MATERIAŁY NA XXVIII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ

2007 Łódź str. 41

O NIERÓWNOŚCI BEZOUTA

Arkadiusz Płoski, Maciej Sękalski (Kielce)

Wstęp

Wielomian jednej zmiennej stopnia $d > 0$ o współczynnikach w dowolnym ciele $\mathbb{K}$ ma w tym ciele co najwyżej d pierwiastków. Uogólnieniem tego elementarnego faktu na przypadek układów równań jest nierówność Bezouta: układ n równań wielomianowych stopni $d_1, \ldots, d_n > 0$ o n niewiadomych, o współczynnikach w ciele algebraicznie domkniętym $\mathbb{K}$ ma w przestrzeni $\mathbb{K}^n$ co najwyżej $\prod_{i=1}^{n} d_i$ rozwiązań izolowanych w topologii Zariskiego. Założenia o algebraicznej domkniętości $\mathbb{K}$ nie można opuścić: Fulton podał w swojej słynnej monografii *"Intersection Theory"* przykład układu równań wielomianowych o współczynnikach w $\mathbb{R}$ posiadającego w $\mathbb{R}^n$ skończony zbiór rozwiązań nie spełniający podanego wyżej oszacowania. W tym artykule wprowadzamy pojęcie rozwiązania algebraicznie izolowanego dla układów równań o współczynnikach w dowolnym ciele $\mathbb{K}$ i dowodzimy stosując elementarne twierdzenie Perrona i standardowe fakty z algebry przemiennej nierówności Bezouta dla liczby rozwiązań algebraicznie izolowanych. Czytelnik może porównać nasze ujęcie z podejściem S. S. Abhyankara [2], który stosuje wielomian Hilberta dla oszacowania liczby minimalnych ideałów pierwszych w pierścieniu z gradacją oraz z metodami analizy zespolonej zastosowanymi przez K. Ruska i T. Winiarskiego [8] w przypadku $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Szczegółowy wykład twierdzenia Perrona można znaleźć w [4]. Przykład Fultona jest opisany w artykule [7]. W całym artykule $\mathbb{K}$ jest dowolnym ciałem. Pierścień wielomianów o współczynnikach w $\mathbb{K}$ n zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ oznaczamy $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Gdy $P \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ to $\deg P$ jest stopniem P a P^+ formą wiodącą wielomianu P.

1 Rozwiązania algebraicznie izolowane

Dla każdego punktu $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ rozważamy pierścień $\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{a})$ tego punktu utworzony przez wszystkie funkcje wymierne dające się przedstawić w postaci $\frac{R}{S}$ gdzie $R, S \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, $S(\mathbf{a}) \neq 0$. Niech $F = (F_1, \ldots, F_n) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]^n$ będzie ciągiem wielomianów dodatnich stopni $d_1, \ldots, d_n > 0$. Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ będziemy nazywać rozwiązaniem geometrycznie izolowanym układu $F = 0$ gdy istnieje zbiór otwarty Zariskiego $U \subset \mathbb{K}^n$ taki, że $\mathbf{a}$ jest jedynym rozwiązaniem układu $F = 0$ w zbiorze U. Łatwo sprawdzić, że jeśli układ $F = 0$ ma skończony zbiór rozwiązań w $\mathbb{K}^n$ gdzie $\mathbb{K}$ jest ciałem nieskończonym to rozwiązania tego układu są geometrycznie izolowane.

Definicja 1.1 *Punkt* $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ *nazywamy algebraicznie izolowanym rozwiązaniem układu* $F = 0$ *gdy* $F(\mathbf{a}) = 0$ *oraz gdy ideał generowany przez wielomiany* $F_1, \ldots, F_n$ *w* $\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{a})$ *ma kowymiar skończony.*

Łatwo ustalić związek między obu pojęciami.

Własność 1.2 *Każde rozwiązanie algebraicznie izolowane układu* $F = 0$ *jest geometrycznie izolowane. Gdy ciało* $\mathbb{K}$ *jest algebraicznie domknięte to prawdziwa jest implikacja odwrotna: każde rozwiązanie geometrycznie izolowane jest algebraicznie izolowane.*

Dowód. Możemy założyć, że $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Jedyny ideał maksymalny pierścienia $\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{0})$ jest generowany przez zmienne $x_1, \ldots, x_n$. Łatwo zauważyć, że rozwiązanie $\mathbf{0}$ jest algebraicznie izolowane dokładnie wtedy, gdy istnieje liczba całkowita $p > 0$ taka, że $S(\mathbf{x})x_i^p = \sum_{j=1}^n R_{ij}(\mathbf{x})F_j(\mathbf{x})$ w $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ przy czym $S(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$.

