MATERIAŁY XXVI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2005 **Łódź** **str. 35**

NIERÓWNOŚĆ BEZOUTA DLA WIELOMIANÓW RZECZYWISTYCH

Arkadiusz Płoski, Maciej Sękalski (Kielce)

Klasyczne twierdzenie Bezouta orzeka, że liczba rozwiązań układu n równań wielomianowych zespolonych o n niewiadomych, jeżeli jest skończona, to nie przewyższa iloczynu stopni rozważanych wielomianów. W przypadku $n = 2$ elementarny dowód tego twierdzenia Czytelnik znajdzie w [MS], rozdział X, §3.2. Fakt ten nie ma miejsca w przypadku rzeczywistym; oto przykład podany przez Fultona [F]: układ

$$\prod_{i=1}^{m}(x-i)^2 + \prod_{j=1}^{m}(y-j)^2 = 0, \quad xz = 0, \quad yz = 0$$

ma m^2 rozwiązań w $\mathbb{R}^3$, natomiast iloczyn stopni równań układu jest równy $2m \cdot 2 \cdot 2 = 8m < m^2$ dla $m > 8$.

Naszym celem jest pokazanie, że podobny przykład nie istnieje w przypadku dwóch równań o dwóch niewiadomych.

Udowodnimy następujące

Twierdzenie *Jeżeli wielomiany $F(X,Y)$, $G(X,Y) \in \mathbb{R}[X,Y]$ są stopni $m, n > 0$, to zbiór rozwiązań rzeczywistych układu $F(X,Y) = G(X,Y) = 0$ ma co najwyżej mn spójnych składowych.*

Dowód opiera się na dwóch lematach

Lemat 1 *Jeżeli wielomiany F, G stopni $m, n > 0$ są względnie pierwsze, to układ $F(X,Y) = G(X,Y) = 0$ ma co najwyżej $m \cdot n$ rozwiązań rzeczywistych.*

Dowód: Jeśli F, G są względnie pierwsze w $\mathbb{R}[X,Y]$, to są względnie pierwsze w $\mathbb{C}[X,Y]$; zatem układ $F = G = 0$ ma co najwyżej mn rozwiązań w $\mathbb{C}^2$ a tym bardziej w $\mathbb{R}^2$.

Lemat 2 *Jeżeli $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ nie jest stały, to zbiór $\{(x,y) : P(x,y) = 0\}$ ma nie więcej niż $(\deg P)^2$ spójnych składowych.*

Dowód: Wystarczy udowodnić tezę lematu przy założeniu, że wielomian P jest nierozkładalny.

Istotnie: niech $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_s$ będzie rozkładem P na czynniki nierozkładalne i załóżmy, że lemat zachodzi dla każdego P_i, $i = 1, \ldots, s$. Wtedy liczba składowych zbioru $P = 0$ nie jest większa od sumy liczby składowych zbiorów $P_i = 0$. Zatem liczba składowych zbioru $P = 0$ nie przekracza $\sum_{i=1}^{s} (\deg P_i)^2 \leq \left(\sum_{i=0}^{s} \deg P_i\right)^2 = (\deg P)^2$.

Załóżmy, że P jest wielomianem nierozkładalnym dodatniego stopnia i obierzmy punkt (a,b) tak aby $P(a,b) \neq 0$. Oznaczmy $Q(X,Y) = (X-a)^2 + (Y-b)^2$ i rozważmy jakobian $J(P,Q)$ wielomianów P, Q.

Jeżeli $J(P,Q) = 2(Y-b)P_X - 2(X-b)Q_Y \neq 0$ w $\mathbb{R}[X,Y]$, to wielomiany P, $J(P,Q)$ są względnie pierwsze bo w przeciwnym razie mielibyśmy $J(P,Q) = const\, P$, gdyż P jest pierwszy, co jest niemożliwe bo $P(a,b) \neq 0$ i $J(P,Q)(a,b) = 0$.

