**MATERIAŁY NA XXVII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

2006 **Łódź** **str. 47**

O STABILNOŚCI DIAGRAMU NEWTONA

Andrzej Lenarcik, Arkadiusz Płoski (Kielce)

Wstęp

Będziemy rozważali kiełki krzywych analitycznych $\gamma, \delta, \ldots$ w ustalonym punkcie 0 danej powierzchni zespolonej tzn. spójnej rozmaitości holomorficznej zespolonej wymiaru 2. Stosujemy oznaczenia z artykułu [P]; w szczególności symbol $(\gamma, \delta)_0$ oznacza krotność przecięcia kiełków γ i δ a symbol $m(\gamma)$ krotność kiełka γ. Kiełki nierozkładalne nazywamy również gałęziami. Gdy $m(\gamma) = 1$, to kiełek nazywamy gładkim. Dla każdej gałęzi γ rozważamy jej półgrupę $\Sigma(\gamma)$ generowaną w $\mathbf{N}$ przez liczby $(\gamma, \gamma')_0$, gdzie γ' przebiega kiełki krzywych niezawierających γ. Gałęzie γ i δ są ekwisingularne, gdy $\Sigma(\gamma) = \Sigma(\delta)$. Dwa dowolne kiełki γ i δ są ekwisingularne, gdy istnieje taka bijekcja zbiorów gałęzi tych kiełków, że odpowiadające sobie gałęzie są ekwisingularne oraz krotności przecięcia odpowiadających gałęzi są jednakowe. Funkcję stałą na kiełkach ekwisingularnych nazywamy niezmiennikiem (ekwisingularności). Krotność $m(\gamma)$, liczba stycznych $t(\gamma)$, wykładnik styczności $d(\gamma)$ (por. [P]), liczba Milnora kiełka γ są niezmiennikami.

Gdy (x, y) jest mapą scentrowaną w punkcie 0 tzn. taką, że $x(0) = y(0) = 0$, to dla każdego kiełka γ można rozważać diagram Newtona $\Delta_{x,y}(\gamma)$. Diagram ten zależy od mapy (x, y); daje on pewną informację o położeniu kiełka γ w stosunku do pary transwersalnych krzywych gładkich $\{x = 0\}$ i $\{y = 0\}$ a także o samej krzywej. Zbiór $\mathcal{N}(\gamma)$ wszystkich diagramów Newtona jest niezmiennikiem analitycznym kiełka γ. Powstaje naturalne pytanie: czy jest on niezmiennikiem ekwisingularności? Mutsuo Oka w pracy [O] udowodnił interesujące twierdzenie "o stabilności diagramu Newtona". Aby je zacytować, oznaczmy $\Delta_{x,y}(\gamma)' = \Delta_{x,y}(\gamma) \cap ([1,+\infty) \times [1,+\infty))$. Jest to część diagramu Newtona $\Delta_{x,y}(\gamma)$ leżąca w kwadrancie o wierzchołku $(1,1)$. Twierdzenie Oki ([O], Theorem 5.1) można wypowiedzieć następująco: zbiór $\{\Delta_{x,y}(\gamma)' : (x,y)$ przebiega mapy scentrowane w $0\}$, jest niezmiennikiem γ tzn. zależy wyłącznie od klasy ekwisingularności γ. Dowód Oki ma charakter dość techniczny; głównym środkiem jest twierdzenie o rozwiązywaniu osobliwości kiełka γ przy pomocy kolejnych rozdmuchiwań. Celem tej pracy jest podanie wzmocnienia twierdzenia Oki. Ważną rolę odgrywa pojęcie N-równoważności kiełków omówine w Rozdziale 1 tej pracy. Jest to rodzaj "słabej równoważności": dwa kiełki ekwisingularne są N-równoważne. Dwie gałęzie są N-równoważne, gdy mają tę samą krotność i ten sam wykładnik styczności, a więc "na ogół" nie są ekwisingularne. Wspomniane wzmocnienie twierdzenia Oki można sformułować następująco: zbiór $\mathcal{N}(\gamma)$ wszystkich diagramów Newtona $\Delta_{x,y}(\gamma)$ jest niezmiennikiem N-równoważności. Okazuje się więc, że w oryginalnym twierdzeniu Oki można rozważać pełne diagramy $\Delta_{x,y}(\gamma)$ zamiast ich części $\Delta_{x,y}(\gamma)'$. Dowód twierdzenia o stabilności we wzmocnionej formie opiera się na teorii kontaktu maksymalnego rozwiniętej w Rozdziale 2 tego artykułu. W Rozdziale 3 przypominamy podstawowe własności diagramów Newtona i podajemy dowód twierdzenia. Zainteresowany czytelnik znajdzie rozwinięcie przedstawionego tematu w pracy [GB-L-P].