Jeżeli więc U jest zbiorem określonym nierównością $S(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ to układ $F = 0$ ma w U jedynie rozwiązanie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Załóżmy, że $\mathbf{0}$ jest jedynym rozwiązaniem układu w zbiorze otwartym $U \subset \mathbb{K}^n$. Zmniejszając ewentualnie U możemy założyć, że istnieje wielomian Q taki, że U jest określony nierównością $Q(\mathbf{x}) \neq 0$. Ponieważ $\mathbf{0} \in U$ zatem $Q(\mathbf{0}) \neq 0$. Wielomiany x_iQ zerują się na zbiorze rozwiązań układu $F = 0$. Zatem na mocy twierdzenia Hilberta o zerach istnieje liczba całkowita $q > 0$ taka, ze $(Q(\mathbf{x})x_i)^q$ dla $i = 1, \ldots, n$ leżą w ideale pierścienia wielomianów generowanym przez $F_1, \ldots, F_n$. Stąd $\mathbf{0}$ jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym układu $F = 0$.

Własność "$\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym układu $F = 0$" zachowuje się przy rozszerzeniu ciała $\mathbb{K}$:

Własność 1.3 *Jeżeli* $\mathbb{L}$ *jest rozszerzeniem ciała* $\mathbb{K}$ *oraz ideał* $(F_1, \ldots, F_n)\mathcal{O}(\mathbb{L}^n, \mathbf{a})$ *jest kowymiaru skończonego to również ideał* $(F_1, \ldots, F_n)\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{a})$ *jest kowymiaru skończonego.*

Dowód. Niech$(e_\omega : \omega \in \Omega)$ będzie bazą Hamela ciała $\mathbb{L}$ jako przestrzeni wektorowej nad $\mathbb{K}$. Zatem każdy wielomian $P(\mathbf{x}) \in \mathbb{L}[\mathbf{x}]$ ma jednoznaczne przedstawienie postaci $P(\mathbf{x}) = \sum_{\omega \in \Omega} P_\omega(\mathbf{x}) e_\omega$ (suma o nośniku skończonym) gdzie $P_\omega(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Załóżmy dla prostoty, że $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Podobnie jak w dowodzie Własności 1.2 otrzymujemy relacje $S(\mathbf{x}) x_i^p = \sum_{j=1}^n R_{ij}(\mathbf{x}) F_j(\mathbf{x})$ gdzie $S(\mathbf{x}), R_{ij}(\mathbf{x}) \in \mathbb{L}[\mathbf{x}]$ oraz $S(\mathbf{0}) \neq 0$. Przedstawiając wielomiany $S(\mathbf{x}), R_{ij}(\mathbf{x})$ jako kombinacje liniowe takie jak opisana wyżej dla wielomianu $P(\mathbf{x})$ otrzymujemy analogiczne relacje o współczynnikach w $\mathbb{K}$ co dowodzi, że ideał $(F_1, \ldots, F_n)\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{0})$ ma kowymiar skończony.

Dowody dwóch własności podanych niżej przedstawimy w §3 tego artykułu. Rozwiązanie $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ układu $F = 0$ nazywamy niezdegenerowanym gdy $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{a})\right) \neq 0$.

Własność 1.4 *Każde rozwiązanie niezdegenerowane układu $F = 0$ jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym.*

Dla każdego ciągu wielomianów $F = (F_1, \ldots, F_n)$ dodatnich stopni oznaczmy $F^+ = (F_1^+, \ldots, F_n^+)$. Oczywiście $\mathbf{0}$ jest rozwiązaniem układu jednorodnego $F^+ = 0$. Powiemy, ze układ $F = 0$ jest normalny gdy $\mathbf{0}$ jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym układu $F^+ = 0$. Wówczas układ $F^+ = 0$ nie ma niezerowych rozwiązań w $\mathbb{K}^n$.

