MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2008 **Łódź** **str. 41**

TWIERDZENIE O LOKALNEJ DUALNOŚCI NA KRZYWYCH ALGEBRAICZNYCH

Arkadiusz Płoski (Kielce)

"Lagrange est la haute pyramide des sciences mathématiques"
Napoléon Bonaparte

Celem tego artykułu jest dowód twierdzenia o lokalnej dualności w przypadku krzywych algebraicznych. Ze względu na lokalny charakter rozważań przedstawiamy to twierdzenie w ogólniejszym przypadku krzywych algebroidalnych. Zaproponowany tutaj dowód opiera się na klasycznej formule interpolacyjnej Lagrange'a. Dla zrozumienia artykułu wystarczy znajomość podstawowych własności lokalnych krzywych algebraicznych wyłożonych w artykule [4] oraz kilku pojęć algebry, które przypominamy niżej. Zainteresowany czytelnik znajdzie podstawowe informacje o teorii lokalnej dualności w geometrii analitycznej i o klasycznych pracach na ten temat w [3].

Rozważmy pierścień szeregów formalnych jednej zmiennej $\mathbb{C}[[t]]$ i jego ciało ułamków $\mathbb{C}((t))$. Każdy element ciała $\mathbb{C}((t))$ jest szeregiem Laurenta $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} c_\nu t^\nu$, w którym występuje skończona liczba wyrazów o ujemnym wykładniku. Gdy $R(t) = \sum c_\nu t^\nu \in \mathbb{C}((t))$ to przyjmujemy $\mathrm{ord}_0 R(t) = \inf\{\nu : c_\nu \neq 0\}$ oraz

$\mathrm{res}_0(R(t)\,\mathrm{d}t) = c_{-1}$. Zachodzą wzory:

- $\mathrm{res}_0\left(\frac{P'(t)}{P(t)}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{ord}_0 P(t)$ dla $P(t) \in \mathbb{C}[[t]]$,

•• $\mathrm{res}_0(R(\tau(u))\tau'(u)\,\mathrm{d}u) = (\,\mathrm{ord}_0\tau(u))\,\mathrm{res}_0(R(t)\,\mathrm{d}t)$
dla $\tau(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, $\tau(0) = 0$.

Więcej o residuach w ciałach szeregów formalnych Czytelnik znajdzie w książce Langa [2]. Wspomniane w tytule twierdzenie o lokalnej dualności jest nietrywialnym uogólnieniem następującego faktu:

Lokalna dualność na prostej
Niech $R(t) \in \mathbb{C}((t))$ *będzie szeregiem Laurenta. Wówczas* $R(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{res}_0(R(t)S(t)\,\mathrm{d}t) = 0$ *dla wszystkich* $S(t) \in \mathbb{C}[[t]]$.

W twierdzeniach o dualności podstawowe znaczenie ma pojęcie śladu. Przypomnijmy, że śladem macierzy kwadratowej nazywamy sumę elementów na głównej przekątnej tej macierzy. Śladem endomorfizmu przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej nazywamy ślad macierzy tego endomorfizmu w wybranej bazie. Pojęcie to nie zależy od wyboru bazy. Niech L będzie pierścieniem z wyróżnionym podpierścieniem $K \subset L$. Zakładamy, że K jest ciałem a L jest przestrzenią liniową skończenie wymiarową nad K. Dla każdego elementu $l \in L$ rozważmy endomorfizm liniowy $T_l : L \to L$ dany wzorem $T_l(l') = ll'$ dla $l' \in L$. Oznaczmy $\mathrm{Tr}_{L/K}(l)$= *ślad endomorfizmu* T_l. Zatem $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \to K$ jest K-liniową formą. Nazywamy ją śladem rozszerzenia L/K. Pojęcie to (a także pokrewne mu pojęcia wielomianu charakterystycznego i normy) jest wyłożone w większości podręczników współczesnej algebry. Często autorzy zakładają, że L jest ciałem, co jest założeniem zbyt restryktywnym dla naszych rozważań. Pełny wykład wspomnianych wyżej pojęć w potrzebnej dla nas ogólności Czytelnik znajdzie w monografii S. S. Abhyankara [1] w rozdziale poświęconym wyróżnikowi algebr.

