MATERIAŁY NA XXXIII KONFERENCJĘ I WARSZTATY
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ

2012 **Łódź** **str. 59**

O KRYTERIUM NIEROZKŁADALNOŚCI ABHYANKARA

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Niech $f(x,y)$ będzie formalnym szeregiem potęgowym dwóch zmiennych o współczynnikach zespolonych. Aby rozstrzygnąć czy f jest nierozkładalny można postępować na dwa sposoby: wyznaczyć (stosując metodę diagramu Newtona) rozwiązania Puiseux $y_1(x),\dots,y_n(x)$ równania $f(x,y)=0$, a następnie sprawdzić czy tworzą one cykl, bądź też stosując do krzywej $f(x,y)=0$ stosowną liczbę rozdmuchań sprawdzić, czy otrzymany obraz właściwy $\hat{f}=\hat{f}(\hat{x},\hat{y})$ definiuje krzywą nieosobliwą. Obie metody wymagają rozwiązywania równań stopnia >1 (przy wyznaczaniu współczynników rozwinięć Puiseux w pierwszej metodzie i równań stycznych do kolejnych krzywych otrzymywanych w procesie rozdmuchań w drugiej).

Czytelnik może porównać obie metody wykonując rachunki na przykładzie zaproponowanym przez T. C. Kuo: $f(x,y)=(y^2-x^3)^2-x^7$, który w dyskusji z S. S. Abhyankarem postawił problem znalezienia efektywnego kryterium nierozkładalności pozwalającego na rozstrzygnięcie w skończonej liczbie kroków, czy dany szereg jest nierozkładalny. Stosując teorię pierwiastków aproksymatywnych Abhyankar podał takie kryterium w pracy [A1988] (por. prace [A1988], [A1990], gdzie kryterium nierozkładalności przedstawione jest w przystępnej formie).

Celem tego opracowania jest podanie pewnej wersji kryterium Abhyankara udowodnionej ostatnio w pracy [GB-P2011]. Tam też zainteresowany Czytelnik znajdzie pominięte dowody i dość obszerną literaturę przedmiotu. W całej pracy $\mathbb{K}$ jest algebraicznie domkniętym ciałem dowolnej charakterystyki.

1 Preliminaria

Przypominamy tu kilka pojęć potrzebnych w dalszych częściach artykułu.

1.1 Półgrupy liczb naturalnych

Półgrupą liczb naturalnych (dalej krótko półgrupą) nazywamy podzbiór G zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$ zawierający 0 i zamknięty względem dodawania. Dla każdego ciągu liczb naturalnych $v_0, \ldots, v_h$ zbiór $\mathbb{N}v_0 + \cdots + \mathbb{N}v_h$ złożony z liczb postaci $a_0v_0 + \cdots + a_hv_h$, gdzie $a_0, \ldots, a_h \in \mathbb{N}$ jest półgrupą.

Niech G będzie niezerową półgrupą i niech $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ będzie ustalonym elementem G. Ciąg $v_0, \ldots, v_h$ elementów półgrupy G nazywamy *n-minimalnym ciągiem generatorów*, gdy spełnione są warunki:

- $\bullet$ $v_0 = n$,
- $\bullet\bullet$ $\mathbb{N}v_0 + \cdots + \mathbb{N}v_{k-1} \neq G$ i $v_k = \min(G \backslash (\mathbb{N}v_0 + \cdots + \mathbb{N}v_{k-1}))$ dla $k = 1, \ldots, h$,
- $\bullet\bullet\bullet$ $\mathbb{N}v_0 + \cdots + \mathbb{N}v_h = G$.