Własność 1.5 *Jeżeli układ $F = 0$ jest normalny to każde rozwiązanie tego układu jest algebraicznie izolowane.*

2 Nierówność Bezouta

Podobnie jak wyżej $F = (F_1, \ldots, F_n)$ jest ciągiem wielomianów dodatnich stopni $d_1, \ldots, d_n > 0$ o współczynnikach w ustalonym ciele $\mathbb{K}$.

Twierdzenie 2.1 *Układ $F = 0$ ma co najwyżej $\prod_{i=1}^n d_i$ rozwiązań algebraicznie izolowanych. Jeżeli istnieje $\prod_{i=1}^n d_i$ rozwiązań algebraicznie izolowanych tego układu to wszystkie te rozwiązania są niezdegenerowane a układ jest normalny.*

Dowód powyższego twierdzenia podajemy w §4 tego artykułu. Zanotujmy jeszcze wniosek z Twierdzenia 2.1 oraz Własności 1.5.

Wniosek 2.2 *Jeśli układ $F = 0$ ma $\prod_{i=1}^n d_i$ rozwiązań algebraicznie izolowanych to każde rozwiązanie układu jest algebraicznie izolowane.*

W przypadku ciał algebraicznie domkniętych Twierdzeniu 2.1 można nadać postać

Wniosek 2.3 *Jeżeli* $\mathbb{K}$ *jest ciałem algebraicznie domkniętym to układ* $F = 0$ *ma co najwyżej* $\prod_{i=1}^{n} d_i$ *rozwiązań geometrycznie izolowanych. Gdy istnieje dokładnie* $\prod_{i=1}^{n} d_i$ *takich rozwiązań to są one niezdegenerowane i układ jednorodny* $F^{+} = 0$ *ma w* $\mathbb{K}^n$ *wyłącznie rozwiązanie* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dowód. Z Własności 1.2 wiemy, że gdy ciało $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domknięte to terminy "rozwiązanie geometrycznie izolowane" oraz "rozwiązanie algebraicznie izolowane" oznaczają to samo. Stąd i z Twierdzenia 2.1 wynika wniosek.

Uwaga 2.4 Z Wniosku 2.3 wynika, że jeśli układ $F = 0$ o współczynnikach w ciele algebraicznie domkniętym ma skończoną liczbę N rozwiązań to $N \leqslant \prod_{i=1}^{n} d_i$.

Pokażemy jeszcze, że w Twierdzeniu 2.1 założenia "algebraicznie izolowane" nie można zastąpić słabszym założeniem "geometrycznie izolowane".

Przykład 2.5 Przyjmijmy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i niech $0 < m < n$ będą liczbami całkowitymi. Niech $a_1, \ldots, a_m$ oraz $b_1, \ldots, b_n$ będą różnowartościowymi ciągami liczb rzeczywistych. Przyjmijmy

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= [(x-a_1)\cdots(x-a_m)]^2 + [(y-b_1x)\cdots(y-b_nx)]^2, \\ F_2(x,y,z) &= xz, \\ F_2(x,y,z) &= yz, \end{aligned}$$

oraz $F = (F_1, F_2, F_3)$. Jest więc $d_1 = 2n$, $d_2 = d_3 = 2$ oraz $\prod_i d_i = 8n$. Układ $F = 0$ ma mn rozwiązań w $\mathbb{R}^3$. Są to trójki postaci $(a_i, a_ib_j, 0)$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$. Natomiast układ jednorodny $F^{+} = 0$ ma n rozwiązań w $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Są to $(1 : b_j : 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Dla $m = 8$ dostajemy układ, który ma $\prod d_i = 8n$ rozwiązań w $\mathbb{R}^3$ ale rozwiązania te są zdegenerowane i układ nie jest normalny.

3 Parametry pierścieni szeregów potęgowych

Niech $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ będzie pierścieniem formalnych szeregów potęgowych n zmiennych $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Ciąg formalnych szeregów potęgowych $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]^n$ bez stałych wyrazów jest systemem parametrów (s.p.) pierścienia $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ gdy ideał generowany przez szeregi $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ w $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ ma kowymiar skończony. Łatwo sprawdzić, że ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy ideał ten zawiera wszystkie jednomiany dostatecznie wysokiego stopnia (równoważnie: zawiera dostatecznie wysokie potęgi zmiennych $x_1, \ldots, x_n$). W dalszym ciągu pierścień $\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{a})$ utożsamiamy z podpierścieniem pierścienia $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ identyfikując funkcje wymierne regularne w punkcie $\mathbf{a}$ z ich formalnymi szeregami Taylora.