1 Formuła interpolacyjna Lagrange'a i jej konsekwencje

Niech A będzie dziedziną tzn. pierścieniem przemiennym bez dzielników zera. Ustalmy wielomian $F(y) = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_n \in A[y]$ stopnia $n > 0$ i niech K będzie ciałem ułamków dziedziny A. Zakładamy, że wyróżnik $\Delta_F = \mathrm{disc}_y F(y)$ wielomianu F jest $\neq 0$. Niech $\bar{K}$ będzie rozszerzeniem ciała K, w którym wielomian $F(y)$ rozkłada się na czynniki liniowe: $F(y) = \prod_{i=1}^{n}(y - y_i)$ w $\bar{K}[y]$. Jest więc $y_i \neq y_j$ dla $i \neq j$ bo $\Delta_F = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(y_i - y_j)^2 \neq 0$. Zanotujmy, że $F'(y) = \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(y - y_j)$ oraz $\dfrac{F(y)}{y - y_i} = \prod_{j \neq i}(y - y_j)$.

Twierdzenie 1.1 (Formuła interpolacyjna Lagrange'a) *Niech $l_1, \ldots, l_n$ będzie dowolnym ciągiem elementów ciała $\bar{K}$. Wówczas istnieje dokładnie jeden wielomian $\Lambda(y) \in \bar{K}[y]$ stopnia $\leqslant n-1$ taki, że $\Lambda(y_i) = l_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Jest on dany formułą Lagrange'a*

$$\Lambda(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{F'(y_i)} \frac{F(y)}{y - y_i}.$$

Ponadto, dla każdego wielomianu $\Psi(y) \in A[y]$ stopnia $\leqslant n-1$ zachodzą wzory

(i) $\Psi(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi(y_i)}{F'(y_i)} \frac{F(y)}{y - y_i}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi(y_i)}{F'(y_i)} =$ *współczynnik przy jednomianie y^{n-1} wielomianu $\Psi(y)$.*

Łatwe sprawdzenie powyższego twierdzenia algebry klasycznej pozostawiamy Czytelnikowi. Rozważamy teraz pierścień

$$B = {}^{A[y]}\!/\!_{(F(y))}.$$

Czytelnik sprawdzi łatwo następujące własności:

(1.2) Wielomian $P(y) \in A[y]$ leży w ideale $(F(y))$ (lub równoważnie: obraz $P(y)$ w B poprzez homomorfizm kanoniczny jest $= 0$ w B) dokładnie wtedy, gdy $P(y_i) = 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.

(1.3) Obraz wielomianu $P(y)$ w B jest dzielnikiem zera w B dokładnie wtedy, gdy $P(y_i) = 0$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(1.4) Pierścień B jest wolnym A-modułem rangi n o bazie utworzonej przez obrazy jednomianów $1, y, \ldots, y^{n-1}$ w B.

(1.5) Pełny pierścień ułamków L pierścienia B jest n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

Przypomnijmy tutaj, że pełny pierścień ułamków dowolnego pierścienia konstruujemy analogicznie do ciała ułamków dziedziny, pamiętając, że w mianownikach ułamków dopuszczamy wyłącznie nie-dzielniki zera rozważanego pierścienia. W rozważanej przez nas sytuacji pierścień L konstruujemy następująco:
rozważamy pary $(H, G) \in A[y]^2$ takie, że $G(y_i) \neq 0$ dla $i = 1, \ldots, n$ i zapisujemy je w postaci $\frac{H}{G}$. Dwie pary $\frac{H}{G}$ oraz $\frac{H_1}{G_1}$ tej postaci utożsamiamy gdy $\frac{H(y_i)}{G(y_i)} = \frac{H_1(y_i)}{G_1(y_i)}$ dla $i = 1, \ldots, n$, co oznacza na podstawie (1.2), że $HG_1 \equiv H_1 G \,(\mathrm{mod} F)$.

