MATERIAŁY XXIV KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2003 **Łódź** **str. 33**

À PROPOS WYKŁADNIKA ŁOJASIEWICZA W NIESKOŃCZONOŚCI

Arkadiusz Płoski (Kielce)

Przypomnijmy, że wykładnikiem Łojasiewicza w nieskończoności $\mathcal{L}_\infty(f)$ wielomianu $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ nazywamy największą liczbę rzeczywistą θ, dla której zachodzi nierówność

$$|\mathrm{grad}\, f(z)| \geq c|z|^\theta \text{ dla } |z| \to +\infty \; .$$

Każdy wielomian $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ dodatniego stopnia wyznacza pęk krzywych rzutowych $(C^t, t \in \mathbf{C})$, gdzie C^t jest domknięciem rzutowym krzywej afinicznej $f(X,Y) - t = 0$. Zbiór $\Lambda(f)$ liczb $t \in \mathbf{C}$, dla których liczby Milnora krzywych C^t obliczone w punktach prostej w nieskończoności $\mathbf{L}_\infty$ doznają skoku, nazywamy zbiorem wartości krytycznych w nieskończoności wielomianu f. Gdy $\Lambda(f) \neq \emptyset$, to mówimy, że wielomian f ma wartości krytyczne w nieskończoności. Ostatnio J. Gwoździewicz i St. Spodzieja udowodnili fakt następujący.

Twierdzenie ([GS], Theorem 5.1). *Jeżeli wielomian $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ stopnia $d > 2$ ma wartości krytyczne w nieskończoności, to $\mathcal{L}_\infty(f) \leq -1 - 1/(d-2)$.*

Celem tej noty jest udowodnienie powyższego rezultatu w oparciu o własności ilorazów polarnych przedstawione w artykule [P].

Przypomnijmy, że symbolem $q(C, L)$ oznaczamy maksymalny iloraz polarny zredukowanej krzywej rzutowej C względem prostej $L \not\subset C$ (por. [P], str. 14).

Lemat 1. *Niech C będzie krzywą rzutową stopnia $d > 2$. Jeżeli $q(C, L) > d$ oraz $q(C, L) = b/a$, gdzie a, b są względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, to $a \leq d - 2$.*

Dowód. Jest $q(C, L) = \mathrm{ord}_\gamma C/\mathrm{ord}_\gamma L$ dla pewej gałęzi γ krzywej polarnej $\nabla_p C$. Niech o będzie centrum γ. Z twierdzenia Bezouta mamy $\mathrm{ord}_\gamma C \leq (C, \nabla_p C)_o \leq d(d-1)$ bo krzywa polarna ma stopień $d-1$. Ponieważ a, b są względnie pierwsze, więc $b \leq \mathrm{ord}_\gamma C \leq d(d-1)$. Z drugiej strony $b/a > d$, więc $ad < b \leq d(d-1)$, co daje $a < d - 1$ i w konsekwencji $a \leq d - 2$.

Lemat 2. Jeżeli $a \neq 0, b, c$ są liczbami całkowitymi takimi, że $b/a \neq c$, to $|c - b/a| \geq 1/|a|$.

Lemat 2 jest oczywisty. Możemy teraz podać

Dowód twierdzenia. Jest $\mathcal{L}_\infty(f) = d - 1 - q(C^{t_0}, K_\infty)$ dla pewnego $t_0 \in \mathbf{C}$ ([P], Twierdzenie 3). Z drugiej strony z założenia, że f ma wartości krytyczne w nieskończoności wynika, że $\mathcal{L}_\infty(f) < -1$ ([P], Wniosek 1 na str. 18). Stąd otrzymujemy oszacowanie $q(C^{t_0}, \mathbf{L}_\infty) > d$. Stosując Lemat 1 widzimy, że maksymalny iloraz polarny $q(C^{t_0}, \mathbf{L}_\infty)$ a wraz z nim wykładnik $\mathcal{L}_\infty(f) = d - 1 - q(C^{t_0}, \mathbf{L}_\infty)$ jest ułamkiem postaci b/a, gdzie $0 < a \leq d - 2$ dla pewnych liczb całkowitych a, b. Stosujemy Lemat 2 do a, b i $c = -1$.

Spis literatury

[GS] J. Gwoździewicz, St. Spodzieja, *Łojasiewicz gradient inequality in a neighbourhood of the fiber*, Łódź, Preprint 2002/18.

[P] A. Płoski, *O osobliwościach w nieskończoności pęku krzywych afinicznych*, Materiały XXII Konferencji Szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź 2001, str. 13–20.

APROPOS OF THE ŁOJASIEWICZ EXPONENT AT INFINITY

Summary. We use polar quotients to prove the following result due to Gwoździewicz and Spodzieja: if f is a polynomial of two complex variables with critical points at infinity then the Łojasiewicz exponent $\mathcal{L}_\infty(f) = \sup\{\theta : |\mathrm{grad}\, f(z)| \geq c|z|^\theta$ for $|z| \to +\infty\}$ is less than or equal to $-1 - 1/(\deg f - 2)$.

Łódź, 6 – 10 stycznia 2003 r.