**MATERIAŁY XXV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ**

**2004** **Łódź** **str. 19**

# O KONTAKCIE MAKSYMALNYM

Arkadiusz Płoski (Kielce)

## Wstęp

Teoria kontaktu maksymalnego Hironaki stanowi podstawę techniki rozwiązywania osobliwości i teorii punktów nieskończenie bliskich [H]. Szczegółowe przedstawienie teorii w przypadku krzywych Czytelnik znajdzie w książce Brieskorna i Knörera [BK] lub w artykule Teissiera [T]. Celem tego wykładu jest dowód twierdzenia Hironaki o stabilności kontaktu maksymalnego w oparciu o pracę [GB-P]. Zamiast techniki diagramu Newtona (por. [H], [BK] i [T]) stosujemy efektywną formułę dla wykładnika kontaktu (Twierdzenie 2.2). Unikamy powtarzania rzeczy, które już były szczegółowo omawiane na konferencjach szkoleniowych z analizy i geometrii zespolonej odsyłając Czytelnika do artykułów [Ł] i [K]. Stosujemy standardowe oznaczenia. Powierzchnią zespoloną nazywamy spójną rozmaitość holomorficzną zespolonego wymiaru 2. Kiełki krzywych analitycznych oznaczamy małymi literami greckimi. Krotność przecięcia kiełków $\gamma, \delta$ w punkcie $0 \in M$ powierzchni $M$ oznaczamy $(\gamma, \delta)_0$. Krotność kiełka $\gamma$ oznaczamy $m(\gamma)$. Kiełki krzywych gładkich mają krotność 1. Nierozkładalne kiełki krzywych nazywamy również gałęziami. Stosujemy zwykłe konwencje dotyczące symbolu $+\infty$, w szczególności przyjmujemy, że $\inf \emptyset = +\infty$.

# 1 Rząd styczności

Niech $\gamma, \delta, \ldots$ będą gałęziami w punkcie $0 \in M$ zespolonej powierzchni $M$. Definiujemy $\mathrm{d}(\gamma,\delta) = \frac{(\gamma,\delta)_0}{m(\gamma)m(\delta)}$ i liczbę $\mathrm{d}(\gamma,\delta)$ nazywamy rzędem styczności gałęzi $\gamma, \delta$.

**Twierdzenie 1.1** *Dla dowolnych gałęzi $\gamma, \delta, \xi, \ldots$*

(i) $1 \leq \mathrm{d}(\gamma,\delta) \leq +\infty$ *przy czym $d(\gamma,\delta) = 1$ dokładnie wtedy, gdy $\gamma, \delta$ są transwersalne,* $\mathrm{d}(\gamma,\delta) = +\infty$ *gdy $\gamma = \delta$,*

(ii) $\mathrm{d}(\gamma,\delta) = \mathrm{d}(\delta,\gamma)$,

(iii) $\mathrm{d}(\gamma,\delta) \geq \inf\{\mathrm{d}(\gamma,\xi), \mathrm{d}(\delta,\xi)\}$ *przy czym dla* $\mathrm{d}(\gamma,\xi) \neq \mathrm{d}(\delta,\xi)$ *zachodzi równość.*

*Dowód:* Własności (i) wynikają z dobrze znanych własności krotności, własność (ii) jest banalna. Własność (iii) jest udowodniona w [Ch-P].

**Uwaga 1.** Niech $\gamma, \delta$ będą kiełkami krzywych w $0 \in S$. Obierzmy układ współrzędnych $(x, y)$ i niech $f(x, y) = 0$ i odpowiednio $g(x, y) = 0$ będą holomorficznymi równaniami lokalnymi kiełków $\gamma, \delta$. Mówimy, że $\gamma$ i $\delta$ są transwersalne gdy układ równań jednorodnych $\mathrm{in}\, f(x, y) = 0$, $\mathrm{in}\, g(x, y) = 0$ utworzonych przez formy wiodące ma jedyne rozwiązanie $x = y = 0$. Określenie powyższe nie zależy od wyboru układu współrzędnych.