1 Twierdzenie o stabilności

Jak powiedzieliśmy we wstępie rozważamy kiełki $\gamma, \delta, \ldots$ krzywych analitycznych w ustalonym punkcie 0 danej powierzchni zespolonej M. *Rząd styczności* $d(\gamma,\delta)$ definiujemy wzorem $d(\gamma,\delta) = (\gamma,\delta)_0/(m(\gamma)m(\delta))$. Ma on następujące własniości:

(d_1) $d(\gamma,\delta) = +\infty$ dokładnie wtedy, gdy $\gamma = \delta$,

(d_2) $d(\gamma,\delta) = d(\delta,\gamma)$,

(d_3) Dla dowolnych gałęzi γ, δ, ξ: $d(\gamma,\delta) \geq \min\{d(\gamma,\xi), d(\xi,\delta)\}$.

Z warunku (d_3) wynika, że jeżeli $d(\gamma,\xi) \neq d(\xi,\delta)$, to $d(\gamma,\delta) = \min\{d(\gamma,\xi), d(\xi,\delta)\}$. Inne równoważne sformułowanie (d_3) jest następujące: w ciągu $d(\gamma,\xi)$, $d(\xi,\delta)$, $d(\delta,\gamma)$ dwa wyrazy są równe, a trzeci nie jest mniejszy od pozostałych.

Dla dowolnych kiełków γ i δ o składowych (γ_i) oraz (δ_j) definiujemy $d(\gamma,\delta) = \inf\{d(\gamma_i,\delta_j)\}$. Własności ($d_2$) oraz ($d_3$) zachodzą również w tym przypadku.

Dla każdego kiełka γ definiujemy *wykładnik styczności*

$$d(\gamma) = \sup\{d(\gamma,\lambda) : \lambda \text{ jest kiełkiem gładkim}\}\ .$$

Gdy γ jest kiełkiem gładkim, to $d(\gamma) = +\infty$. Gdy γ jest kiełkiem osobliwym, to $d(\gamma)$ jest liczbą wymierną i kres w definicji wykładnika styczności jest osiągnięty

([P], Twierdzenia 2.1 i 2.2). Mówimy, że kiełek gładki λ ma *kontakt maksymalny* z kiełkiem γ, gdy $d(\gamma, \lambda) = d(\gamma)$. Mamy:

(d_4) jeżeli γ jest gałęzią, zaś λ kiełkiem gładkim, to $d(\lambda, \gamma) < d(\gamma)$ dokładnie wtedy, gdy $d(\lambda, \gamma) \in \mathbf{N}$.

Dowód (d_4) podany jest w [P] (Twierdzenie 2.1). Podaną niżej własność udowodnimy w Rozdziale 3.

(d_5) Jeżeli gałęzie γ, δ mają wspólną gałąź maksymalnego kontaktu, to $d(\gamma, \delta) \geq \inf\{d(\gamma), d(\delta)\}$, przy czym dla $d(\gamma) \neq d(\delta)$ zachodzi równość. W przeciwnym wypadku $d(\gamma, \delta) < \inf\{d(\gamma), d(\delta)\}$ i $d(\gamma, \delta) \in \mathbf{N}$.

Dla dowolnych kiełków γ i δ definiujemy *zredukowany rząd styczności* $d'(\gamma, \delta) = \inf\{d(\gamma), d(\gamma, \delta), d(\delta)\}$. Stosując własność ($d_4$) sprawdzamy, że jeżeli γ, δ są gałęziami, to $\inf\{d(\gamma), d(\gamma, \delta)\} = \inf\{d(\gamma, \delta), d(\delta)\} = d'(\gamma, \delta)$. W szczególności, gdy jedna z gałęzi γ, δ jest gładka, to $d'(\gamma, \delta) = d(\gamma, \delta)$. W zbiorze gałęzi funkcja d' ma następujące własności:

(d'_1) $d'(\gamma, \delta) = +\infty$ dokładnie wtedy, gdy $\gamma = \delta$ jest gałęzią gładką,

(d'_2) $d'(\gamma, \delta) = d'(\delta, \gamma)$,

(d'_3) dla dowolnych gałęzi γ, δ, ξ: $d'(\gamma, \delta) \geq \min\{d'(\gamma, \xi), d'(\xi, \delta)\}$.

Definicja 1.1 Kiełek γ nazywamy N-kiełkiem (kiełkiem Newtona), gdy funkcja $(\alpha, \beta) \mapsto d'(\alpha, \beta)$ jest stała na gałęziach tego kiełka.

Oczywiście każda gałąź jest N-kiełkiem.

Rozważmy teraz relację $\sim$ na zbiorze wszystkich gałęzi zdefiniowaną następująco: $\alpha \sim \beta$ wtedy, gdy $d'(\alpha, \beta) = d(\alpha) = d(\beta)$. Łatwo sprawdzić, że $\sim$ jest relacją równoważności. Jeżeli γ jest N-kiełkiem, to $\alpha \sim \beta$ dla dowolnych gałęzi α, β kiełka γ.

Lemat 1.2 *Dla każdego kiełka γ istnieje skończona rodzina N-kiełków $(\gamma_i : i = 1, \ldots, s)$ taka, że*

(i) $\gamma = \bigcup_{i=1}^{s} \gamma_i$,

(ii) *gdy $i \neq j$, to kiełki γ_i, γ_j nie mają wspólnej gałęzi,*

(iii) *jeżeli $\tilde{\gamma}$ jest N-kiełkiem oraz $\tilde{\gamma} \subset \gamma$, to istnieje jedyne $i \in [1, s]$, że $\tilde{\gamma} \subset \gamma_i$.*

Dowód. W zbiorze wszystkich gałęzi kiełka γ relacja $\sim$ definiuje relację równoważności, która określa podział w zbiorze gałęzi kiełka γ. Kiełki γ_i definiujemy jako sumy teoriomnogościowe gałęzi leżących w tym samym zbiorze podziału.