Lemat 1.1 *Niech G będzie niezerową półgrupą liczb naturalnych. Wtedy dla każdego $n \in G \backslash \{0\}$ półgrupa G ma n-minimalny ciąg generatorów.*

Dowód: Ustalmy $n \in G \backslash \{0\}$. Jeżeli $G = \mathbb{N}n$, to $v_0 = n$ jest n-minimalnym ciągiem generatorów. Jeżeli $G \neq \mathbb{N}n$, to przyjmujemy $v_0 = n$, $v_1 = \min(G \backslash \mathbb{N}v_0)$. Gdy $G = \mathbb{N}v_0 + \mathbb{N}v_1$, to (v_0, v_1) jest n-minimalnym ciągiem generatorów. Gdy $G \neq \mathbb{N}v_0 + \mathbb{N}v_1$, to postępowanie kontynuujemy przyjmując $v_2 = \min(G \backslash (\mathbb{N}v_0 + \mathbb{N}v_1))$. Po skończonej liczbie kroków otrzymamy n-minimalny ciąg generatorów, gdyż kolejne wyrazy ciągu $v_0, v_1, v_2, \ldots$ dają różne reszty przy dzieleniu przez n. $\square$

Gdy $n = \min G \backslash \{0\}$, to n-minimalny ciąg generatorów nazywamy *minimalnym ciągiem generatorów.* W dalszym ciągu, gdy $(v_0, \ldots, v_h)$ jest n-minimalnym ciągiem dla pewnego $n \in G \backslash \{0\}$ piszemy $G = \langle v_0, \ldots, v_h \rangle$. Oczywiście $\gcd G = \gcd(v_0, \ldots, v_h)$.

1.2 Rozwinięcie g-adyczne i pierwiastki aproksymatywne wielomianów

Niech A będzie dziedziną tzn. pierścieniem przemiennym z jedynką bez dzielników zera. Stopień $\deg_Y f$ wielomianu $f \in A[Y]$ jednej zmiennej Y oznaczamy krótko $\deg f$. Przyjmujemy $\deg 0 = -\infty$ ze zwykłymi konwencjami odnośnie symbolu $-\infty$. Do wielomianu pierścienia $A[Y]$ stosuje się dzielenie z resztą: jeśli $f, g \in A[Y]$ i g jest unitarny, tzn. postaci $Y^n + \cdots$ (jednomiany stopnia $< n$), to istnieje jedyna para $q, r \in A[Y]$ taka, że $f = qg + r$ i $\deg r < \deg g$. Stosując dzielenie wielomianów z resztą sprawdzamy następujący

Lemat 1.2 *Niech $g \in A[Y]$ będzie wielomianem unitarnym dodatniego stopnia. Wtedy dla każdego $f \in A[Y]$ istnieje jedyny ciąg $c_0, \ldots, c_l \in A[Y]$, $(l \geqslant 0)$ taki, że*

(i) $f = c_0 g^l + c_1 g^{l-1} + \cdots + c_l$,

(ii) $c_0 \neq 0$, $\deg c_i < \deg g$ *dla* $i = 0, 1, \ldots, l$.

Gdy stopień g dzieli stopień f i f jest unitarny, to $l = \deg f / \deg g$ *oraz* $c_0 = 1$.

Relację (i) nazywamy *rozwinięciem g-adycznym wielomianu f*. Rozwinięcia takie są użyteczne w badaniu pierwiastków aproksymatywnych wielomianów.

Definicja 1.3 Niech $f \in A[Y]$ będzie wielomianem unitarnym stopnia $n > 0$ i niech $d > 1$ będzie dzielnikiem n odwracalnym w dziedzinie A. *Pierwiastkiem aproksymatywnym stopnia d wielomianu f* nazywamy wielomian unitarny $g \in A[Y]$ taki, że $\deg(f - g^d) < \deg f - \deg g$.

Lemat 1.4 *Przy oznaczeniach i założeniach definicji 1.3 wielomian f ma dokładnie jeden pierwiastek aproksymatywny stopnia d. Wielomian unitarny g jest pierwiastkiem aproksymatywnym stopnia d wielomianu f wtedy i tylko wtedy, gdy rozwinięcie g-adyczne wielomianu f ma postać:*

$$f = g^l + c_2 g^{l-2} + \cdots + c_l, \quad \textit{gdzie} \ \ l = n/d.$$

Dowód powyższego lematu należący do Abhyankara i Moha Czytelnik znajdzie w [P1994].

