(N') < \sharp E(N)$ to oczywiście $\delta(N') <_{lex} \delta(N)$, zatem załóżmy, że $\sharp E(N') = \sharp E(N)$. Wynika stąd, że dla dowolnego wierzchołka $\gamma \in E(N')$ istnieje wierzchołek $\epsilon \in E(N)$ taki, że $\epsilon' = \gamma$. Niech α, β będą wierzchołkami diagramu N takimi, że $w = \alpha - \beta$ jest wektorem charakterystycznym N. Pokażemy, że dla $w' = \alpha' - \beta'$ zachodzi

$$(L(v_{N'}), S(v_{N'})) \leqslant_{lex} (L(w'), S(w')) <_{lex} (L(w), s(w)).$$

Pierwsza nierówność wynika z definicji wektora charakterystycznego. Aby udowodnić drugą zauważmy najpierw, że $L(w') \leqslant L(w)$. Istotnie, możemy założyć, że w_1 jest minimalną a w_2 maksymalną współrzędną wektora charakterystycznego w. Mamy zatem

$$w_1 < 0 < w_2$$

oraz $L(w) = w_2 - w_1$.

Zgodnie ze strategią gracz $\mathcal{P}_1$ wybiera $J = \{1, 2\}$. Załóżmy, że $\mathcal{P}_2$ wybierze $j = 1$. Wtedy

$$w' = (w_1 + w_2, w_2, \ldots, w_n).$$

Maksymalną współrzędną wektora w' pozostaje w_2. Zatem ponieważ $w_1 < w_1 + w_2 < w_2$ więc $L(w') \leqslant L(w)$. Podobnie rozumujemy w przypadku gdy gracz $\mathcal{P}_2$ wybierze $j = 2$.

Gdyby $L(w') < L(w)$ to mielibyśmy $(L(w'), S(w')) <_{lex} (L(w), S(w))$. Zatem załóżmy, że $L(w') = L(w)$. Wtedy istnieje indeks $k \geqslant 3$ taki, że $L(w') = L(w) = w_2 - w_k$, więc w_k jest minimalną współrzędną wektora w oraz w'. Ponieważ $w_1 < w_1 + w_2 < w_2$ zatem $w_1 + w_2$ nie jest minimalną współrzędną wektora w' zatem

$$S(w') = S(w) - 1.$$

Wobec tego mamy

$$(L(w'), S(w')) = (L(w), S(w) - 1) <_{lex} (L(w), S(w))$$

co kończy dowód.

Literatura

[Ha] **Hauser, H.**, *Seven short stories on blowups,* Summer School on Resolution of Singularities, 12 -30 June 2006.

[Hi] **Hironaka, H.**, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero,* Ann. Math. 79 (1964), 109 - 326.

[Sp] **Spivakovsky, M. A.**, *A solution to Hironaka's polyhedra game,* Arithmetic and Geometry. M. Artin and J. Tate, editors. Birkhäuser, 1983, 419-432.

[Ze] **Zeillinger, D.**, *A Short Solution to Hironaka's Polyhedra Game*, L'Enseignement Mathématique (2) 52 (2006), 143-158.

ON HIRONAKA GAME

Summary. We present the rules of Hironaka's polyhedra game and a connection of the game with blowing ups. Also the winning strategy after Zeillinger is given.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.