Następująca, dobrze znana formuła opisuje ślad w terminach pierwiastków wielomianu $F(y)$:

(1.6) $$\mathrm{Tr}_{L/K}\left(\frac{H}{G}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{H(y_i)}{G(y_i)}$$

Zauważmy tutaj, że fakt iż suma po prawej stronie równości (1.6) jest elementem ciała K wynika również z twierdzenia o wielomianach symetrycznych.

Możemy teraz udowodnić "prototyp" twierdzenia o dwoistości.

Twierdzenie 1.7 *Niech $H(y) \in A[y]$ będzie ustalonym wielomianem. Przy wprowadzonych wyżej oznaczeniach i założeniach następujące dwa warunki są równoważne*

(α) $H(y) \in (F(y), G(y))A[y]$,

(β) dla każdego $\tilde{H}(y) \in A[y] : \mathrm{Tr}_{L/K}\left(\frac{H\tilde{H}}{GF'}\right) \in A$.

Dowód.
$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$. Wystarczy sprawdzić, że relacja $H(y) = \Phi(y)F(y) + \Psi(y)G(y)$ w $A[y]$ implikuje

$$\mathrm{Tr}_{L/K}\left(\frac{H}{GF'}\right) \in A.$$

Możemy założyć, że $\deg \Psi \leqslant n-1$ bo jeśli $H = \Phi F + \Psi G$ i $\tilde{\Psi}$ jest resztą z dzielenia Ψ przez F to $H = \tilde{\Phi}F + \tilde{\Psi}G$ oraz $\deg \tilde{\Psi} \leqslant n-1$. Załóżmy zatem, że $H = \Phi F + \Psi G$ oraz $\deg \Psi \leqslant n-1$. Wówczas otrzymujemy $H(y_i) = \Psi(y_i)G(y_i)$ dla $i = 1, \ldots, n$ a więc

$$\mathrm{Tr}_{L/K}\left(\frac{H}{GF'}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{H(y_i)}{G(y_i)F'(y_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi(y_i)G(y_i)}{G(y_i)F'(y_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Psi(y_i)}{F'(y_i)} =$$
$$= \textit{współczynnik przy jednomianie } y^{n-1} \textit{ wielomianu } \Psi(y) \in A[y].$$

$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$. Załóżmy, że $\mathrm{Tr}_{L/K}\left(\frac{H\tilde{H}}{GF'}\right) \in A$ dla wszystkich $\tilde{H} \in A[y]$.

Wówczas

$$\mathrm{Tr}_{L/K}\left(\frac{Hy^k}{GF'}\right) \in A \text{ dla } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Definiujemy wielomian $\Psi(y) \in \bar{K}[y]$ przyjmując

$$\Psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{H(y_i)}{G(y_i)F'(y_i)} \frac{F(y)}{y - y_i}. \tag{2}$$

Udowodnimy, że $\Psi(y) \in A[y]$. W tym celu oznaczmy $F_k(y) = y^k + a_1 y^{k-1} + \cdots + a_k$ dla $k = 1, \ldots, n$. Mamy zatem $F(y) - F(z) = (y - z)(z^{n-1} + F_1(y)z^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(y))$ w $A[y, z]$
a więc

$$\frac{F(y)}{y - y_i} = y_i^{n-1} + F_1(y)y_i^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(y).$$

Przyjmijmy dodatkowo $F_0(y) = 1$. Mamy

$$\Psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{H(y_i)}{G(y_i)F'(y_i)} \left(y_i^{n-1} + F_1(y)y_i^{n-2} + \cdots + F_{n-1}(y)\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{H(y_i)y_i^k}{G(y_i)F'(y_i)} \right) F_{n-k-1}(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{Tr}_{L/K} \left(\frac{Hy^k}{GF'} \right) F_{n-k-1}(y) \in A[y]$$

na mocy (1).

Wielomian $\Psi(y)$ jest oczywiście stopnia $\leqslant n-1$. Z formuły interpolacyjnej Lagrange'a wynika, że

$$\Psi(y_i) = \frac{H(y_i)}{G(y_i)} \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wielomian $H(y)-\Psi(y)G(y) \in A[y]$ zeruje się na pierwiastkach y_i $(i = 1, \ldots, n)$ wielomianu $F(y)$ a więc leży w ideale $(F(y))A[y]$. Stąd $H(y) = \Phi(y)F(y) + \Psi(y)G(y)$ w $A[y]$ co kończy dowód twierdzenia.