Rodzinę N-kiełków (γ_i) spełniającą watunki (i) oraz (ii) Lematu 1.2 nazywamy *rozkładem kiełka γ na N-kiełki*. Tak więc przedstawienie kiełka γ jako sumy gałęzi jest takim rozkładem. Rozkład na N-kiełki nazywamy *minimalnym*, gdy spełniony jest również warunek (iii). Rozkład na N-kiełki jest z dokładnością do numeracji wyznaczony jednoznacznie przez kiełek γ.

Definicja 1.3 Kiełki γ i δ o rozkładach minimalnych na N-kiełki (γ_i) oraz (δ_i) nazywamy N-równoważnymi, gdy mają taką samą liczbę kiełków i po ewentualnej zmianie numeracji zachodzą warunki

(i) $m(\gamma_i) = m(\delta_i)$ dla wszystkich wskaźników i,

(ii) $d'(\gamma_i, \gamma_j) = d'(\delta_i, \delta_j)$ dla dowolnych i, j.

Kładąc $i = j$ w drugim wzorze stwierdzamy, że jest $d(\gamma_i) = d(\delta_i)$. Łatwo zauważyć, że

(a) jeżeli kiełki γ, δ są ekwisingularne, to są N-równoważne,

(b) jeżeli kiełki γ, δ mają gładkie gałęzie i są N-równoważne, to są ekwisingularne.

Zauważmy, że jeśli γ i δ są N-równoważne, to $m(\gamma) = m(\delta)$ oraz $d(\gamma) = d(\delta)$ (druga relacja wynika z Twierdzenia 2.2 artykułu [P]). Oczywiście liczba gałęzi $r(\gamma)$ nie jest niezmiennikiem N-równoważności.

Wprowadzone pojęcia są użyteczne w studiowaniu związków między diagramami Newtona $\Delta_{x,y}(\gamma)$ i własnościami geometrycznymi kiełka γ. Przypomnijmy, że diagram Newtona jest elementarny, gdy jego brzeg składa się z jednego zwartego odcinka nieredukującego się do punktu i dwóch półprostych leżących na osiach układu.

Twierdzenie 1.4 *Niech γ będzie kiełkiem osobliwym. Wtedy γ jest N-kiełkiem wtedy i tylko wtedy, gdy każdy diagram $\Delta_{x,y}(\gamma)$ jest elementarny.*

Dowód powyższego twierdzenia podajemy w Rozdziale 3 tego artykułu. Teraz sformułujemy podstawowy rezultat o stabilności diagramu Newtona.

Twierdzenie 1.5 *Niech γ, δ będą kiełkami N-równoważnymi. Wtedy dla każdej mapy (x, y) istnieje mapa (z, w) taka, że $\Delta_{x,y}(\gamma) = \Delta_{z,w}(\delta)$.*

Oznaczmy $\mathcal{N}(\gamma) = \{\Delta : \Delta = \Delta_{x,y}(\gamma)$ w pewnej mapie $(x, y)\}$. Na mocy Twierdzenia 1.4 zbiór $\mathcal{N}(\gamma)$ jest niezmiennikiem N-równoważności. W pracy [GB-L-P] podany jest przykład kiełków γ, δ takich, że $\mathcal{N}(\gamma) = \mathcal{N}(\delta)$, ale γ, δ nie są N-równoważne. Twierdzenie 1.5 może służyć do konstrukcji niezmienników N-równoważności. Ustalmy diagram $\Delta_{x,y}(\gamma)$ i niech $(0, b)$ oraz $(a, 0)$ będą punktami przecięcia prostych będących przedłużeniami krańcowych odcinków brzegu $\Delta_{x,y}(\gamma)$ z osiami współrzędnych.

Definiujemy liczbę Newtona $\nu(\Delta_{x,y}(\gamma)) = 2\,\mathrm{pole}((\mathbf{R}_+)^2 \setminus \Delta_{x,y}(\gamma)) - a - b + 1$. Dobrze znane twierdzenie Kouchnirenki [K] orzeka, że liczba Milnora kiełka γ jest większa lub równa $\nu(\Delta_{x,y}(\gamma))$ dla dowolnego układu (x, y). Równość (wyłącznie w przypadku dwuwymiarowym) charakteryzuje niedegenerację kiełka w mapie (x, y). Definiujemy za pracą [O] liczbę Newtona $\nu(\gamma)$ kiełka γ przyjmując

$$\nu(\gamma) = \sup\{\nu(\Delta_{x,y}(\gamma)) : (x, y) \text{ mapa scentrowana w } 0\} .$$

Stosując Twierdzenie 1.5 sprawdzamy łatwo

Twierdzenie 1.6 *Liczba Newtona $\nu(\gamma)$ jest niezmiennikiem N-równoważności.*

Gdy γ jest N-kiełkiem osobliwym, to jak można obliczyć

$$\nu(\gamma) = (m(\gamma)d(\gamma) - 1)(m(\gamma) - 1) .$$

Można udowodnić podobnego typu formułę w przypadku dowolnego kiełka. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do artykułu [GB-L-P].