Pokażemy, że każda składowa spójna M zbioru $P = 0$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z krzywą $J(P,Q) = 0$. Niech (x_0, y_0) będzie punktem M, w którym wielomian Q osiąga minimalną wartość na M. Jeżeli $(x_0, y_0) \in M$ jest punktem krytycznym P, to oczywiście $J(P,Q)(x_0,y_0) = 0$. Jeżeli nie jest to punkt krytyczny, to $J(P,Q)(x_0,y_0) = 0$ na mocy znanego twierdzenia analizy klasycznej, [L], str 152. Stąd wynika, że liczba c składowych spójnych zbioru $P = 0$ nie jest większa od liczby rozwiązań układu $P = J(P,Q) = 0$. Na mocy lematu 1 $c \leq (\deg P)^2$.

Rozważmy teraz przypadek gdy $J(P,Q) = 0$ w $\mathbb{R}[X,Y]$. Zachodzi

Własność *Jeżeli $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ oraz $J(P,Q) = 0$ w $\mathbb{R}[X,Y]$ to $P(X,Y) = P_0(Q(X,Y))$ dla pewnego $P_0(T) \in \mathbb{R}[T]$.*

Dowód własności: Oznaczmy $U = X - a$, $V = Y - b$. Wtedy założenia możemy przepisać w postaci $J(P,Q) = 2(VP_U - UP_V) = 0$ w $\mathbb{R}[U,V]$. Dla każdego wielomianu $F \in \mathbb{R}[U,V]$ przyjmijmy $DF = VP_U - UP_V$.

Mamy

1) jeżeli $F(U,V)$ jest wielomianem jednorodnym stopnia $n > 0$, to DF również,

2) jeżeli $F = (U^2+V^2)^k \tilde{F}$, to $DF = (U^2+V^2)^k D\tilde{F}$,

3) jeżeli $F \neq const$ jest formą jednorodną oraz $DF = 0$,
to $U^2 + V^2$ dzieli F.

Aby sprawdzić 3) zauważmy, że z warunków $VF_U - UF_V = 0$ oraz $UF_U + VF_V = (\deg F)F$ wynika, że $(U^2+V^2)F_U = (\deg F)UF$. Ponieważ wielomiany U^2+V^2, $(\deg F)U$ są względnie pierwsze więc U^2+V^2 dzieli F.

Niech teraz $P \in \mathbb{R}[U,V]$ będzie taki, że $DP = 0$. Jeżeli $P = \sum P_j$ gdzie P_j są jednorodne stopnia j to $DP_j = 0$. Z warunków 2) i 3) wynika, że $P_j = c_j(U^2+V^2)^{\frac{j}{2}}$ jeśli j jest parzyste oraz $P_j = 0$ dla j nieparzystych.

Aby zakończyć dowód lematu 2 zauważmy, że jeżeli $J(P,Q) = 0$ w $\mathbb{R}[X,Y]$ to $P = P_0(Q)$, gdzie P_0 jest wielomianem jednej zmiennej. W tym przypadku zbiór $P = 0$ składa się ze skończonej liczby okręgów. Liczba okręgów nie przekracza $\deg P_0 < \deg P$.

Dowód twierdzenia :

Jeżeli F, G są względnie pierwsze to teza wynika z lematu 1. Załóżmy teraz, że $P = \mathrm{NWP}(F,G)$ jest dodatniego stopnia. Wtedy $\{F = G = 0\} = \{\frac{F}{P} = \frac{G}{P} = 0\} \cup \{P = 0\}$; oznaczmy $k = \deg P$. Na mocy lematu 1 zbiór $\{\frac{F}{P} = \frac{G}{P} = 0\}$ ma nie więcej niż $(m-k)(n-k)$ spójnych składowych. Zatem rozważany zbiór ma co najwyżej $(m-k)(n-k)+k^2 = mn - k(m-k+n-k) \le mn$ spójnych składowych.

Literatura

[F] **W. Fulton**, *Intersection Theory*, Springer, Berlin 1984.

[L] **F. Leja**, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, Wydanie dziesiąte, PWN, Warszawa 1969.

[MS] **A. Mostowski, M. Stark**, *Elementy algebry wyższej*,Wydanie dziewiąte, PWN, Warszawa 1974.

Bezout inequality for real polynomials

Summary. Let $F(X,Y)$, $G(X,Y)$ be polynomials of degrees $m, n > 0$ respectively. We prove, that the set $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x,y) = G(x,y) = 0\}$ has at most mn connected components.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2005 r.