Lemat 3.1 *Niech* $F = (F_1, \ldots, F_n)$ *będzie ciągiem wielomianów* n *zmiennych* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *o współczynnikach w ciele* $\mathbb{K}$ *i niech* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$*. Wówczas punkt* $\mathbf{a}$ *jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym układu* $F = 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy szeregi* $F_1(\mathbf{a}+\mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{a}+\mathbf{x})$ *tworzą system parametrów pierścienia* $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$.

Dowód. Implikacja "$\Rightarrow$" jest oczywista. Implikacja w kierunku przeciwnym wynika z klasycznego twierdzenia Krulla:

> *równanie liniowe o współczynnikach wielomianowych ma rozwiązanie w pierścieniu* $\mathcal{O}(\mathbb{K}^n, \mathbf{0})$ *gdy ma rozwiązanie w* $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ (por. [3]).

Użyteczne są następujące charakteryzacje parametrów.

Lemat 3.2 *Niech* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ *będzie ciągiem szeregów bez stałych wyrazów. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(i) $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ *jest s.p. pierścienia* $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$,

(ii) rozszerzenie $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]] \supset \mathbb{K}[[\Phi_1, \ldots, \Phi_n]]$ *jest skończonym modułem,*

(iii) rozszerzenie $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]] \supset \mathbb{K}[[\Phi_1, \ldots, \Phi_n]]$ *jest rozszerzeniem całkowitym,*

(iv) zmienne x_i $(i = 1, \ldots, n)$ *są całkowitymi elementami nad* $\mathbb{K}[[\Phi_1, \ldots, \Phi_n]]$.

Dowód. Implikacja *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* bywa nazywana uogólnionym twierdzeniem przygotowawczym. Jej dowód Czytelnik znajdzie w artykule [7], Dodatek D. Rozpatrujemy tam przypadek dwóch zmiennych, rozumowanie przenosi się bez istotnych zmian na przypadek ogólny.

Implikacja *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* to dobrze znany elementarny fakt algebraiczny. Wynikanie *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)* jest banalne.

Aby sprawdzić, że *(iv)* $\Rightarrow$ *(i)* rozważmy minimalne równania zależności całkowitej: $x_i^{n_i} + a_{i1}(\Phi)x_i^{n_i-1} + \cdots + a_{in}(\Phi) = 0$ $(i = 1, \ldots, i)$. Łatwo sprawdzić, że $a_{ij}(0) = 0$ dla $i, j = 1, \ldots, n$ a więc potęgi $x_i^{n_i}$ leżą w ideale generowanym przez szeregi $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ co kończy dowód.

Możemy teraz dowieść dwie własności rozwiązań algebraicznie izolowanych zapowiedziane w §1 artykułu.

Dowód własności 1.4. Możemy przyjąć, że $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Na mocy założenia $\det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{0})\right) \neq 0$. Stosując twierdzenie o funkcjach uwikłanych stwierdzamy, że $\mathbb{K}[[F_1, \ldots, F_n]] = \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ a więc ciąg $F_1, \ldots, F_n$ jest s.p. pierścienia $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$. Na mocy Lematu 3.1 punkt $\mathbf{0}$ jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym układu $F = 0$.

Dowód własności 1.5. Niech $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ będzie rozwiązaniem układu $F = 0$. Zauważmy, że układ $F(\mathbf{x}) = 0$ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy układ $F(\mathbf{a}+\mathbf{x}) = 0$ jest normalny bo przesunięcie $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ nie ma wpływu na część wiodącą wielomianu n zmiennych. Możemy więc założyć, że $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Z normalności układu $F = 0$ wynika, że rozszerzenie $\mathbb{K}[\mathbf{x}] \supset \mathbb{K}[F_1, \dots, F_n]$ jest rozszerzeniem całkowitym (por. [9]). W szczególności zmienne x_i są całkowite nad $\mathbb{K}[F_1, \dots, F_n]$ a tym bardziej nad $\mathbb{K}[[F_1, \dots, F_n]]$. Z Lematu 3.1 wynika, że $\mathbf{0}$ jest rozwiązaniem algebraicznie izolowanym układu $F = 0$ co dowodzi własności.