2 Kiełki Newtona

Rozpoczniemy od pewnych własności gałęzi.

Lemat 2.1 *Niech γ, δ będą gałęziami. Jeżeli istnieje gałąź gładka λ taka, że $d(\gamma, \lambda) = d(\gamma)$ oraz $d(\delta, \lambda) = d(\delta)$, to $d(\gamma, \delta) \geq \inf\{d(\gamma), d(\delta)\}$, przy czym dla $d(\gamma) \neq d(\delta)$ zachodzi równość. Jeżeli taka gałąź nie istnieje i λ, μ są gładkimi gałęziami takimi, że $d(\gamma, \lambda) = d(\gamma)$ oraz $d(\delta, \mu) = d(\delta)$, to $d(\delta, \gamma) = d(\lambda, \delta) = d(\gamma, \mu) = d(\lambda, \mu)$.*

Dowód. Pierwsza część lematu wynika z własności (d_3). Załóżmy, że γ i δ nie mają wspólnej gałęzi maksymalnego kontaktu i przyjmijmy oznaczenia jak w lemacie. Jest $d(\gamma, \mu) < d(\gamma) = d(\gamma, \lambda)$, a więc $d(\gamma, \mu) = d(\lambda, \mu)$. Podobnie nierówność $d(\lambda, \delta) < d(\delta) = d(\delta, \mu)$ implikuje $d(\lambda, \delta) = d(\lambda, \mu)$. Łącząc otrzymane równości dostajemy $d(\gamma, \mu) = d(\lambda, \delta) = d(\lambda, \mu)$. Załóżmy teraz dla ustalenia uwagi, że $d(\gamma) \leq d(\delta)$. Zatem nierówność $d(\gamma, \mu) < d(\gamma)$ implikuje nierówność $d(\gamma, \mu) < d(\delta) = d(\delta, \mu)$, a stąd $d(\gamma, \mu) = d(\gamma, \delta)$, co dowodzi lematu.

Wniosek 2.2 *Jeżeli gałęzie γ, δ nie mają wspólnej gałęzi gładkiej maksymalnego kontaktu, to $d(\gamma, \delta) < \inf\{d(\gamma), d(\delta)\}$ oraz $d(\gamma, \delta) \in \mathbf{N}$.*

Oczywiście Lemat 2.1 i Wniosek 2.2 implikują własność (d_5). Osobliwe N-kiełki można scharakteryzować następująco:

Lemat 2.3 *Niech γ będzie osobliwym kiełkiem o gałęziach γ_i. Wówczas γ jest N-kiełkiem dokładnie wtedy, gdy dla każdej gałęzi gładkiej λ funkcja $i \mapsto d(\gamma_i, \lambda)$ jest stała.*

Dowód. Załóżmy, że dla każdej gałęzi gładkiej λ funkcja $i \longrightarrow d(\gamma_i, \lambda)$ jest stała. Niech λ_1 będzie gałęzią gładką o maksymalym kontakcie z γ_1. Funkcja $i \longrightarrow d(\gamma_i, \lambda_1)$ jest stała a więc $d(\gamma_i, \lambda_1) = d(\gamma_1, \lambda_1) = d(\gamma_1) \notin \mathbf{N}$ a stąd na mocy własności (d_4) $d(\gamma_i, \lambda_1) = d(\gamma_i)$. Podsumowując jest $d(\gamma_i) = d(\gamma_1)$ oraz $d(\gamma_i, \gamma_j) \geq$

$inf\{d(\gamma_i), d(\gamma_j)\} = d(\gamma_1)$ dla wszystkich i, j. Zatem $d'(\gamma_i, \gamma_j) = d(\gamma_1)$ dla wszystkich i, j a więc γ jest N-kiełkiem.

Przypuśćmy teraz, że istnieje gałąź gładka λ dla której funkcja $i \longrightarrow d(\gamma_i, \lambda)$ nie jest stała. Możemy założyć, ża $d(\gamma_1, \lambda) < d(\gamma_2, \lambda)$ a stąd $d(\gamma_1, \gamma_2) = d(\gamma_1, \lambda) < d(\gamma_2, \lambda) \leq d(\gamma_2) = d'(\gamma_2, \gamma_2)$ a więc $d'(\gamma_1, \gamma_2) < d'(\gamma_2, \gamma_2)$ co oznacza, ża γ nie jest N-kiełkiem.

Uwaga 2.4 *Jeżeli γ jest N-kiełkiem o składowych (γ_i) to $d'(\gamma_i, \gamma_j) = d(\gamma)$ dla wszystkich i, j ([P], Twierdzenie 2.2). Dla każdej gałęzi gładkiej λ jest $d(\lambda, \gamma_i) = d(\lambda, \gamma)$ dla wszystkich i. Następujące warunki są równoważne*

(a) λ ma kontakt maksymalny z γ,

(b) λ ma kontakt maksymalny z jakąś gałęzią γ,

(c) λ ma kontakt maksymalny z każdą gałęzią γ.