2 Pierwsza wersja twierdzenia o lokalnej dualności

Niech $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ będzie szeregiem zredukowanym tzn. bez czynników wielokrotnych, y-regularnym rzędu n tzn. takim, że $\mathrm{ord}_0 f(0, y) = n$. Rozważmy pierścień lokalny

$$\mathcal{O} = {}^{\mathbb{C}[[x, y]]}/_{(f(x, y))}$$

krzywej algebroidalnej $f(x, y) = 0$.

Niech $F = F(x, y)$ będzie wielomianem wyróżnionym Weierstrassa stowarzyszonym z szeregiem $f = f(x, y)$. Zatem $(f) = (F)$ i z twierdzenia przygotowawczego Weierstrassa w wersji dzieleniowej wynika, że

$$\mathcal{O} = {}^{\mathbb{C}[[x, y]]}/_{(F(x, y))}.$$

Ze względu na własności podane w §1 tego artykułu $\mathcal{O}$ jest wolnym $\mathbb{C}[[x]]$-modułem rangi n; obrazy jednomianów $1, y, \ldots, y^{n-1}$ tworzą bazę wolną tego modułu. Niech $\mathcal{M}$ będzie pełnym pierścieniem ułamków pierścienia $\mathcal{O}$. Zatem $\mathcal{M}$ jest n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem $K = \mathbb{C}((x))$ ułamków pierścienia $\mathbb{C}[[x]]$ i możemy rozważać ślad

$$\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}/K} : \mathcal{M} \to \mathbb{C}((x)).$$

Twierdzenie 2.1 (Pierwsza wersja twierdzenia o lokalnej dualności) *Niech $g = g(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ będzie szeregiem takim, że f i g są względnie pierwsze. Wtedy dla każdego szeregu $h = h(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ następujące dwa warunki są równoważne*

(α) $h(x, y) \in (f(x, y), g(x, y))\mathbb{C}[[x, y]]$,

(β) dla każdego $\tilde{h}(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$ mamy $\mathrm{Tr}\left(\frac{h\tilde{h}}{g\frac{\partial f}{\partial y}} \right) \in \mathbb{C}[[x]]$.

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek, gdy $f = F \in \mathbb{C}[[x]][y]$ jest wielomianem wyróżnionym stopnia n. Dla każdego szeregu $h \in \mathbb{C}[[x,y]]$ oznaczmy $h^* \in \mathbb{C}[[x]][y]$ resztę z dzielenia h przez $F = f$ w sensie twierdzenia o dzieleniu Weierstrassa. Łatwo sprawdzić, że

$$h^* \in (F, g^*)\mathbb{C}[[x]][y] \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } h \in (f,g)\mathbb{C}[[x,y]], \tag{3}$$

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{h}{gf'_y}\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{h^*}{g^*F'_y}\right). \tag{4}$$

Zatem w rozważanym przypadku Twierdzenie 2.1 redukuje się do Twierdzenia 1.7.

W przypadku ogólnym istnieje dzielnik jedynki $v \in \mathbb{C}[[x,y]]$ taki, że $F = vf$ jest wielomianem wyróżnionym. Ponieważ $\frac{h}{gf'_y} = \frac{vh}{gF'_y}$ w $\mathcal{M}$ zatem $\operatorname{Tr}\left(\frac{h}{gf'_y}\right) = \operatorname{Tr}\left(\frac{vh}{gF'_y}\right)$ i twierdzenie sprowadza się do przypadku już rozważanego.