4 Dowód nierówności Bezouta.

Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że ciało $\mathbb{K}$ jest nieskończone. Użyteczny jest

Lemat 4.1 *Dla każdego skończonego zbioru $S \subset \mathbb{K}^n$ istnieje n form liniowych $L_i = c_{i1}x_1 + \dots + c_{in}x_n \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ $(i = 1, \dots, n)$ liniowo niezależnych rozdzielających punkty zbioru S.*

Dowód. Niech $\mathbf{a}_k = (a_{k1}, \dots, a_{k,n})$ $(k = 1, \dots, N)$ będzie ciągiem różnych punktów zbioru S. Rozważmy n^2 nowych zmiennych $z = (z_{ij})$ $(i, j = 1, \dots, n)$ oraz wielomian

$$(\det[z_{ij}]) \prod_{i=1}^{n} \prod_{k<l} (z_{i1}(a_{k1} - a_{l1}) + \dots + z_{in}(a_{kn} - a_{ln})) \in \mathbb{K}[z].$$

Jest to niezerowy wielomian n^2 zmiennych $z = (z_{ij})$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$. Ponieważ $\mathbb{K}$ jest ciałem nieskończonym funkcja wyznaczona przez ten wielomian jest niezerowa. Istnieją więc stałe $c_{ij} \in \mathbb{K}$ $(i, j = 1, \dots, n)$ takie, że po podstawieniu c_{ij} na miejsce z_{ij} otrzymujemy niezerowy element ciała $\mathbb{K}$. Formy liniowe $L_i = c_{i1}x_1 + \dots + c_{in}x_n$ $(i = 1, \dots, n)$ są liniowo niezależne i rozdzielają punkty zbioru S.

Rozważmy teraz ciąg $n + 1$ wielomianów $F_1, \dots, F_n, F_{n+1} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ dodatnich stopni $d_1, \dots, d_n, d_{n+1} > 0$. Jeżeli wielomiany $F_1, \dots, F_n$ są algebraicznie niezależne to istnieje jedyny (z dokładnością do stałego niezerowego czynnika) (niezerowy) nierozkładalny wielomian $P = P(y_1, \dots, y_n, y_{n+1}) \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_{n+1}]$ taki, że $P(F_1, \dots, F_n, F_{n+1}) = 0$ w $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$. Wielomian ten nazywamy wielomianem minimalnym ciągu $F_1, \dots, F_{n+1}$.

Lemat 4.2 *Przy powyższych oznaczeniach i założeniach wielomian minimalny P ma własność Perrona: jeżeli waga $y_i = d_i$ dla $i = 1, \dots, n + 1$ to waga $P \leqslant d_1 \cdots d_{n+1}$.*

Dowód (należący do O. Perrona) tego lematu Czytelnik znajdzie w artykule [4].

Możemy teraz podać

Dowód Twierdzenia 2.1. Możemy założyć, że układ $F = 0$ ma co najmniej jedno rozwiązanie algebraicznie izolowane. Wynika stąd, że szeregi $F_1(\mathbf{a}+\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{a}+$

$\mathbf{x}$) tworzą s.p. pierścienia $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ dla pewnego $\mathbf{a} \in \mathbb{K}^n$ a więc są algebraicznie niezależne na mocy twierdzenia o algebraicznej niezależności parametrów (por. [9]). Zatem wielomiany $F_1, \ldots, F_n$ są algebraicznie niezależne i dla każdego wielomianu $F_{n+1} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ stopnia > 0 można rozważać wielomian minimalny ciągu $F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}$. Rozważmy ciąg $N > 0$ rozwiązań algebraicznie izolowanych $\mathbf{a}_1, \ldots \mathbf{a}_N$ układu $F = 0$. Ponieważ ciało $\mathbb{K}$ jest nieskończone istnieje forma liniowa $F_{n+1} = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ rozdzielająca rozwiązania $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N$. Oznaczmy $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ i niech $P(\mathbf{y}, y_{n+1}) = P_0(\mathbf{y})y_{n+1}^d + P_1(\mathbf{y})y_{n+1}^{d-1} + \cdots + P_d(\mathbf{y})$ będzie wielomianem minimalnym ciągu $F_1, \ldots, F_n, F_{n+1}$.