**Uwaga 2.** Gdy $\gamma, \delta$ są kiełkami krzywych gładkich to $\mathrm{d}(\gamma,\delta) =$ rząd styczności $\gamma, \delta$ w sensie definicji podanej w [Ł, str. 43].

Definicję rzędu styczności rozszerzamy na przypadek gdy $\gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \gamma_i$ jest kiełkiem o $r > 1$ składowych nierozkładalnych przyjmując $\mathrm{d}(\gamma,\delta) = \inf\{\mathrm{d}(\gamma_i,\delta) : i = 1, \ldots, r\}$. Stosując własność (iii) rzędu styczności sprawdzamy łatwo

**Lemat 1.2** *Jeżeli $r > 1$ to* $\mathrm{d}(\gamma,\delta) \leq \inf_{i \neq j} \mathrm{d}(\gamma_i,\gamma_j)$. *Jest zawsze* $\mathrm{d}(\gamma,\delta) \geq 1$. *Gdy $\gamma$ ma $t > 1$ stycznych, to* $\mathrm{d}(\gamma,\delta) = 1$.

# 2 Wykładnik styczności

Dla każdego kiełka krzywej $\gamma$ definiujemy *wykładnik styczności*

$$\mathrm{d}(\gamma) = \sup\{\mathrm{d}(\gamma,\lambda) : \lambda \text{ jest kiełkiem krzywej gładkiej}\}.$$

Wprost z określenia wynika, że $1 \leq \mathrm{d}(\gamma) \leq +\infty$. Jeżeli kiełek $\gamma$ ma więcej niż jedną styczną, to $\mathrm{d}(\gamma) = 1$. Jeżeli kiełek $\gamma$ jest gładki, to $\mathrm{d}(\gamma) = +\infty$. Mówimy, że kiełek gładki $\lambda$ ma *kontakt maksymalny* z kiełkiem $\gamma$, gdy $\mathrm{d}(\lambda,\gamma) = \mathrm{d}(\gamma)$. Istnienie takich kiełków dla dowolnego kiełka $\gamma$ nie jest oczywiste. Zajmiemy sią najpierw przypadkiem, gdy $\gamma$ jest gałęzią.

**Twierdzenie 2.1** *Niech $\gamma$ będzie gałęzią. Wtedy istnieje kiełek gładki $\lambda_0$ taki, że* $\mathrm{d}(\lambda_0, \gamma) = \mathrm{d}(\gamma)$. *Jeżeli $\lambda$ jest kiełkiem gładkim, to* $\mathrm{d}(\lambda, \gamma) \neq \mathrm{d}(\gamma)$ *dokładnie wtedy, gdy* $\mathrm{d}(\lambda, \gamma) \in \mathbb{N}$.

*Dowód.* Jeżeli $\gamma$ jest kiełkiem gładkim to przyjmujemy $\lambda_0 = \gamma$ i twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $\gamma$ jest gałęzią osobliwą krotności $m(\gamma) = m$. Istnieje układ współrzędnych $x, y$ oraz parametryzacja injektywna gałęzi $\gamma$ postaci $t \to (t^m, y(t))$ gdzie $y(t) = ct^n + \ldots$, $c \neq 0$, $m < n$ oraz $n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$, por. [Ł, str. 42]. Niech $\lambda_0$ będzie gałęzią gładką o równaniu $y = 0$. Zatem $(\gamma, \lambda_0)_0 = \mathrm{ord}\, y(t) = n$ a więc $\mathrm{d}(\gamma, \lambda_0) = \frac{n}{m}$. Niech teraz $\lambda$ będzie dowolną gałęzią gładką o równaniu $l(x, y) = 0$. Stosując twierdzenie o funkcjach uwikłanych możemy przyjąć, że $l(x, y) = x - \phi(y)$ lub $l(x, y) = y - \psi(x)$ gdzie $\phi, \psi$ są analityczne w $0 \in \mathbb{C}$ oraz $\phi(0) = \psi(0) = 0$. W pierwszym przypadku $(\gamma, \lambda)_0 = \mathrm{ord}\,(t^m - \phi(y(t))) = m$ bo $\mathrm{ord}\,(\phi(y(t)) \geq n > m$. W drugim przypadku $(\gamma, \lambda)_0 = \mathrm{ord}\,(y(t) - \psi(t^m)) = \inf\{n, m \mathrm{ord}\, \psi\}$ bo $n$ nie jest wielokrotnością $m$. Jeżeli więc $(\gamma, \lambda)_0 \neq n$ (co równoważne jest stwierdzeniu, że $(\gamma, \lambda)_0 < n$ i $\mathrm{d}(\gamma, \lambda) < \mathrm{d}(\gamma, \lambda_0)$) to $(\gamma, \lambda)_0$ jest wielokrotnością $m = m(\gamma)$ a więc $\mathrm{d}(\gamma, \lambda) \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie podane niżej jest szczególnym przypadkiem ogólnego rezultatu otrzymanego ostatnio przez Ewelię Garcia Barroso i autora w pracy [GB-P]:

**Twierdzenie 2.2** *Niech $\gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \gamma_i$ będzie kiełkiem krzywej o $r > 1$ gałęziach. Wtedy*

(i) $\mathrm{d}(\gamma) = \inf\{\inf_i \mathrm{d}(\gamma_i), \inf_{i \neq j} \mathrm{d}(\gamma_i, \gamma_j)\}$,

(ii) *istnieje wskaźnik $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ taki, że jeżeli gałąź gładka $\lambda$ ma kontakt maksymalny z gałęzią $\gamma_{i_0}$ to ma kontakt maksymalny z kiełkiem $\gamma$.*

*Dowód.* Oznaczmy $\mathrm{d}^*(\gamma) = \inf\{\inf_i \mathrm{d}(\gamma_i), \inf_{i \neq j} \mathrm{d}(\gamma_i, \gamma_j)\}$. Nierówność $\mathrm{d}(\gamma) \leq \mathrm{d}^*(\gamma)$ wynika z lematu 1.2 oraz z definicji wykładnika styczności. Dla dowodu twierdzenia wystarczy wskazać wskaźnik $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ taki, że jeżeli $\lambda$ jest gałęzią gładką taką, że $\mathrm{d}(\gamma_{i_0}, \lambda) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0})$, to $\mathrm{d}(\gamma, \lambda) = \mathrm{d}^*(\gamma)$.
Przypadek 1: $\inf_i \mathrm{d}(\gamma_i) \leq \inf_{i \neq j} \mathrm{d}(\gamma_i, \gamma_j)$.

Niech $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ będzie wskaźnikiem takim, że $\inf_i \mathrm{d}(\gamma_i) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0})$. Zatem $\mathrm{d}^*(\gamma) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0})$. Niech $\lambda$ będzie gałęzią gładką taką, że $\mathrm{d}(\gamma_{i_0}) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0}, \lambda)$. Na mocy definicji

$$\mathrm{d}(\gamma, \lambda) = \inf\{\mathrm{d}(\gamma_{i_0}, \lambda), \inf_{i \neq i_0} \mathrm{d}(\gamma_i, \lambda)\}. \tag{1}$$

Wystarczy sprawdzić, że

$$\mathrm{d}(\gamma_{i_0}, \lambda) \leq \mathrm{d}(\gamma_i, \lambda)\, \mathrm{dla}\, i = 1, \ldots, r \tag{2}$$

bo wtedy na mocy (1): $\mathrm{d}(\gamma, \lambda) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0}, \lambda) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0}) = \mathrm{d}^*(\gamma)$. Przypuśćmy dla dowodu niewprost, że warunek (2) nie jest spełniony. Istnieje więc wskaźnik $i_1 \in \{1, \ldots, r\}$ taki, że

$$\mathrm{d}(\gamma_{i_1}, \lambda) < \mathrm{d}(\gamma_{i_0}, \lambda) = \mathrm{d}(\gamma_{i_0}). \tag{3}$$