Lemat 2.5 *Jeżlei γ jest N-kiełkiem o składowych (γ_i) zaś δ N-kiełkiem o składowych (δ_j) to $d'(\gamma_i, \delta_j) = d'(\gamma, \delta)$ dla wszystkich i, j.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że γ i δ mają wspólną gałąź gładką λ maksymalnego kontaktu. Wówczas γ_i oraz δ_j mają wspólną gałąź maksymalnego kontaktu (również λ) oraz $d'(\gamma_i, \delta_j) = \inf\{d(\gamma_i), d(\delta_j)\} = \inf(d(\gamma), d(\delta)\} = d'(\gamma, \delta)$. Jeżeli γ i δ nie mają wspólnej gałęzi maksymalnego kontaktu i $d(\gamma, \lambda) = d(\gamma)$, $d(\delta, \mu) = d(\delta)$ dla pewnych gładkich gałęxi λ, μ to $d(\gamma_i, \lambda) = d(\gamma_i)$, $d(\delta_j, \mu) = d(\delta_j)$ oraz $d'(\gamma_i, \delta_j) = d'(\lambda, \mu) = d'(\gamma, \delta)$.

Uwaga 2.6 *Udowodnione wyżej własność gałęzi przenoszą się na N-kiełki. W szczególności*

(a) Własności (d_3) i (d_4) pozostają prawdziwe dla N-kiełków,

(b) Gdy γ, δ są N-kiełkami to $d'(\gamma, \delta) = \inf\{d(\gamma), d(\gamma, \delta)\} = \inf\{d(\gamma, \delta), d(\delta)\}$. Własności ($d'_1$), ($d'_2$), ($d'_3$) są prawdziwe dla N-kiełków.

Lemat 2.7 *Jeżeli γ, δ są N-kiełkami oraz gałąź gładka λ ma maksymalny kontakt z γ a gałąź gładka μ ma maksymalny kontakt z δ to $d'(\gamma, \delta) \leq (\lambda, \mu)_0$.*

Dowód. Jeżeli γ, δ nie mają wspólnej gałęzi maksymalnego kontaktu to $d'(\gamma, \delta) = d(\lambda, \mu) = (\lambda, \mu)_0$ bo Lemat 2.1 udowodniony dla gałęzi jest prawdziwy również dla N-kiełków. Jeżlei γ, δ mają wspólną gałąź maksymalnego kontaktu, powiedzmy ν, to $(\lambda, \nu)_0 = d(\lambda, \nu) \geq \inf\{d(\lambda, \gamma), d(\nu, \gamma)\} = d(\gamma)$ i podobnie $(\mu, \nu)_0 \geq d(\delta)$. Jest więc $(\lambda, \mu)_0 = d(\lambda, \mu) \geq \inf\{(\lambda, \nu)_0, (\mu, \nu)_0\} \geq \inf\{d(\gamma), d(\delta)\} = d'(\gamma, \delta)$.

Mamy teraz udowodnić

Twierdzenie 2.8 *Niech $(\gamma_i : i = 1, \ldots, s)$ będzie rodziną N-kiełków i niech k będzie liczbą całkowitą spełniającą warunek $0 \leq k \leq \inf\{d'(\gamma_i, \gamma_j)\}$. Wtedy istnieje kiełek gładki λ taki, że $d(\gamma_i, \lambda) = k$ dla $i = 1, \ldots, s$.*

Dowód. Sprawdzenie twierdzenia dla przypadku, gdy (γ_i) jest rodziną kiełków gładkich pozostawiamy Czytelnikowi. Rozważmy przypadek ogólny. Niech λ_i będzie gałęzią gładką mającą kontakt maksymalny z N-kiełkiem γ_i. Niech k będzie liczbą całkowitą, taką jak w założeniu twierdzenia. Z Lematu 2.7 wynika, że $k \leq \inf\{(\lambda_i, \lambda_j)_0\}$, a więc do rodziny (λ_i) i liczby k można zastosować twierdzenie. Istnieje więc kiełek gładki λ taki, że $(\lambda_i, \lambda)_0 = k$ dla $i = 1, \ldots, s$.

Rozważmy $d(\lambda_i, \gamma_i) = d(\gamma_i)$, $d(\lambda, \gamma_i) \leq d(\gamma_i)$ oraz $d(\lambda_i, \lambda) = (\lambda_i, \lambda)_0 = k$. Mamy $k \leq d(\gamma_i)$ (na mocy założenia twierdzenia) oraz $k \in \mathbf{N}$ więc $k < d(\gamma_i)$. Otrzymujemy zatem $d(\lambda, \gamma_i) = \inf\{d(\lambda_i, \gamma_i), d(\lambda_i, \lambda)\} = k$ dla $i = 1, \ldots, s$ co należało dowieść.