3 Residua na krzywych algebroidalnych

Niech $f = f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$ będzie szeregiem zredukowanym wyznaczającym krzywą algebroidalną $f = 0$. Niech $\mathcal{M}_f$ będzie pełnym pierścieniem ułamków pierścienia $\mathbb{C}[[x,y]]/(f)$.
Elementy $\mathcal{M}_f$ nazywamy funkcjami meromorficznymi na krzywej $f = 0$. Przyjmujemy

$$\Omega_f = \frac{\mathcal{M}_f\,\mathrm{d}x + \mathcal{M}_f\,\mathrm{d}y}{f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y}.$$

Zatem Ω_f jest przestrzenią liniową 1-wymiarową nad $\mathcal{M}_f$. Obraz elementu $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \in \mathcal{M}_f\,\mathrm{d}x + \mathcal{M}_f\,\mathrm{d}y$ w Ω_f oznaczamy $\overline{P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y}$ (w dalszym ciągu upraszczamy niekiedy symbolikę oznaczając obraz $\overline{P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y}$ po prostu $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$).

Definicja 3.1 *Niech $f = f_1 \dots f_r$, $f_i \in \mathbb{C}[[x,y]]$ $(i = 1,\dots,r)$ będzie rozkładem na czynniki pierwsze szeregu zredukowanego f i niech $(x_i(t_i), y_i(t_i)) \in \mathbb{C}[[t_i]]^2$ będzie normalizacją gałęzi $f_i(x,y) = 0$. Wówczas*

$$\operatorname{res}_{f,0}\left(\overline{P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{r} \operatorname{res}_0\left[(P(x_i(t_i), y_i(t_i))\dot{x}_i(t_i) + Q(x_i(t_i), y_i(t_i))\dot{y}_i(t_i))\,\mathrm{d}t_i\right].$$

Łatwo zauważyć, że podana wyżej definicja residuum jest poprawna: nie zależy od wyboru normalizacji gałęzi krzywej.

Na krzywej algebroidalnej $f = 0$ wyróżniamy formę kanoniczną $\omega_f \in \Omega_f$. Określamy ją następująco: $\omega_f = -\frac{\mathrm{d}x}{f'_y}$ (gdy $f'_y \neq 0$) lub $\omega_f = +\frac{\mathrm{d}y}{f'_x}$ (gdy $f'_x \neq 0$). Definicja jest poprawna gdyż $\overline{f'_x\,\mathrm{d}x + f'_y\,\mathrm{d}y} = 0$ w Ω_f.

Każdy element Ω_f można zapisać jednoznacznie w postaci $\frac{h}{g}\omega_f$ gdzie $\frac{h}{g} \in \mathcal{M}_f$ jest funkcją meromorficzną wyznaczoną przez parę szeregów $h, g \in \mathbb{C}[[x, y]]$ taką, że szeregi f, g są względnie pierwsze.

Lemat 3.2 *Niech $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$ będzie szeregiem zredukowanym wyznaczającym krzywą algebroidalną $f = 0$ o gałęziach $f_i = 0$ ($i = 1, \dots, r$). Niech $z_i(t_i) = (x_i(t_i), y_i(t_i)) \in \mathbb{C}[[t_i]]^2$ będzie normalizacją gałęzi $f_i = 0$.*

Dla danego szeregu $g \in \mathbb{C}[[x, y]]$ takiego, że f, g nie mają wspólnego podzielnika szereg f i jakobian $J = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$ również są względnie pierwsze i zachodzi formuła

$$\mathrm{res}_{f,0} = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{res}_0 \left(\frac{h(z_i(t_i))}{g(z_i(t_i))} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i} g(z_i(t_i))}{J(z_i(t_i))} \right).$$

Dowód. Nie zmniejszając ogólności możemy założyć, że $f'_x \neq 0$ a więc $\omega_f = \frac{\mathrm{d}y}{f'_x}$. Stosując definicję residuum otrzymujemy

$$\mathrm{res}_f \left(\frac{h}{g}\omega_f \right) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{res}_0 \left(\frac{h(z_i(t_i))\dot{y}_i(t_i)}{g(z_i(t_i)) f'_x(z_i(t_i))} \,\mathrm{d}t_i \right). \tag{5}$$