Stosując własność (iii) rzędu styczności do kiełków $\gamma_{i_0}, \gamma_{i_1}, \lambda$ otrzymujemy

$$\mathrm{d}\,(\gamma_{i_1}, \lambda) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_1}, \gamma_{i_0}) \geq \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}). \tag{4}$$

bo w rozważanym przypadku $\mathrm{d}\,(\gamma_i, \gamma_j) \geq \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0})$ dla dowolnych $i, j$. Relacje (3) i (4) są sprzeczne a wię warunek (2) jest spełniony.
Przypadek 2: $\inf_{i \neq j} \mathrm{d}\,(\gamma_i, \gamma_j) < \inf_i \mathrm{d}\,(\gamma_i)$.

Niech $i_0, j_0$ będą wskaźnikami dla których $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) = \inf_{i \neq j} \mathrm{d}\,(\gamma_i, \gamma_j)$. Jest więc $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) = \mathrm{d}^*(\gamma)$. Niech $\lambda$ będzie gałęzią gładką taką, że $\mathrm{d}\,(\gamma_0, \lambda) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0})$. Z założenia wynika, że w rozważanym przypadku $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) < \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \lambda)$ a zatem $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) = \mathrm{d}\,(\gamma_{j_0}, \lambda)$ i z definicji $\mathrm{d}\,(\gamma, \lambda)$ otrzymujemy

$$\mathrm{d}\,(\gamma, \lambda) = \inf\{\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \lambda), \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}), \inf_{i \neq i_0, j_0} \mathrm{d}\,(\gamma_i, \lambda)\}. \tag{5}$$

Wystarczy sprawdzić, że

$$\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) \leq \mathrm{d}\,(\gamma_i, \lambda)\}\ \mathrm{dla}\ i \neq i_0, j_0. \tag{6}$$

Rzeczywiście z (5) i (6) wynika, że $\mathrm{d}\,(\gamma, \lambda) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) = \mathrm{d}^*(\gamma)$. Ustalmy $i \neq i_0, j_0$. Aby sprawdzić (6) zauważmy najpierw, że jeśli $\mathrm{d}\,(\gamma_i, \lambda) \geq \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \lambda)$ to warunek ten jest oczywiście spełniony. Gdy $\mathrm{d}\,(\gamma_i, \lambda) < \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \lambda) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0})$ to $\mathrm{d}\,(\gamma_i, \lambda) = \mathrm{d}\,(\gamma_i, \gamma_{i_0}) \geq \inf_{i \neq j} \mathrm{d}\,(\gamma_i, \gamma_j) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0})$ i warunek (6) jest spełniony.

Przykład. Niech $\gamma$ będzie kiełkiem o równaniu lokalnym $(x^{m_1} + y^{n_1})(x^{m_2} + y^{n_2}) = 0$ gdzie $1 < m_1 < n_1$ oraz $1 < m_2 < n_2$ oraz pary $m_1, n_1$ i $m_2, n_2$ są względnie pierwsze. Wtedy $\mathrm{d}\,(\gamma) = \inf\{\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}\}$ bo $\mathrm{d}\,(\gamma_1) = \frac{n_1}{m_1}$, $\mathrm{d}\,(\gamma_2) = \frac{n_2}{m_2}$ oraz $\mathrm{d}\,(\gamma_1, \gamma_2) = \inf\{\frac{n_1}{m_1}, \frac{n_2}{m_2}\}$.