Jest $d \leqslant d_1 \cdots, d_n$ na mocy Lematu 4.2. Z założenia, że $\mathbf{a}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ są rozwiązaniami algebraicznie izolowanymi wynika (Lemat 3.1), że szeregi $F_1(\mathbf{a}_i + \mathbf{x}), \ldots, F_n(\mathbf{a}_i + \mathbf{x})$ tworzą s.p. a więc rozszerzenia

$$(1) \qquad \mathbb{K}[[\mathbf{x}]] \supset \mathbb{K}[[F(\mathbf{a}_i + \mathbf{x})]] \quad (i = 1, \ldots, N)$$

są rozszerzeniami całkowitymi (Lemat 3.2). Istnieje więc dla każdego $i = 1, \ldots, N$ wielomian wyróżniony nierozkładalny $Q_i(\mathbf{y}, y_{n+1}) = y_{n+1}^{m_i} + Q_{i1}(\mathbf{y})y_{n+1}^{m_i-1} + \cdots + Q_{im_i}(\mathbf{y}) \in \mathbb{K}[[\mathbf{y}]][y_{n+1}]$ taki, że

$$(2) \qquad Q_i(F(\mathbf{a}_i + \mathbf{x}), F_{n+1}(\mathbf{x})) = 0 \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, N.$$

Z warunku $P(F(\mathbf{x}), F_{n+1}(\mathbf{x})) = 0$ wynika, że

$$(3) \qquad P(F(\mathbf{a}_i + \mathbf{x}), F_{n+1}(\mathbf{x}) + F_{n+1}(\mathbf{a}_i)) = 0$$

a więc wielomian $Q_i(\mathbf{y}, y_{n+1})$ dzieli $P(\mathbf{y}, F_{n+1}(\mathbf{a}_i) + y_{n+1})$ dla $i = 1, \ldots, N$ a stąd

$$(4) \qquad \text{wielomian } Q_i(\mathbf{y}, y_{n+1} - F_{n+1}(\mathbf{a}_i)) \text{ dzieli wielomian } P(\mathbf{y}, y_{n+1})$$

w pierścieniu $\mathbb{K}[[\mathbf{y}]][y_{n+1}]$.

Wielomiany $Q_i(\mathbf{y}, y_{n+1} - F_{n+1}(\mathbf{a}_i))$ są względnie pierwsze i jak łatwo zauważyć są parami liniowo niezależne ($F_{n+1}(\mathbf{a}_i) \neq F_{n+1}(\mathbf{a}_j)$ dla $i \neq j$!). Zatem relacje (4) implikują

$$(5) \qquad \prod_{i=1}^{N} Q_i(\mathbf{y}, y_{n+1} - F_{n+1}(\mathbf{a}_i)) \text{ dzieli } P(\mathbf{y}, y_{n+1}) \text{ w } \mathbb{K}[[\mathbf{y}]][y_{n+1}].$$

Porównanie stopni względem y_{n+1} daje

$$(6) \qquad N \leqslant \sum_{i=1}^{N} m_i \leqslant d \leqslant d_1 \cdots d_n.$$

co dowodzi pierwszej części Twierdzenia 2.1.

Aby sprawdzić drugą część twierdzenia załóżmy, że istnieje $N = d_1 \cdots d_n$ rozwiązań algebraicznie izolowanych układu $F = 0$. Z warunku (6) wynika, że wtedy $m_i = 1$ tzn. $Q_i(\mathbf{y}, y_{n+1}) = y_{n+1} + Q_{i1}(\mathbf{y})$ a więc $F_{n+1} \in \mathbb{K}[[F(\mathbf{a}_i + \mathbf{x})]]$.

Relacja ta ma miejsce dla dowolnej formy liniowej F_{n+1} rozdzielającej punkty $\mathbf{a}_i$ a więc na mocy Lematu 4.1 pierścień $\mathbb{K}[[F(\mathbf{a}_i + \mathbf{x})]]$ zawiera n form liniowych liniowo niezależnych. Stąd $\mathbb{K}[[F(\mathbf{a}_i + \mathbf{x})]] = \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ a więc jak łatwo sprawdzić $\mathbf{a}_i$ jest rozwiązaniem niezdegenerowanym układu $F = 0$.

