**MATERIAŁY NA XXXVII KONFERENCJĘ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ**

**2016** **Łódź** **str. 29**

# O LICZBIE MILNORA OSOBLIWOŚCI KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH W CHARAKTERYSTYCE SKOŃCZONEJ

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Celem tego opracowania jest przegląd prac o liczbie Milnora w charakterystyce skończonej [B-G-M], [D], [G-N], [GB-P bis], [H-R-S], [MH-W], [Ng], [P3]. Wszystkie potrzebne pojęcia i twierdzenia z lokalnej teorii krzywych algebraicznych Czytelnik znajdzie w [P1].

Niech $\mathbb{K}$ będzie ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki $p \geqslant 0$. Jeżeli $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$, to $\operatorname{ord} f$ resp. $\operatorname{in} f$ oznacza rząd (= krotność) resp. formę początkową szeregu $f$. Gdy $\operatorname{ord} f = 1$, szereg $f$ nazywamy parametrem regularnym. Gdy $f \neq 0$ oraz $\operatorname{ord} f > 1$, to $f$ nazywamy osobliwością. Krotność przecięcia szeregów $f, g$ oznaczamy $i_0(f,g)$. Liczba Milnora $\mu(f)$ szeregu $f$ bez stałego wyrazu określona jest wzorem

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[[x,y]] \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) .$$

Jest więc $\mu(f) = i_0\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$. Jeżeli $\Phi$ jest automorfizmem pierścienia $\mathbb{K}[[x,y]]$, to $\mu(f) = \mu(f \circ \Phi)$. Jeżeli $p = \operatorname{char} \mathbb{K} > 0$, to możemy mieć $\mu(f) = +\infty$ ale $\mu(g) < +\infty$ dla $g = uf$, $u(0,0) \neq 0$.

Przykład: $f = x^p + y^{p+1}$ $(p > 1)$ oraz $u = 1 + x$.

# 1 Lemat Teissiera w charakterystyce p

Podstawowe własności liczby Milnora w charakterystyce 0 łatwo otrzymać stosując lemat Teissiera (cf. [CN-P]). Gdy charakterystyka jest dodatnia, lemat wymaga dodatkowych założeń.

Dla każdego zredukowanego szeregu $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ (bez czynników wielokrotnych) i dla każdego parametru regularnego $l$ definiujemy

$$P_l(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial l}{\partial x} \text{ (krzywa polarna } f \text{ względem } l) \ .$$

Gdy $l = -bx + ay$, to $P_l(f) = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$. Dalej zakładamy, że $l$ nie dzieli $f$.

**Twierdzenie 1.1** ([P3], lemat Teissiera w charakterystyce $p$)
*Załóżmy, że*

(i) $i_0(l,f) \not\equiv 0 \pmod{p}$,

(ii) *dla każdego nierozkładalnego czynnika $h$ szeregu $P_l(f)$: $i_0(l,h) \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

*Wtedy $i_0(f, P_l(f)) \leqslant \mu(f) + i_0(f,l) - 1$, przy czym równość zachodzi dokładnie wtedy, gdy jest spełniony warunek*

(iii) *dla każdego nierozkładalnego czynnika $h$ szeregu $P_l(h)$: $i_0(f,h) \not\equiv 0 \pmod{p}$.*

**Wniosek 1.2** ([T], lemat Teissiera w charakterystyce 0)
*Gdy $p = 0$, to $i_0(f, P_l(f)) = \mu(f) + i_0(f,l) - 1$.*

# 2 Formuła Milnora

Dla każdego szeregu zredukowanego $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ definiujemy

$$\begin{aligned}
\mathcal{O} &= \mathbb{K}[[x,y]] \big/ (f) \ , \\
\mathcal{M} &= \text{pełny pierścień ułamków pierścienia } \mathcal{O} \ , \\
\hat{\mathcal{O}} &= \text{domknięcie całkowite pierścienia } \mathcal{O} \text{ w } \mathcal{M} \ , \\
\mathcal{C} &= \text{ konduktor } \mathcal{O} \text{ w } \hat{\mathcal{O}} \ , \\
\delta(f) &= \dim_{\mathbb{K}} \hat{\mathcal{O}} \big/ \mathcal{O} \ , \\
c(f) &= \dim_{\mathbb{K}} \hat{\mathcal{O}} \big/ \mathcal{C} \ .
\end{aligned}$$

Jest $c(f) = 2\delta(f)$ (twierdzenie Gorensteina). Potrzebne informacje na temat na temat powyższych pojęć Czytelnik znajdzie w [P1] i [G-L-S].