# 3 Wykładnik styczności, kontakt maksymalny i rozdmuchania.

Niech $\pi : \tilde{M} \to M$ będzie rozdmuchaniem powierzchni $M$ w punkcie $0 \in M$ i niech $E$ będzie dywizorem wyjątkowym rozdmuchania. Każdemu kiełkowi krzywej $\gamma$ w punkcie 0 odpowiada przeciwobraz właściwy $\tilde{\gamma}$: jest to skończony zbiór kiełków $\tilde{\gamma}_1, \ldots, \tilde{\gamma}_t$ w punktach $\tilde{o}_1, \ldots, \tilde{o}_t$ dywizora wyjątkowego $E$. Liczba $t$ kiełków jest równa liczbie stycznych do kiełka $\gamma$. Przypomnijmy, że gdy $\gamma$ jest kiełkiem nierozkładalnym, to $\gamma$ ma dokładnie jedną styczną. Przeciwobraz właściwy ma następujące własności:

(i) jeżeli $(E, \tilde{\gamma}_i)$ jest krotnością przecięcia kiełków $(E, \tilde{o}_i)$ oraz $\tilde{\gamma}_i$ to $\sum_{i=1}^{t}(E, \tilde{\gamma}_i) = m(\gamma)$,

(ii) $m_{\tilde{o}_i}(\tilde{\gamma}_i) \leq m_0(\gamma)$ dla $i = 1, \ldots, t$. Równość zachodzi dla pewnego wskaźnika $i \in \{1, \ldots, t\}$ dokładnie wtedy, gdy kiełek $\gamma$ ma jedną styczną i jego przeciwobraz właściwy $\tilde{\gamma}$ przecina się transwersalnie z dywizorem wyjątkowym $E$.

(iii) jeżeli $\gamma$ jest nierozkładalny to $\tilde{\gamma}$ również. Obrazy właściwe składowych nierozkładalnych kiełka $\gamma$ są składowymi kiełków $\tilde{\gamma}$. Każda składowa $\tilde{\gamma}$ jest obrazem właściwym składowej $\gamma$.

Przypomnijmy jeszcze

**Twierdzenie Noethera.** *Jeżeli* $\gamma, \delta$ *są kiełkami w* $0 \in M$ *to* $(\gamma, \delta)_0 = m(\gamma)m(\delta) + (\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ *gdzie* $(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ *jest sumą krotności przecięcia kiełków* $\tilde{\gamma}_i$ *i* $\tilde{\delta}_i$ *rozciągniętą na punkty dywizora wyjątkowego* $E$ *odpowiadające wspólnym stycznym* $\gamma$ *i* $\delta$*.*

Z twierdzenia Noethera otrzymujemy

**Lemat 3.1** *Jeżeli* $\gamma$ *i* $\delta$ *są gałęziami w* $0 \in M$ *o wspólnej stycznej i* $m(\gamma) = m(\tilde{\gamma})$, $m(\delta) = m(\tilde{\delta})$ *to* $\mathrm{d}\,(\gamma, \delta) = \mathrm{d}\,(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}) + 1$

Możemy teraz udowodnić

**Twierdzenie 3.2 (Hironaki).** *Niech* $\pi : \tilde{M} \to M$ *będzie rozdmuchaniem w punkcie* $0 \in M$ *powierzchni* $M$ *i niech* $\gamma$ *będzie kiełkiem krzywej o jednej stycznej w punkcie* $0 \in M$*. Wtedy*

(i) $\mathrm{d}\,(\gamma) < 2$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $m(\tilde{\gamma}) < m(\gamma)$,

(ii) *jeżeli* $\mathrm{d}\,(\gamma) \geq 2$ *to* $\mathrm{d}\,(\gamma) = \mathrm{d}\,(\tilde{\gamma}) + 1$,

(iii) *jeżeli* $\mathrm{d}\,(\gamma) \geq 2$ *i* $\lambda$ *jest kiełkiem gładkim, to* $\mathrm{d}\,(\gamma, \lambda) = \mathrm{d}\,(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}) + 1$.