Twierdzenie 2.9 *Niech γ i δ będą kiełkami. Zakładamy, że istnieje rozkład (γ_i) kiełka γ na N-kiełki oraz rozkład (δ_i) o tej samej liczbie s elemantów kiełka δ na N-kiełki takie, że*

$$d'(\gamma_i, \gamma_j) = d'(\delta_i, \delta_j) \text{ dla } i, j = 1, \ldots, s.$$

Wtedy dla każdego kiełka gładkiego λ istnieje kiełek gładki μ taki, że $d(\gamma_i, \lambda) = d(\delta_i, \mu)$ dla $i = 1, \ldots, s$.

Dowód. Oznaczmy $d^* = \sup\{d(\gamma_i, \lambda) : i = 1, \ldots, s\}$. Po ewnentualnej zmianie numeracji kiełków możemy założyć, że $d(\gamma_1, \lambda) = \ldots = d(\gamma_{s^*}, \lambda) = d^*$ oraz $d(\gamma_i, \lambda) < d^*$ dla $i > s^*$ dla pewnego $s^* \in [1, s]$.

Własność 1. Istnieje kiełek gładki μ taki, że $d(\delta_1, \mu) = \ldots = d(\delta_{s^*}, \mu) = d^*$.
Dowód. Rozważmy najpierw przypadek, gdy $d^* \in \mathbf{N}$. Stosując Twierdzenie 2.8 do rodziny N-kiełków $(\delta_i : i = 1, \ldots, s^*)$ i liczby $k = d^*$ stwierdzamy, że istnieje gałąź gładka μ taka, że $d(\delta_i, \mu) = d^* = d(\gamma_i, \lambda)$ dla $i = 1, \ldots, s^*$. Niech teraz $d^* \notin \mathbf{N}$. Wtedy $d(\gamma_i, \lambda) = d^* \notin \mathbf{N}$ a więc $d(\gamma_i, \lambda) = d(\gamma_i) = d^*$ dla $i \in [1, s^*]$. Rozważmy gałąź gładką μ taką, że $d(\delta_1, \mu) = d(\delta_1)$. Jest $d(\delta_1) = d(\gamma_1)$ bo z założenia twierdzenia wynika, że $d(\gamma_i) = d(\gamma_i)$ dla $i = 1, \ldots, s$. Dla $i \in [1, s^*]$ mamy $d(\delta_i, \mu) \geq \inf\{d'(\delta_i, \delta_1), d(\delta_1, \mu)\} = d'(\delta_i, \delta_1)$ bo $d(\delta_1, \mu) = d(\delta_1)$ oraz $d'(\delta_i, \delta_1) \leq d(\delta_1)$. Z drugiej strony $d'(\delta_i, \delta_1) = d'(\gamma_i, \gamma_1) = \inf\{d(\gamma_1), d(\gamma_1, \gamma_i)\} = d^*$ ponieważ $d(\gamma_1) = d^*$ oraz $d(\gamma_1, \gamma_i) \geq \inf\{d(\gamma_1, \lambda), d(\gamma_i, \lambda)\} = d^*$. Podsumowując otrzymujemy $d(\delta_i, \mu) \geq d^*$ dla $i \in [1, s^*]$. Nierówność w przeciwnym kierunku jest niemal oczywista: $d(\delta_i, \mu) \leq d(\delta_i) = d(\gamma_i) = d^*$. Zatem $d(\delta_i, \mu) = d^*$ dla $i \in [1, s^*]$ co dowodzi Własności 1.

Własność 2. Jeżeli $d(\gamma_1, \lambda) = \ldots = d(\gamma_{s^*}, \lambda) = d^*$ oraz $d(\gamma_i, \lambda) < d^*$ dla $i > s^*$ oraz $d(\delta_1, \mu) = \ldots = d(\delta_{s^*}, \mu) = d^*$ to $d(\gamma_i, \lambda) = d(\delta_i, \mu)$ dla wszystkich $i \in [1, s]$.

Dowód Własności 2. Ustalmy $i \in [1, s]$. Możemy założyć, że $i > s^*$. Wtedy $d(\gamma_i, \lambda) = d'(\gamma_i, \gamma_1)$. Rozważmy ciąg $d(\delta_i, \mu), d'(\delta_i, \delta_1), d(\delta_1, \mu)$. Mamy $d'(\delta_i, \delta_1) = d'(\gamma_i, \gamma_1) = d(\gamma_i, \lambda) < d^*$. Jest $d(\delta_1, \mu) = d^*$. Wobec tego $d(\delta_i, \mu) = d'(\delta_i, \delta_1) = d'(\gamma_i, \gamma_1) = d(\gamma_i, \lambda)$ dla $i > s^*$ co należało dowieść.

Łącząc Własności 1 i 2 otrzymujemy dowód twierdznia.