W dalszym ciągu pierwiastek aproksymatywny stopnia d wielomianu f oznaczamy $\sqrt[d]{f}$. Przyjmujemy konwencję $\sqrt[1]{f} = f$.

1.3 Szeregi formalne dwóch zmiennych, krotność przecięcia

Pierścień szeregów formalnych dwóch zmiennych $\mathbb{K}[[x, y]]$ o współczynnikach w ciele $\mathbb{K}$ jest dziedziną z jednoznacznym rozkładem na czynniki nierozkładalne. Gdy szereg f jest wielomianem wyróżnionym (względem zmiennej y), tzn. gdy $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x) \in \mathbb{K}[[x]][y]$ oraz $a_1(0) = \ldots = a_n(0) = 0$, to f jest nierozkładalny w $\mathbb{K}[[x]][y]$ dokładnie wtedy, gdy jest nierozkładalny w $\mathbb{K}[[x, y]]$. Dla dowolnych $f, g \in \mathbb{K}[[x, y]]$ symbol $i_0(f, g)$ oznacza krotność przecięcia szeregów f, g (krzywych $f = 0$, $g = 0$). Krotność przecięcia ma następujące własności:

(a) $i_0(f, g) = 0$ gdy $f(0) \neq 0$ lub $g(0) \neq 0$,
$i_0(f, g) = +\infty$ gdy f, g mają wspólny podzielnik $h \in \mathbb{K}[[x, y]]$, $h(0) = 0$.

(b) $i_0(f, g_1 g_2) = i_0(f, g_1) + i_0(f, g_2)$,

(c) jeżeli f jest nierozkładalny, to $i_0(f, g_1 + g_2) \geqslant \inf\{i_0(f, g_1), i_0(f, g_2)\}$.
Równość zachodzi, gdy $i_0(f, g_1) \neq i_0(f, g_2)$.

Definicja krotności i dowody powyższych własności podane są w [P2007].

Niech $f \in \mathbb{K}[[x,y]]$ będzie nierozkładalnym szeregiem potęgowym. Definiujemy

$$G(f) = \{i_0(f,g) \colon g \in \mathbb{K}[[x,y]], f \text{ nie dzieli } g\}.$$

Zbiór $G(f) \subset \mathbb{N}$ jest niezerową półgrupą, $\min G(f) \backslash \{0\} = \operatorname{ord} f$ (=najmniejsza liczba naturalna m taka, że w rozwinięciu f występują jednomiany stopnia m). Równość $G(f) = \mathbb{N}$ charakteryzuje szeregi f takie, że $\operatorname{ord} f = 1$. Definiują one krzywe nieosobliwe.

Stosując twierdzenie przygotowawcze Weierstrassa możemy założyć, że $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ jest wielomianem wyróżnionym. Jest $n = i_0(f,x) \in G(f)$. Na mocy Lematu 1.1 półgrupa $G(f)$ ma n-minimalny układ generatorów, który oznaczamy $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}$. Będziemy pisać $G(f) = \langle \overline{b_o}, \ldots, \overline{b_n} \rangle$. Gdy $n \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{char} \mathbb{K}}$, to ciąg $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n}$ jest wyznaczony przez charakterystykę $b_0, \ldots, b_n$ wielomianu wyróżnionego f (por. [P1994]). Nie rozwijamy tego tematu, bo pojęciem charakterystyki nie będziemy się posługiwali.