Pozostaje sprawdzić, że jeśli $N = \prod_{i=1}^n d_i$ to układ $F = 0$ jest normalny. Z Lematu 4.2 wynika, że jeśli $N = \prod_{i=1}^n d_i$, to wielomian minimalny $P(\mathbf{y}, y_{n+1})$ jest unormowany względem y_{n+1} stopnia $d = N = \prod_{i=1}^n d_i$. Po wymnożeniu przez stałą można przyjąć, że $P(\mathbf{y}, y_{n+1}) = y_{n+1}^d + P_1(\mathbf{y})y_{n+1}^{d-1} + \cdots + P_d(\mathbf{y})$. Niech $\tilde{P}$ będzie sumą jednomianów występujących w P wagi $\prod_{i=1}^n d_i$. Zatem $\tilde{P}(\mathbf{y}, y_{n+1}) = y_{n+1}^d + \tilde{P}_1(\mathbf{y})y_{n+1}^{d-1} + \cdots + \tilde{P}_d(\mathbf{y})$ gdzie $\tilde{P}_i(\mathbf{y})$ jest formą quasi-jednorodną wagi i. Ponadto z warunku $P(F_1(\mathbf{x}), \ldots, F_{n+1}(\mathbf{x})) = 0$ wynika relacja $\tilde{P}(F_1^+, \ldots, F_n^+, F_{n+1}) = 0$ a więc forma liniowa F_{n+1} jest całkowita nad pierścieniem $\mathbb{K}[[F_1^+, \ldots, F_n^+]]$. Z Lematu 4.2 wynika, że istnieje n form liniowych liniowo niezależnych całkowitych nad $\mathbb{K}[[F_1^+, \ldots, F_n^+]]$. Stąd wnioskujemy, że rozszerzenie $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]] \supset \mathbb{K}[[F_1^+, \ldots, F_n^+]]$ jest całkowite a więc $\mathbf{0}$ jest rozwiazaniem algebraicznie izolowanym układu $F^+ = 0$. To dowodzi twierdzenia.

Literatura

[1] **Abhyankar S. S.**, *Local Analytic Geometry,* Academic Press, New York 1964,

[2] ———————, *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces,* Academic Press, New York 1966,

[3] **Gröbner W.**, *Moderne algebraische Geometrie,* Springer-Verlag 1949,

[4] **Lenarcik A., Płoski A.**, *Efektywne twierdzenie Hilberta o zerach według Z. Jelonka,* Materiały XXVI Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2005, str. 25-32,

[5] **Płoski A.**, *Algebraic Dependence of Polynomials after O. Perron and Some Applications,* Computational Commutative and Non-Commutative Algebraic Geometry, S. Cojocaru at al. (Eds.), IOS Press, 2005, pp. 167-173,

[6] **Płoski A.**, *Wstęp do lokalnej teorii krzywych algebraicznych,* Materiały XXVIII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2007,

[7] **Płoski A., Sękalski M.**, *Nierówność Bezouta dla wielomianów rzeczywistych,* Materiały XXVI Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2005, str. 35-37,

[8] **Rusek K., Winiarski T.**, *Polynomial automorhisms of $\mathbb{C}^n$,* Univ. Iag. Acta Math. 24 (1984), pp. 143-150,

[9] **Zariski O., Samuel P.**, *Commutative algebra, Vol II,* D. van Nostrand Company, Princeton 1960.

On Bezout's inequality

Summary. Let $F_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ be a system of n polynomial equations of degrees $d_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ in n variables with coefficients in an arbitrary field $\mathbb{K}$. We give a simple proof (without using the intersection theory) of Bezout's inequality:

> the number of algebraically isolated solutions of the system under considerations is less then or equal to the product of degrees $\prod_{i=1}^{n} d_i$.

We check also that if there is $\prod_{i=1}^{n} d_i$ algebraically isolated solutions then all these solutions are nondegenerate and the system $F_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$ is normal i.e. has no solutions at infinity.

Łódź, 8 – 12 stycznia 2007 r.