**Twierdzenie 2.1** (Formuła Milnora, [Mi], [R])
*Zakładamy, że* $\mathrm{char}\mathbb{K} = 0$*. Wtedy dla każdego szeregu zredukowanego* $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$*:*

$$\mu(f) = 2\,\delta(f) - r(f) + 1 \ ,$$

*gdzie* $r(f)$ *jest liczbą czynników nierozkładalnych* $f$*.*

W charakterystyce skończonej formuła nie jest prawdziwa. Deligne w [D] udowodnił jednak

**Twierdzenie 2.2** (Twierdzenie Deligne'a [D], [MH-W])
*Dla każdego szeregu zredukowanego* $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$ *(*$\mathbb{K}$ *ciało dowolnej charakterystyki) zachodzi nierówność*

$$\mu(f) \geqslant 2\,\delta(f) - r(f) + 1 \ .$$

Ostatnio Greuel ze swoimi uczniami udowodnił

**Twierdzenie 2.3** ([B-G-M]) *Jeżeli* $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$ *jest osobliwością niezdegenerowaną w sensie Kouchnirenki, to*

$$\mu(f) = 2\,\delta(f) - r(f) + 1 \ .$$

Stosując lemat Teissiera (w dowolnej charakterystyce) i dobrze znane własności niezmienników $c(f)$, $\delta(f)$ (por. [P1]) można dowieść związku między lematem Teissiera i formułą Milnora.

**Twierdzenie 2.4** ([P3]) *Niech* $f$ *będzie szeregiem zredukowanym oraz* $f = f_1 \dots f_r$ *jego rozkładem na czynniki pierwsze. Załóżmy, że istnieje parametr regularny* $l$ *taki, że* $i_0(f_i, l) \not\equiv 0 \pmod p$ *dla* $i = 1, \dots, r$*. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(T) $i_0(f, P_l(f)) = \mu(f) + i_0(f, l) - 1,$

(M) $\mu(f) = 2\,\delta(f) - r(f) + 1.$

Z twierdzenia powyższego wynika łatwo formuła Milnora w charakterystyce 0. Innym łatwym wnioskiem jest

**Twierdzenie 2.5** ([Ng]) *Niech* $p = \mathrm{char}\mathbb{K} > 0$ *i załóżmy, że istnieje parametr regularny* $l$ *taki, że* $i_0(f, l) = \mathrm{ord}\, f$ *oraz* $i_0(f, P_l(f)) < p$*. Wtedy* $\mu(f) = 2\,\delta(f) - r(f) + 1$*.*

# 3 Liczba Milnora krzywych nierozkładalnych

Krzywą (lokalną) nierozkładalną nazywamy szereg nierozkładalny $f \in \mathbb{K}[[x, y]]$. Półgrupa stowarzyszona z $f$, to podpółgrupa $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}$ półgrupy addytywnej $\mathbb{N}$ złożona z liczb $i_0(f, g)$, gdzie $g \not\equiv 0 \pmod f$. Każda półgrupa $\Gamma(f)$ ma minimalny ciąg generatorów $\bar{\beta}_0, \dots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}}$ zdefiniowany następująco:

$\cdot\ \bar{\beta}_0 = \min \Gamma(f) \setminus \{0\}$,

$\cdot\cdot\ \bar{\beta}_k = \min \Gamma(f) \setminus (\mathbb{N}\bar{\beta}_0 + \ldots + \mathbb{N}\bar{\beta}_{k-1})$ dla $k = 1, \ldots, \mathbf{g}$

$\cdots\ \mathrm{NWP}(\bar{\beta}_0, \ldots, \bar{\beta}_{\mathbf{g}}) = 1$.

Wykład podstawowych własności półgrup stowarzyszonych z krzywymi nierozkładalnymi Czytelnik znajdzie w [GB-P] (por. także [G-L-S]).