2 Półgrupa szeregu nierozkładalnego

Półgrupy odpowiadające szeregom nierozkładalnym można scharakteryzować w terminach ich generatorów. Mamy następujące

Twierdzenie 2.1 *Niech $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ będzie nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym o półgrupie $G(f) = \langle \overline{b_o}, \ldots, \overline{b_h} \rangle$ i niech $e_0, \ldots, e_h$ będzie ciągiem dzielników liczby $\overline{b_0} = n$ określonym następująco:*

$$e_0 = n, e_k = \gcd(\overline{b_k}, e_{k-1}) \quad dla \quad k = 1, \ldots, h.$$

Wówczas spełnione są warunki

(Z1) $e_0 > e_1 > \ldots > e_{h-1} > e_h = 1$,

(Z2) ciąg $e_{k-1}\overline{b_k}$ $(k = 1, \ldots, h)$ *jest silnie rosnący.*

Warunki (Z1), (Z2) związane są z nazwiskiem O. Zariskiego. Dalej oznaczamy $n_k = e_{k-1}/e_k$ dla $k = 1, \ldots, h$. Jest więc $n_k > 1$ oraz $n_k\overline{b_k} < \overline{b_{k+1}}$. Dowód powyższego twierdzenia przy założeniu $n \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{char} \mathbb{K}}$ podany jest w [P1994], w przypadku ogólnym w [GB-P2011].

Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne:

Twierdzenie 2.2 *Załóżmy, że ciąg liczb naturalnych $(\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})$, $\overline{b_0} = n$ spełnia warunki (Z1) i (Z2). Wówczas istnieje nierozkładalny wielomian wyróżniony $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ stopnia n taki, że $G(f) = \langle \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n} \rangle$.*

Dowód twierdzenia Czytelnik znajdzie w [GB-P2011], w przypadku, gdy $n \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{char} \mathbb{K}}$ także w [P1994]. Tutaj podamy konstrukcję wielomianu wyróżnionego f. Niech $(\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n})$ będzie ciągiem spełniającym warunki (Z1) i (Z1) $(\overline{b_0} = n)$. Wówczas dla każdego $k \in \{1, \ldots, h\}$ istnieje jedyny ciąg $a_{k0}, a_{k1}, \ldots, a_{k,k-1}$ liczb naturalnych spełniający warunki

- $n_k \overline{b_k} = a_{k0}\overline{b_0} + a_{k1}\overline{b_1} + \cdots + a_{k,k-1}\overline{b_{k-1}}$
- $a_{k0} > 0,\ \ 0 \leqslant a_{ki} < n_i$ dla $i = 1, \ldots, k-1$

Zdefiniujemy teraz rekurencyjnie ciąg wielomianów $f_0, f_1, \ldots, f_n$ przyjmując $f_0 = y$,
$f_1 = y^{n_1} + x^{a_{10}} = f_0^{n_1} + x^{a_{10}}$
$f_2 = f_1^{n_2} + x^{a_{20}} f_1^{a_{21}}$
$\vdots$
$f_n = f_{n-1}^{n_n} + x^{a_{n0}} f_0^{a_{n1}} \cdots f_{n-2}^{a_{n,n-1}}$
Twierdzenie 2.2 wynika z następującego:

Twierdzenie 2.3 *Dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots, h\}$ f_k jest wielomianem wyróżnionym nierozkładalnym stopnia $\frac{n}{e_k}$. Jest*

$$G(f_k) = \left\langle \frac{\overline{b_0}}{e_k}, \ldots, \frac{\overline{b_k}}{e_k} \right\rangle \quad dla \quad k = 0, 1, \ldots, h.$$

Dowód powyższego twierdzenia podany jest w [GB-P2011].

Przykład 2.4 (por. [AB2006])
Rozważmy ciąg $(\overline{b_0}, \overline{b_1}, \overline{b_2}, \overline{b_3}) = (8, 12, 50, 101)$. Tutaj jest $(e_0, e_1, e_2, e_3) = (8, 4, 2, 1)$ i warunki (Z1) i (Z2) są spełnione. Mamy $(n_1, n_2, n_3) = (2, 2, 2)$. Łatwo obliczamy, że $a_{10} = 3$, $(a_{20}, a_{21}) = (11, 1)$, $(a_{30}, a_{31}, a_{32}) = (19, 0, 1)$, a zatem $f_0 = y$, $f_1 = y^2 + x^3$, $f_2 = (y^2 + x^3)^2 + x^{11}y$, $f_4 = ((y^2 + x^3)^2 + x^{11}y)^2 + x^{19}(y^2 + x^3)$. Na mocy Twierdzenia 2.3 są to nierozkładalne wielomiany wyróżnione, przy czym $G(f_0) = \mathbb{N}$, $G(f_1) = \langle 2, 3 \rangle$, $G(f_2) = \langle 4, 6, 25 \rangle$ oraz $G(f_4) = \langle 8, 12, 50, 101 \rangle$.