*Dowód.*

(i) Najpierw rozważmy przypadek, gdy $\gamma$ jest gałęzią osobliwą o krotności $m = m(\gamma)$. Tak jak w dowodzie twierdzenia 2.1 istnieje układ współrzędnych $x, y$ oraz parametryzacja injektywna gałęzi $\gamma$ postaci $t \to (t^m, y(t))$ gdzie $y(t) = ct^n + \ldots$, $c \neq 0$, $m < n$ oraz $n \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, m)$. Jest $\mathrm{d}\,(\gamma) = \frac{n}{m}$ a więc warunek $\mathrm{d}\,(\gamma) < 2$ zachodzi dokładnie wtedy, gdy $n - m < n$. Z drugiej strony gałąź $\tilde{\gamma}$ ma w stosownej mapie parametryzację $t \to (t^m, \tilde{y}(t))$ gdzie $\tilde{y}(t) = y(t)/t^m$ a więc $m(\tilde{\gamma}) = \min(m, n - m)$. Zatem $m(\tilde{\gamma}) < m(\gamma)$ dokładnie wtedy, gdy $n - m < m$. Załóżmy, że $\gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \gamma_i$ ma $r > 1$ gałęzi. Ponieważ $m(\gamma) - m(\tilde{\gamma}) = \sum_{i=1}^{r}(m(\gamma_i) - m(\tilde{\gamma}_i))$ oraz (na mocy rozważanego już przypadku) $m(\tilde{\gamma}_i) < m(\gamma_i)$ dokładnie wtedy, gdy $\mathrm{d}\,(\gamma_i) < 2$ wystarczy udowodnić, że nierówność $\mathrm{d}\,(\gamma) < 2$ ma miejsce, gdy $\mathrm{d}\,(\gamma_i) < 2$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, r\}$. Załóżmy, że $\mathrm{d}\,(\gamma) < 2$. Jeżeli $\mathrm{d}\,(\gamma) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0})$ pewnego $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$ to oczywiście $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}) < 2$. Przypuśćmy, że $\mathrm{d}\,(\gamma) \neq \mathrm{d}\,(\gamma_i)$ dla $i = 1, \ldots, r$. Wówczas $\mathrm{d}\,(\gamma) = \mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0})$ dla pewnych $i_0 \neq j_0$, na mocy twierdzenia 2.2. Musi być $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}) < 2$ lub $\mathrm{d}\,(\gamma_{j_0}) < 2$ bo w przeciwnym wypadku mielibyśmy $m(\gamma_{i_0}) = m(\tilde{\gamma}_{i_0})$ oraz $m(\gamma_{j_0}) = m(\tilde{\gamma}_{j_0})$ co implikuje na mocy twierdzenia Noethera $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) = \mathrm{d}\,(\tilde{\gamma}_{i_0}, \tilde{\gamma}_{j_0}) + 1$ a stąd $\mathrm{d}\,(\tilde{\gamma}_{i_0}, \tilde{\gamma}_{j_0}) < 1$ bo $\mathrm{d}\,(\gamma_{i_0}, \gamma_{j_0}) = \mathrm{d}\,(\gamma) < 2$. Sprzeczność, bo rząd styczności dwóch gałęzi jest zawsze $\geq 1$. Z drugiej strony, jeśli $\mathrm{d}\,(\gamma_i) < 2$ dla pewnego $i \in \{1, \ldots, r\}$ to $\mathrm{d}\,(\gamma) \leq \inf\{\mathrm{d}\,(\gamma_i)\}) < 2$.