Dla krzywej nierozkładalnej $f$ formuła Milnora przyjmuje postać $\mu(f) = 2\,\delta(f)$ lub równoważnie $\mu(f) = c(f)$. Nierówność Deligne'a stwierdza, że $\mu(f) \geqslant c(f)$ w dowolnej charakterystyce. W pracy [GB-P bis] autorzy sformułowali następującą hipotezę

**Hipoteza 3.1** *Niech $f$ będzie krzywą nierozkładalną, $\Gamma(f) = \mathbb{N}\bar{\beta}_0 + \ldots + \mathbb{N}\bar{\beta}_{\mathbf{g}}$ półgrupą stowarzyszoną z $f$. Niech $p = \mathrm{char}\mathbb{K}$. Wtedy następujące warunki są równoważne*

(i) $\bar{\beta}_k \not\equiv 0 \pmod{p}$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, \mathbf{g}$,

(ii) $\mu(f) = c(f)$.

Również w pracy [GB-P bis] udowodniono Hipotezę 3.1 przy dodatkowym założeniu $p > \mathrm{ord}\, f = \bar{\beta}_0$. W artykule [H-R-S] autorzy udowodnili implikację (i)$\Rightarrow$(ii) bez dodatkowych założeń.

# Literatura


[B-G-M] Boubakri, Y., Greuel, G-M., Markwig, T. *Invariants of hypersurface singularities in positive characteristic*, Rev. Mat. Complut. (2010) 25, 61–85

[CN-P] Cassou-Noguès, Pi., Płoski, A. *Invariants of plane curve singularities and Newton diagrams*, Univ. Iag. Acta Mathematica 49 (2011), 9–34

[D] Deligne, P. *La formule de Milnor*, SGA 7 II, Exposé XVI, LNM 340 (1973), 197–211

[G-L-S] Greuel, G-M., Lossen, C., Shustin, E. *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer, Berlin 2007.

[G-N] Greuel, G-M., Nguyen, H.D. *Some remarks on the planar Kouchnirenko's theorem*, Rev. Mat. Complut. (2012) 25, 557–579

[GB-P] García Barroso, E., Płoski, A. *An approach to plane algebroid branches*, Rev. Mat. Complut. (2015) 28, 227–252

[GB-P bis] García Barroso, E., Płoski, A. *The Milnor number of plane irreducible singularities in positive characteristic*, arXiv:150507075v1[math.AG] to appear in Bull. London Math. Soc.

[H-R-S] Hefez, A., Rodrigues, J. H. O., Salamão, R. *The Milnor number of a hypersurface singularity in arbitrary characteristic*, arXiv:1507.03179v1[math.AG] 12 Jul 2015

[Mi] Milnor, J. W. *Singular points of complex hypersurfaces*, Princeton University Press 1968.

[MH-W] Melle-Hernández, A., Wall, C.T.C. *Pencil of curves on smooth surfaces*, Proc. London Math. Soc., III Ser. 83 (2), 2001, 257–278

[Ng] Nguyen, H. D. *Invariants of plane singularities and Plücker formulas in positive characteristic*, arXiv:1412.5007v1[math.AG] 16 Dec 2014

[P1] Płoski, A. *Plane algebroid branches after R. Apéry*, Łódź 2014, 34-44 konfrogi.math.uni.lodz.pl

[P2] Płoski, A. *Introduction to the local theory of plane algebraic curves*. In: Analytic and Algebraic Geometry ed Krasiński, T., Spodzieja, St. Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź 2013

[P3] Płoski, A. *On the Milnor formula*, in preparation

[R] Risler, J. J. *Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane*, Bull. Soc. Math. Fr. 99 (4) (1971), 305–311

[T] Teissier, B. *Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney*, Astérisque, 7-8 (1973), 285–362

ON THE MILNOR NUMBER OF PLANE CURVE SINGULARITIES
IN FINITE CHARACTERISTIC

**Summary.** We survey recent results on the Milnor number of plane curve singularities in characteristic $p$.

Katedra Matematyki i Fizyki
Politechnika Świętokrzyska
Al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7
25-314 Kielce, Poland
e-mail: matap@tu.kielce.pl

*Łódź, 11 – 15 stycznia 2016 r.*