Różniczkowanie względem parametru t_i daje:

$$\begin{aligned} f'_x(z_i(t_i))\dot{x}_i(t_i) + f'_y(z_i(t_i))\dot{y}_i(t_i) &= 0, \\ g'_x(z_i(t_i))\dot{x}_i(t_i) + g'_y(z_i(t_i))\dot{y}_i(t_i) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i} g(z_i(t_i)), \end{aligned} \tag{6}$$

a stąd stosując reguły Cramera otrzymujemy

$$\begin{aligned} J(z_i(t_i))\dot{y}_i(t_i) &= f'_x(z_i(t_i)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i} g(z_i(t_i)), \\ J(z_i(t_i))\dot{x}_i(t_i) &= -f'_y(z_i(t_i)) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_i} g(z_i(t_i)). \end{aligned} \tag{7}$$

Szeregi f i g nie mają wspólnego czynnika a więc $g(z_i(t_i)) \neq 0$ dla $i = 1, \dots, r$. Z warunków (7) i faktu, że f nie ma czynników wielokrotnych wynika, że $J(z_i(t_i)) \neq 0$ a więc f i J również nie mają wspólnego czynnika. Stosując pierwszą z formuł (7) oraz formułę (5) otrzymujemy drugą część lematu.

Stosując lemat 3.2 łatwo sprawdzamy podane niżej dwie własności.

Własność 3.3 *Niech $f_1, g_1, h_1 \in \mathbb{C}[[x_1, y_1]]$ będą szeregami otrzymanymi z szeregów $f, g, h \in \mathbb{C}[[x, y]]$ przez podstawienie $x = ax_1 + by_1$, $y = cx_1 + dy_1$ o wyznaczniku $D = ad - bc \neq 0$. Wtedy*

$$\mathrm{res}_{f_1,0} \left(\frac{h_1}{g_1}\omega_{f_1} \right) = D^{-1} \,\mathrm{res}_{f,0} \left(\frac{h}{g}\omega_f \right).$$

Własność 3.4 *Niech* $\mathrm{i}_0(f,g) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{ord}_0 g(z_i(t_i))$ *będzie krotnością przecięcia krzywych algebroidalnych* $\{f=0\}$ *oraz* $\{g=0\}$. *Wówczas*

(i) $$\mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{J}{g}\omega_f\right) = \mathrm{i}_0(f,g),$$

(ii) $$\mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{hJ}{g}\omega_f\right) = 0 \text{ dla } h \in \mathbb{C}[[x,y]] \text{ takich, że } h(0,0)=0.$$

Uwaga 3.5 Wszystkie definicje i twierdzenia podane wyżej przenoszą się na przypadek szeregów zbieżnych. Załóżmy, że szeregi $f(x,y)$ i $g(x,y)$ są zbieżne. Wówczas istnieje spójne otoczenie zera U płaszczyzny $\mathbb{C}^2$ takie, że układ równań $f(x,y)=0$, $g(x,y)=\epsilon$, $\epsilon \neq 0$ ma w U dokładnie $m = \mathrm{i}_0(f,g)$ rozwiązań $P_1^{(\epsilon)}, \ldots, P_m^{(\epsilon)}$ dla $|\epsilon|$ dostatecznie małych. Jest wtedy $J(P_i^{(\epsilon)}) \neq 0$ dla $i = 1,\ldots,m$ a formułę G. Biernata (Bull. de la Société des Sc. et des Lettres de Łódź 1989) można zapisać w postaci

$$\mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{h}{g}\omega_f\right) = \lim_{0\neq\epsilon\to 0}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{h(P_i^{(\epsilon)})}{J(P_i^{(\epsilon)})}\right).$$

4 Twierdzenie o dualności lokalnej

Niech $f = f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$ będzie szeregiem zredukowanym a $g = g(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$ szeregiem takim, że f, g są względnie pierwsze.

Twierdzenie 4.1 (Twierdzenie o lokalnej dualności) *Dla każdego szeregu* $h = h(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$ *następujące warunki są równoważne*

(α) $h(x,y) \in (f(x,y), g(x,y))\mathbb{C}[[x,y]]$,

(β) *dla każdego* $\tilde{h}(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]] :\ \mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{h\tilde{h}}{g}\omega_f\right) = 0.$

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na jego pierwszej wersji (Twierdzenie 2.1) oraz podanym niżej lemacie.