3 Twierdzenie Abhyankara-Moha

Niech $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ będzie nierozkładalnym wielomianem wyróżnionym o półgrupie $G(f) = \langle \overline{b_0}, \ldots, \overline{b_n} \rangle$, $\overline{b_0} = n$. W dalszym ciągu zakładamy, że $n \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{char} \mathbb{K}}$. Niech $e_0 = n, e_1, \ldots, e_n = 1$ będzie ciągiem dzielników liczby n określonym wzorem $e_k = \gcd(\overline{b_k}, e_{k-1})$ dla $k = 0, 1, \ldots, h$. Jest więc $e_k \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{char} \mathbb{K}}$ i pierwiastki aproksymatywne $\sqrt[e_k]{f}$, $k = 0, 1, \ldots, h$ są poprawnie określone. Wielomian $\sqrt[e_k]{f}$ jest wielomianem wyróżnionym stopnia $\frac{n}{e_k}$.

Twierdzenie 3.1 (Abhyankara-Moha) *Przy podanych wyżej oznaczeniach i założeniach:*

(AM1) $i_0(f, \sqrt[e_{k-1}]{f}) = \overline{b_k}$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, h$,

(AM2) Wielomian wyróżniony $\sqrt[e_{k-1}]{f}$ *jest nierozkładalny o półgrupie*

$G(\sqrt[e_{k-1}]{f}) = \left\langle \frac{\overline{b_0}}{e_{k-1}}, \ldots, \frac{\overline{b_{k-1}}}{e_{k-1}} \right\rangle$ *dla* $k = 0, 1, \ldots, h$.

W interesujących nas zastosowaniach pierwsza część twierdzenia odgrywa ważną rolę. Jej dowód można przeczytać w [P1994]. Pełny opis literatury przedmiotu podany jest [GB-P2011]. Zauważmy jeszcze, że pierwiastki aproksymatywne $\sqrt[e_{k-1}]{f}$ można wyznaczyć efektywnie mając dany wielomian f, podobnie krotności przecięcia $i_0(f, \sqrt[e_{k-1}]{f})$. Dlatego formuły (AM1) pozwalają efektywnie obliczyć ciąg n-minimalny generatorów półgrupy $G(f)$ dla danego nierozkładalnego f. Następujące twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z Twierdzenia 3.1.

Twierdzenie 3.2 (Konieczny warunek nierozkładalności) *Niech* $f = y^n + a_1(x)y^{n-1} + \cdots + a_n(x)$ *i niech* $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_h}$ *oraz* $e_0, \ldots, e_h$ *będą ciągami jednoznacznie określonymi przez warunki*

- $\overline{b_0} = e_0 = n$,
- $\overline{b_k} = i_0(f, \sqrt[e_{k-1}]{f})$, $e_k = \gcd(e_{k-1}, \overline{b_k})$.
- $e_0 > e_1 > \ldots > e_h = \gcd(e_h, \sqrt[e_h]{f})$.

Jeżeli wielomian f jest nierozkładalny, to ciągi $(\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_h})$ *oraz* $e_0, \ldots, e_h$ *spełniają warunki (Z1) i (Z2), tzn.* $e_h = 1$ *oraz* $(e_{k-1}\overline{b_k}, k = 1, \ldots, h)$ *jest ciągiem rosnącym.*