(ii) Niech $\gamma$ będzie gałęzią osobliwą taką, $d(\gamma) \geq 2$. Na mocy twierdzenia 2.1 istnieje gałąź gładka $\lambda$ taka, że $\mathrm{d}(\gamma) = \mathrm{d}(\gamma, \lambda)$. Warunek $d(\gamma) \geq 2$ implikuje $m(\gamma) = m(\tilde{\gamma})$ a więc na mocy lematu 3.1, $\mathrm{d}(\gamma, \lambda) = \mathrm{d}(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}) + 1$. Ponieważ $\lambda$ ma kontakt maksymalny z $\gamma$ więc $\mathrm{d}(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}) = \mathrm{d}(\tilde{\lambda}) \notin \mathbb{N}$ a stąd $\mathrm{d}(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}) \notin \mathbb{N}$ a więc $\mathrm{d}(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}) = \mathrm{d}(\tilde{\gamma})$. Skorzystaliśmy tutaj z drugiej części twierdzenia 2.1. Rozważmy teraz przypadek kiełka $\gamma = \bigcup_{i=1}^{r} \gamma_i$ o $r > 1$ gałęziach. Ponieważ $\mathrm{d}(\gamma) \geq 2$ zatem $\mathrm{d}(\gamma_i) \geq 2$ ponieważ $\mathrm{d}(\gamma) = \inf\{\mathrm{d}(\gamma_i)\}$. Jest więc $m(\gamma_i) = m(\tilde{\gamma_i})$ oraz $\mathrm{d}(\gamma_i) = \mathrm{d}(\tilde{\gamma_i}) + 1$. Stosując lemat 3.1 otrzymujemy $\mathrm{d}(\gamma_i, \gamma_j) = \mathrm{d}(\tilde{\gamma_i}, \tilde{\gamma_j}) + 1$. Dla zakończenia dowodu stosujemy formułę z twierdzenia 2.2.

(iii) Jeżeli $\mathrm{d}(\gamma) \geq 2$ to na mocy (i) jest $m(\tilde{\gamma}) = m(\gamma)$ a więc formuła $\mathrm{d}(\gamma, \lambda) = \mathrm{d}(\tilde{\gamma}, \tilde{\lambda}) + 1$ wynika z lematu 3.1.

**Wniosek 3.3** *Niech $\gamma$ będzie kiełkiem krzywej takim, że $\mathrm{d}(\gamma) \geq 2$. Jeżeli gałąź gładka $\lambda$ ma kontakt maksymalny z kiełkiem $\gamma$ to jej przeciwobraz właściwy $\tilde{\lambda}$ ma kontakt maksymalny z kiełkiem $\tilde{\gamma}$*

Oznaczmy symbolem $[t]$ część całkowitą liczby rzeczywistej $t$.

**Wniosek 3.4** *Niech $\gamma$ będzie kiełkiem krzywej w punkcie $0$ powierzchni $M$. Wówczas $[\mathrm{d}(\gamma)] =$ liczba rozdmuchań niezbędnych do zmniejszenia krotności $m(\gamma)$.*

# Literatura


[BK] **E. Brieskorn, H. Knörer**, *Ebene Algebraische Kurven*, Birkhäuser Boston, 1981.

[Ch-P] **J. Chądzyński, A. Płoski**, *An inequality for intersection multiplicity of analytic curves*, Bull. Pol Acad. Sci. Math. 36 (1988), no. 3–4, 113–117.

[GB-P] **E. Garcia Barroso, A. Płoski**, *On the contact exponent of plane curve singularities*, IMUJ PREPRINT 2003/15 Kraków.

[H] **H. Hironaka**, *Introduction to the theory of infinitely near singular points*, Memorias de Matematico del Instituto "Jorge Juan" 28, Madrid 1974.

[K] **T. Krasiński**, *Rozdmuchania a punkty bifurkacyjne I. Twierdzenie Zariskiego o equisingularności*, Materiały XVI Konferencji Szkoleniowej z Analizy i Geometrii Zespolonej. Wyd. UŁ, Łódź 1995, 21–41.

[Ł] **S. Łojasiewicz**, *Desyngularyzacja geometryczna krzywej w rozmaitości*, Materiały X Konferencji Szkoleniowej z Teorii Zagadnień Ekstremalnych. Wyd. UŁ, Łódź 1989, 31–64.

[T] **B. Teissier**, *Introduction to curve singularities*, Singularity Theory. Editors D. T. Lê, K. Saito, B. Teissier, World Scientific, 1991.

## ON THE MAXIMAL CONTACT

**Summary.** We give a new proof of the stability of maximal contact. Our main tool is an explicit formula for the contact exponent.

*Łódź, 5 – 9 stycznia 2004 r.*