3 Diagramy Newtona

Przypominamy tutaj minimum niezbędnych wiadomości o diagramach Newtona (więcej na ten temat Czytelnik może przeczytać w [BK] oraz [L]). Oznaczmy $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}$ i rozważmy kwadrant $(\mathbf{R}_+)^2$. Dla dowolnych podzbiorów $A, B \subset (\mathbf{R}_+)^2$ rozważmy ich *sumę arytmetyczną* $A + B = \{a + b : a \in A \text{ i } b \in B\}$. Dla dowolnego zbioru $E \subset \mathbf{N}^2$ oznaczmy $\Delta(E)$ najmniejszy podzbiór wypukły $(\mathbf{R}_+)^2$ zawierający zbiór $E + (\mathbf{R}_+)^2$. Podzbiór $\Delta \subset (\mathbf{R}_+)^2$ nazywamy *diagramem Newtona* gdy $\Delta = \Delta(E)$ dla pewnego $E \subset \mathbf{N}^2$. Diagramy Newtona tworzą półgrupę względem sumy arytmetycznej, jej zerem jest $(\mathbf{R}_+)^2 = \Delta(\emptyset)$. Gdy $E = \{(a, 0), (0, b)\}$ gdzie $a, b \in \mathbf{N}$, $a, b > 0$ to diagram $\Delta(E)$ oznaczamy symbolem $\{\frac{a}{b}\}$ ("ułamek Teissiera") i nazywamy diagramem elementarnym. Liczbę $\frac{a}{b}$ nazywamy inklinacją diagramu. Rozważamy też diagramy elementarne "niewłaściwe" $\{\frac{a}{\infty}\} = (a, 0) + (\mathbf{R}_+)^2$ oraz $\{\frac{\infty}{b}\} = (0, b) + (\mathbf{R}_+)^2$. Diagramy elementarne (łącznie z niewłaściwymi) tworzą zbiór generatorów półgrupy diagramów Newtona. Użyteczna jest

Własność 3.1 *Suma arytmetyczna diagramów elementarnych jest diagramem elementarnym wtedy i tylko wtedy, gdy inklinacje składników sumy są jednakowe.*

Niech teraz γ będzie kiełkiem krzywej analitycznej w punkcie 0 zespolonej powierzchni M i niech (x, y) będzie mapą scentrowaną w 0. Równaniem lokalnym (zredukowanym) kieła γ nazywamy zbieżny szereg potęgowy $f = \sum a_{ij} x^i y^j \in \mathbf{C}\{x, y\}$ bez czynników wielokrotnych którego suma określona w otoczeniu 0 zeruje się na pewnym reprezentancie kiełka γ. Przyjmujemy $\Delta_{x,y}(\gamma) = \Delta(E)$ gdzie $E = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 : a_{ij} \neq 0\}$ jest nośnikiem szeregu f. Diagram $\Delta_{x,y}(\gamma)$ nazywamy diagramem Newtona kiełka γ w mapie (x, y). Podane niżej dwie własności są dobrze znane (ich dowody Czytelnik znajdzie w [BK]).

Własność 3.2 *Niech $(\gamma_i : i = 1, \ldots, s)$ będzie rodziną kiełków taką, że kiełki γ_i, γ_j nie mają wspólnej gałęzi dla $i \neq j$. Wtedy*

$$\Delta_{x,y}(\bigcup_{i=1}^{s} \gamma_i) = \sum_{i=1}^{s} \Delta_{x,y}(\gamma_i)$$

W dalszym ciągu oznaczamy $(\gamma, x)_0 = (\gamma, \{x = 0\})_0$, $(\gamma, y)_0 = (\gamma, \{y = 0\})_0$ i podobnie $d(\gamma, x) = d(\gamma, \{x = 0\})$, $d(\gamma, y) = d(\gamma, \{y = 0\})$.

Własność 3.3 *Jeżeli γ jest gałęzią, to*

$$\Delta_{x,y}(\gamma) = \left\{ \frac{(\gamma, y)_0}{(\gamma, x)_0} \right\}.$$

Możemy teraz dowieść Twierdzenia 1.4 o charakteryzacji N-kiełków.

Lemat 3.4 *Jeżeli γ jest N-kiełkiem, to*

$$\Delta_{x,y}(\gamma) = \left\{ \frac{(\gamma, y)_0}{(\gamma, x)_0} \right\}.$$

Dowód. Niech (γ_i) będzie rozkładem γ na gałęzie. Z Lematu 2.3 wynika, że $d(\gamma_i, x) = d(\gamma, x)$ oraz $d(\gamma_i, y) = d(\gamma, y)$ dla wszystkich wskaźników i. Stosując Własność 3.3 do gałęzi γ_i stwierdzamy, że $\Delta_{x,y}(\gamma_i)$ jest diagramem elementarnym o inklinacji $\frac{d(\gamma,y)}{d(\gamma,x)}$ a zatem $\Delta_{x,y}(\gamma) = \sum_i \Delta_{x,y}(\gamma_i)$ jest również elementarny na mocy Własności 3.1. "Licznik" i "mianownik" ułamka Teissiera $\Delta_{x,y}(\gamma)$ są równe $\sum_i (\gamma_i, y)_0 = (\gamma, y)_0$ oraz $\sum_i (\gamma_i, x)_0 = (\gamma, x)_0$. To dowodzi lematu.