Przykład 3.3 (por. [A1988])
Rozważmy wielomian wyróżniony $f(x, y) = (y^2 - x^3)^2 + x^p y - x^7$, gdzie $p > 0$ jest liczbą całkowitą. Zakładamy, że $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. Mamy tutaj $\overline{b_0} = e_0 = 4$. Ponieważ $f = y^4 - 2x^3y^2 + x^p y + x^6 - x^7$, zatem $\sqrt[4]{f} = y$. Jest $\overline{b_1} = i_0(f, \sqrt[4]{f}) = i_0(f, y) = 6$ oraz $e_1 = \gcd(e_0, \overline{b_1}) = \gcd(4, 6) = 2$. Ze względu na postać rozwinięcia $(y^2 - x^3)$-adycznego wielomianu f mamy $\sqrt[e_1]{f} = \sqrt[2]{f} = y^2 - x^3$, a więc, jak pokazuje prosty rachunek $\overline{b_2} = i_0(f, \sqrt[e_1]{f}) = \min(2p + 3, 14)$. Aby obliczyć $e_2 = \gcd(e_1, \overline{b_2})$ rozróżniamy dwa przypadki: $p > 5$, wówczas $\overline{b_2} = 14$ i otrzymujemy $e_2 = \gcd(2, 14) = 2 = e_1$, a więc ciąg $\overline{b_0}, \overline{b_1}, \overline{b_2}$ nie spełnia warunku (Z1), stąd f jest rozkładalny; przypadek $p \leqslant 5$ prowadzi do ciągu $\overline{b_0} = 4$, $\overline{b_1} = 6$ oraz $\overline{b_2} = 2p + 3$, a więc jest wtedy $e_0 = 4$, $e_1 = 2$ i $e_2 = 1$. Warunek (Z1) jest w tym przypadku spełniony, ale dla $p < 5$, warunek (Z2) nie jest. Wnioskujemy stąd, że dla $p < 5$ szereg jest również rozkładalny. Podsumowując: stosując Twierdzenie 3.2 stwierdzamy, że dla dodatnich $p \neq 5$ szereg $f = (y^2 - x^3)^2 + x^p y - x^7$ jest rozkładalny w $\mathbb{K}[[x, y]]$ $(\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2)$.

4 Kryterium nierozkładalności

Aby przedstawić kryterium nierozkładalności Abhyankara w wersji podanej w [GB-P2011] potrzebujemy pewnego uogólnienia diagramu Newtona. Rozważmy dwa wielomiany wyróżnione $f, g \in \mathbb{K}[[x]][y]$ takie, że liczba $N = \frac{\deg f}{\deg g}$ jest całkowita i niech

$$f = g^N + a_1 g^{N-1} + \cdots + a_N, \quad \deg a_i < \deg g \quad \text{dla} \;\; i = 1, \ldots, N$$

będzie rozwinięciem g-adycznym wielomianu f (por. Lemat 1.2). Oznaczmy $a_0 = 1$ oraz $I = \{i \in [0, N] \colon i_0(a_i, g) \neq +\infty\}$. Definiujemy *diagram Newtona* $\Delta_{x,g}(f)$ *szeregu* f *względem pary* (x, g) przyjmując

$$\Delta_{x,g}(f) = \operatorname{convex} \bigcup_{i \in I} \{(i_0(a_i, g), N - i) + \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}\}$$

Zbiór wypukły $\Delta_{x,g}(f)$ przecina oś pionową w punkcie $(0, N)$, natomiast oś poziomą w punkcie $(i_0(f, g), 0)$ gdy $i_0(f, g) \neq +\infty$.

Gdy $g = y$, to $\Delta_{x,g}(f) = \Delta_{x,y}(f)$ jest zwykłym diagramem Newtona we współrzędnych (x, y).