Lemat 4.2 *Zakładamy, że* $f \in \mathbb{C}[[x,y]]$ *jest szeregiem zredukowanym, y-regularnym i niech* Tr *będzie śladem rozszerzenia* $\mathbb{C}((x)) \to \mathcal{M}$. *Wtedy*

$$\mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{h}{g}\frac{\mathrm{d}x}{f'_y}\right) = \mathrm{res}_0\left(\mathrm{Tr}\left(\frac{h}{gf'_y}\right)\mathrm{d}x\right).$$

Dowód. Niech $F = F_1 \cdots F_r$ będzie rozkładem wielomianu wyróżnionego F stowarzyszonego z f na wielomiany wyróżnione nierozkładalne F_i stopnia n_i. Niech $(t_i^{n_i}, y_i(t_i))$ będzie normalizacją Puiseux krzywej $F_i = 0$. Oznaczmy $R(x,y) =$

$\dfrac{h(x,y)}{g(x,y)f'_y(x,y)}$ i $U(n_i)=\{\epsilon\in\mathbb{C}:\epsilon^{n_i}=1\}$. Stosując twierdzenie Puiseux otrzymujemy

$$F(x,y)=\prod_{i=1}^{r}\prod_{\epsilon_i\in U(n_i)}\left(y-y_i\left(\epsilon_i x^{\frac{1}{n_i}}\right)\right), \tag{8}$$

a stąd stosując formułę (1.6) dla śladu, mamy

$$(\operatorname{Tr}R)(x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\epsilon_i\in U(n_i)}R\left(x,y_i\left(\epsilon_i x^{\frac{1}{n_i}}\right)\right). \tag{9}$$

Podstawienie $x=t^N$, $N=n_1\cdots,n_r$ daje:

$$(\operatorname{Tr}R)(t^N)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\epsilon_i\in U(n_i)}R\left(t^N,y_i\left(\epsilon_i t^{\frac{N}{n_i}}\right)\right). \tag{10}$$

Stosując do $\operatorname{res}_0((\operatorname{Tr}R)(x)\,\mathrm{d}x)$ podstawienie $x=t^N$ i korzystając z (10) otrzymujemy:

$$\operatorname{res}_0((\operatorname{Tr}R)(x)\,\mathrm{d}x)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\epsilon_i\in U(n_i)}\operatorname{res}_0\left(R\left(t^N,y_i\left(\epsilon_i t^{\frac{N}{n_i}}\right)\right)t^{N-1}\,\mathrm{d}t\right). \tag{11}$$

Para $(t_i^{n_i},y_i(\epsilon_i t_i))$, $\epsilon_i\in U(n_i)$ jest normalizacją krzywej $F_i=0$. Na mocy definicji residuum

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{f,0}(R(x,y)\,\mathrm{d}x)&=\sum_{i=1}^{r}\operatorname{res}_0\left(R\left(t_i^{n_i},y_i(t_i)\right)n_i t_i^{n_i-1}\,\mathrm{d}t_i\right)=\\ &=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\epsilon_i\in U(n_i)}\operatorname{res}_0\left(R\left(t_i^{n_i},y_i(\epsilon_i t_i)\right)t_i^{n_i-1}\,\mathrm{d}t_i\right)=\\ &=\sum_{i=1}^{r}\sum_{\epsilon_i\in U(n_i)}\operatorname{res}_0\left(R\left(t^N,y_i\left(\epsilon_i t^{\frac{N}{n_i}}\right)\right)t^{N-1}\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned} \tag{12}$$

przy czym ostatnią formułę otrzymujemy przez podstawienie $t_i=t^{\frac{N}{n_i}}$.

Porównując (11) i (12) otrzymujemy równość

$$\operatorname{res}_{f,0}(R(x,y)\,\mathrm{d}x)=\operatorname{res}_0((\operatorname{Tr}R)(x)\,\mathrm{d}x),$$

co dowodzi lematu.

Dowód twierdzenia o lokalnej dwoistości.