Lemat 3.5 *Niech γ będzie kiałkiem osobliwym. Jeżeli wszystkie diagramy $\Delta_{x,y}(\gamma)$ gdzie (x, y) przebiega mapy scentrowane w 0 są elementarne, to γ jest N-kiełkiem.*

Dowód. Niech (γ_i) będą gałęziami γ. Wobec Lematu 2.3 wystarczy sprawdzić, że dla każdej gałęzi λ funkcja $i \mapsto d(\gamma_i, \lambda)$ jest stała. Obierzmy mapę (x, y) taką, że $\{x = 0\}$ i γ są transwersalne oraz $\lambda = \{y = 0\}$. Jest więc $\Delta_{x,y}(\gamma_i) = \left\{\frac{m(\gamma_i)d(\gamma_i, L)}{m(\gamma_i)}\right\}$ oraz $\Delta_{x,y}(\gamma) = \sum_i \Delta_{x,y}(\gamma_i)$ jest diagramem elementarnym na mocy założenia lematu. Wynika stąd, że inklinacje diagramów $\Delta_{x,y}(\gamma_i)$, równe $d(\gamma_i, \lambda)$ są jednakowe na mocy Własność 3.1.

Dowód Twierdzenia 1.4. Twierdzenie wynika bezpośrednio z Lematów 3.4 oraz 3.5.

Podamy teraz dowód Twierdzenia 1.5. Niech γ, δ będą kiełkami N-równoważnymi. Istnieją zatem rozkłady $\gamma = \bigcup_{i=1}^{s} \gamma_i$, $\delta = \bigcup_{i=1}^{s} \delta_i$ na N-kiełki γ_i oraz δ_i takie, że

(i) $m(\gamma_i) = m(\delta_i)$

(ii) $d'(\gamma_i, \gamma_j) = d'(\delta_i, \delta_j)$

Ustalmy mapę (x, y). Pomijając trywialny przypadek, gdy obie krzywe gładkie $\{x = 0\}$ i $\{y = 0\}$ są transwersalne do γ możemy założyć, że γ i $\{y = 0\}$ nie są transwersalne. Mamy

$$\Delta_{x,y}(\gamma) = \sum_{i=1}^{s} \left\{\frac{(\gamma_i, y)_0}{(\gamma_i, x)_0}\right\} = \left\{\frac{m(\gamma_i)d(\gamma_i, y)}{m(\gamma_i)d(\gamma_i, x)}\right\} \tag{1}$$

na podstawie Własności 3.2 i Lematu 3.4. Na mocy Twierdzenia 2.9 stwierdzamy, że istnieją kiełki gładkie $\{z = 0\}$ oraz $\{w = 0\}$ takie, że

$$\begin{aligned} d(\gamma_i, y) &= d(\delta_i, w) \\ d(\gamma_i, x) &= d(\delta_i, z) \end{aligned} \tag{2}$$

dla $i = 1, \ldots, s$. Ponieważ γ oraz $\{y = 0\}$ nie są transwersalne zatem istnieje wskaźnik $i_0 \in [1, s]$ taki, że $d(\gamma_{i_0}, y) > 1$. Jest wtedy $d(\gamma_{i_0}, x) = 1$ bo γ_{i_0} ma jedną styczną zaś $\{x = 0\}$ i $\{y = 0\}$ są transwersalne. Z relacji (2) wnosimy, że $d(\delta_{i_0}, w) > 1$ oraz $d(\delta_{i_0}, z) = 1$. Stosując nierówność (d_3) do kiełków $\{z = 0\}$, $\{w = 0\}$ i δ_{i_0} stwierdzamy, że $d(z, w) = 1$ a więc $\{z = 0\}, \{w = 0\}$ są transwersalne. Mamy teraz

$$\Delta_{z,w}(\delta) = \sum_{i=1}^{s} \left\{\frac{(\delta_i, w)_0}{(\delta_i, z)_0}\right\} = \left\{\frac{m(\delta_i)d(\delta_i, w)}{m(\delta_i)d(\delta_i, z)}\right\} \tag{3}$$

i równość $\Delta_{x,y}(\gamma) = \Delta_{z,w}(\delta)$ wynika z (1) i (3).

References

[BK] E. Brieskorn, H. Knörer, *Ebene Algebraische Kurven*, Birkhäuser, 1981.

[GB-L-P] E. García Barroso, A. Lenarcik, A. Płoski, *Newton diagrams and equivalence of plane curve singularities*, (preprint).

[K] A. G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Inv. Math. 32 (1976), 1–31.

[L] A. Lenarcik, *Algorytm Newtona i szeregi Puiseux*, Materiały XXIV Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2003, 21–32.

[O] M. Oka, *On the stability of the Newton Boundary*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematica, Volume 40 (1983), Part 2, 259–268.

[P] A. Płoski, *O kontakcie maksymalnym*, Materiały XXV Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Wyd. UŁ, Łódź 2004.

ON THE STABILITY OF THE NEWTON BOUNDARY

For any plane curve germ γ at a fixed point 0 of a complex smooth surface and for any chart (x, y) centered at 0 we consider the Newton diagram $\Delta_{x,y}(\gamma) \subset \mathbf{R}^2_+$. Let $\mathcal{N}(\gamma)$ be the set of Newton diagrams $\Delta_{x,y}(\gamma)$ where (x, y) runs over all charts (x, y). In the paper we prove that if γ and δ are equivalent then $\mathcal{N}(\gamma) = \mathcal{N}(\delta)$.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2006 r.