Wygodne jest oznaczenie Teissiera: dla liczb całkowitych $k, l > 0$ przyjmujemy

$$\left\{ \frac{k}{l} \right\} = \operatorname{convex}\{((k, 0) + \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}) \cup ((0, l) + \mathbb{R}^2_{\geqslant 0})\}.$$

Możemy teraz wypowiedzieć

Twierdzenie 4.1 (Kryterium nierozkładalności Abhyankara)
Niech $f \in \mathbb{K}[[x]][y]$ będzie wielomianem wyróżnionym stopnia $n > 1$. Zakładamy, że $n \not\equiv 0 \pmod{\operatorname{char} \mathbb{K}}$. Wtedy f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\overline{b_0}, \ldots, \overline{b_h}$ ($\overline{b_0} = n$) spełniający warunki (Z1) i (Z2) taki, że

(A1) $\quad i_0(f, \sqrt[e_{k-1}]{f}) = \overline{b_k}$

oraz

(A2) $\quad \Delta_{x, \sqrt[e_{k-1}]{f}}(\sqrt[e_k]{f}) = \left\{ \frac{\overline{b_k}/e_k}{e_{k-1}/e_k} \right\}$

dla $k = 1, \ldots, h$.

Dowód powyższego twierdzenia podany jest w pracy [GB-P2011]. Oryginalne kryterium Abhyankara różni się sformułowaniem warunku (A2) (por. [A1990], str. 181-185).

Kryterium ma charakter efektywny: ciągi $\overline{b_k}, e_k$ są wyznaczone przez warunki (A1). Sprawdzenie warunku warunku (A2), chociaż mozolne, daje się przeprowadzić w skończonej liczbie kroków. Możemy teraz dokończyć Przykład 3.3.

Przykład 4.2 Gdy $f(x,y) = (y^2 - x^3)^2 + x^5y - x^7$, to $h = 2$ i $(\overline{b_0}, \overline{b_1}, \overline{b_2}) = (4,6,13)$, jak obliczyliśmy w poprzednim przykładzie. Ponieważ ciąg $(4,6,13)$ spełnia warunki (Z1) i (Z2), należy wyznaczyć diagramy $\Delta_{x,y}(y^2 - x^3)$ oraz $\Delta_{x,y^2-x^3}(f)$. Jest $\Delta_{x,y}(y^2 - x^3) = \left\{\dfrac{3}{2}\right\} = \left\{\dfrac{\overline{b_1}/e_1}{e_0/e_1}\right\}$ oraz $\Delta_{x,y^2-x^3}(f) = \left\{\dfrac{13}{2}\right\} = \left\{\dfrac{\overline{b_2}/e_2}{e_1/e_2}\right\}$. Zatem szereg f jest nierozkładalny oraz $G(f) = \langle 4,6,13\rangle$.

Pozostawiamy Czytelnikowi wykonanie obliczeń w przykładzie Kuo, o którym była mowa na wstępie.

Literatura

[A1988] S. S. Abhyankar. *What is the Difference between a Parabola and Hyperbola?* The Mathematical Intelligencer vol. 10, No. 4, 1988, pp. 36-43.

[A1989] S. S. Abhyankar. *Irreducibility Criterion for Germs of Analytic Functions of Two Complex Variables.* Advances in Mathematics vol. 74, No. 2, 1989, pp. 190-257.

[A1990] S. S. Abhyankar. *Algebraic Geometry for Scientists and Engineers.* Mathematcial Surveys and Monographs, No. 35, Providence, Rhode Island 1990.

[AB2006] A. Assi, M. Barile. *Effective construction of irreducible curve singularities.* Int. J. Math. Comp. Sci. 1 (2006), No. 1, 2006, pp. 125-149.

[GB-P2011] E. Garcia Barroso, A. Płoski. *An approach to plane algebroid branches.* Manuscript 2011.

[P1994] A. Płoski. *Twierdzenia podstawowe o pierwiastkach aproksymatywnych wielomianów.* Materiały XV Konferencji Szkoleniowej z Analizy i Geometrii Zespolonej, Łódź 1994, str. 51-61.

[P2007] A. Płoski. *Wstęp do lokalnej teorii krzywych algebraicznych.* Materiały na XXVIII Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2007, str. 21-40.

ON ABHYANKAR'S IRREDUCIBILITY CRITERION

Summary We present a simplified approach due to E. Garcia Barroso and the author to Abhyankar's irreducibility criterion for formal power series of two variables with coefficients in algebraically closed field.

Łódź, 9 – 13 stycznia 2012 r.