Na mocy własności 3.3 możemy założyć, że f jest szeregiem y-regularnym. Możemy więc stosować udowodniony wyżej lemat. Załóżmy najpierw, że $h\in$

$(f,g)\mathbb{C}[[x,y]]$. Zatem na podstawie pierwszej wersji twierdzenia o lokalnej dwoistości $\mathrm{Tr}\left(\frac{h}{gf'_y}\right) \in \mathbb{C}[[x]]$ a więc $\mathrm{res}_0\left(\mathrm{Tr}\left(\frac{h}{gf'_y}\right)(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$ i na mocy udowodnionego lematu $\mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{h}{g}\frac{\mathrm{d}x}{f'_y}\right) = 0$. To dowodzi implikacji $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$.

Dla dowodu implikacji przeciwnej załóżmy, że $\mathrm{res}_{f,0}\left(\frac{h\tilde{h}}{gf'_y}\,\mathrm{d}x\right) = 0$ dla wszystkich $\tilde{h} \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Wnioskujemy stąd, że $\mathrm{res}_0\left(\mathrm{Tr}\left(\frac{h\tilde{h}}{gf'_y}\right)\mathrm{d}x\right) = 0$ dla $\tilde{h} \in \mathbb{C}[[x,y]]$ a więc także $\mathrm{res}_0\left(x^q\mathrm{Tr}\left(\frac{h\tilde{h}}{gf'_y}\right)\mathrm{d}x\right) = 0$ dla $q = 0,1,2,\ldots$ oraz dowolnego $\tilde{h} = \tilde{h}(x,y)$. Stosując twierdzenie o dualności na prostej wnioskujemy stąd, że $\mathrm{Tr}\left(\frac{h\tilde{h}}{gf'_y}\right) \in \mathbb{C}[[x]]$ dla $\tilde{h} \in \mathbb{C}[[x,y]]$. Na mocy pierwszej wersji twierdzenia o lokalnej dwoistości otrzymujemy stąd, że $h \in \mathbb{C}[[x,y]]$. To dowodzi implikacji $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$.

Wniosek 4.3 *Jeżeli J jest jakobianem względnie pierwszych szeregów f, g to*

(i) $J \notin (f,g)\mathbb{C}[[x,y]]$,

(ii) $hJ \in (f,g)\mathbb{C}[[x,y]]$ *jeśli* $h(0,0) = 0$.

Dowód. Stosując twierdzenie Bertiniego (por. [5]) możemy ograniczyć się do przypadku gdy f jest zredukowany. Własności *(i)* oraz *(ii)* otrzymujemy stosując twierdzenie o lokalnej dualności i własności 3.4.

Literatura

[1] **Abhyankar, S. S.**, *Ramification theoretic methods in algebraic geometry,* Annals of Mathematics Studies, Number 43, Princeton University Press 1959.

[2] **Lang, S.**, *Introduction to algebraic and abelian functions,* Addison-Wesley Publishing Company, INC. 1972.

[3] **Płoski, A.**, *O residuach form meromorficznych,* Materiały XI Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych, Łódź 1990, str. 6-18.

[4] ———, *Wstęp do lokalnej teorii krzywych algebraicznych,* Materiały na XXVIII Konferencję Szkoleniową z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2007, str. 21-40.

[5] ———, *On special values for pencils of plane curve singularities,* Univ. Iag. Acta Mathematica, Fasc XLII, 2004, pp. 7-13.

LOCAL DUALITY THEOREM ON PLANE ALGEBRAIC CURVES

Summary. Let $\omega_f = {}^{\mathrm{d}x}\!\big/\!\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ be the canonical form associated with the algebroid curve $f = 0$ given by a reduced formal power series $f = f(x, y) \in \mathbb{C}[[x, y]]$. Using the classical Lagrange interpolation formula we check the following version of the local duality theorem:
a formal power series $h = h(x, y)$ *is in the ideal* $(f, g)\mathbb{C}[[x, y]]$ *generated by coprime formal power series* f *and* g *if and only if* $\operatorname{res}_{f,0}\left(\frac{h\tilde{h}}{g}\omega_f\right) = 0$ *for every* $\tilde{h} \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.