MATERIAŁY XXI KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2000 **Łódź** **str. 7**

WIELOMIANY O JEDNEJ WARTOŚCI KRYTYCZNEJ W NIESKOŃCZONOŚCI

J. Gwoździewicz, A. Płoski (Kielce)

Wstęp

Będziemy rozważali wielomiany dwóch zmiennych $f = f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ nie posiadające na płaszczyźnie zespolonej punktów krytycznych to znaczy takie, że układ równań $\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{\partial f}{\partial Y} = 0$ nie ma rozwiązań w $\mathbb{C}^2$.

Najprostszych przykładów takich wielomianów dostarczają automorfizmy wielomianowe płaszczyzny $\mathbb{C}^2$; składowe takiego automorfizmu nie mają punktów krytycznych gdyż jakobian automorfizmu jest stałą różną od zera. Wielomian $f(X,Y) = Y(XY-1)$ pojawiający się w wielu pracach jest najprostszym przykładem wielomianu bez punktów krytycznych który nie jest składową automorfizmu wielomianowego (bo jest rozkładalny). Znacznie trudniej podać przykład wielomianu bez punktów krytycznych o nierozkładalnych włóknach $f^{-1}(t)$ $(t \in \mathbb{C})$ który nie byłby składową automorfizmu. Słynny jest tu przykład Briancona z 1985 roku: wielomian $f(X,Y) = Y^2(1+XY)^4+3Y(1+XY)^3+(3-8/3Y)(1+XY)^2-4(1+XY)+X+1$ ma wszystkie trzy wymagane własności. Nie wiemy czy istnieją przykłady tego typu stopnia niższego niż 10.

Wartości krytyczne w nieskończoności

Przypomnimy tu dobrze znaną konstrukcję pochodzącą od Broughtona. Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem stopnia $d > 0$. Dla każdego $t \in \mathbb{C}$ rozważmy krzywą rzutową C_t: $F(X,Y,Z) - tZ^d = 0$ gdzie forma jednorodna F jest ujednorodnieniem wielomianu f. Krzywa ta przecina prostą w nieskończoności w skończonym zbiorze punktów $(C_t)_\infty = C_\infty$ niezależnym od t. Dla każdego $p \in C_\infty$ rozważmy $\mu_p^t =$ liczba Milnora C_t w punkcie p. Przyjmijmy $\mu_p^{\mathrm{gen}} = \inf\{\, \mu_p^t : t \in \mathbb{C}\,\}$. Dowodzi się, że zbiór $\Lambda(f) = \{\, t \in \mathbb{C} : \mu_p^t > \mu_p^{\mathrm{gen}}$ dla pewnego $p \in C_\infty, \}$ jest skończony. Nazywamy go zbiorem wartości krytycznych w nieskończoności wielomianu f.

Ponadto oznaczamy $\lambda_p^t = \mu_p^t - \mu_p^{\mathrm{gen}}$, $\lambda^t(f) = \sum_{p \in C_\infty} \lambda_p^t$, $\lambda(f) = \sum_{t \in \mathbb{C}} \lambda^t(f)$. Obie sumy są skończone.

Dowody następujących dwóch faktów Czytelnik znajdzie w rozprawie Krasińskiego [Kr]:

Twierdzenie 1. *Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych. Wówczas $\Lambda(f)$ jest najmniejszym skończonym zbiorem Λ takim, że odwzorowanie $\mathbb{C}^2 \setminus f^{-1}(\Lambda) \to \mathbb{C} \setminus \Lambda$ indukowane przez f jest $\mathcal{C}^\infty$–wiązką lokalnie trywialną.*

Twierdzenie 2. *Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych. Wówczas f jest składową automorfizmu wielomianowego dokładnie wtedy, gdy $\Lambda(f) = \emptyset$.*

Z ostatniego twierdzenia wynika, że słynną hipotezę jakobianową można sformułować w następujący sposób:

(JC). *Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych. takim, że $\Lambda(f) \neq \emptyset$. Wtedy dla każdego wielomianu $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ jakobian $J(f,g)$ nie jest niezerową stałą.*

W tej właśnie formie próbowali udowodnić hipotezę jakobianową Lê Dũng Trang i Weber [LW].

Dalej obok stopnia d wielomianu f rozważamy także liczbę c punktów w nieskończoności krzywej $f = 0$. Zatem $c = \#C_\infty$. Następujące oszacowanie należy do Le Van Thana i Oki [LO]:

Twierdzenie 3. *Jeżeli $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ jest wielomianem stopnia $d > 0$ o c punktach w nieskończoności, to $\#\Lambda(f) \leq d - c$.*

Alternatywny dowód twierdzenia 3 Czytelnik znajdzie w [GP2].

Wielomiany o jednej wartości krytycznej w nieskończoności

Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych. Wówczas dla każdego $t \in \mathbb{C}$ składowe nierozkładalne włókna $f^{-1}(t)$ są nieosobliwe i parami rozłączne.

Podanie niżej twierdzenie dostarcza charakteryzacji wielomianów o dokladnie jednej wartości krytycznej w nieskończoności.

Twierdzenie 1. *(J.G. i A.P. 1999) Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych. Ustalmy $t_0 \in \mathbb{C}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(i) $\Lambda(f) = \{t_0\}$,

(ii) Włókno $f^{-1}(t_0)$ jest krzywą afiniczną rozkładalną. Wszystkie składowe tego włókna są krzywymi wymiernymi a co najmniej jedna składowa jest izomorficzna z prostą. Gdy dokładnie jedna składowa jest izomorficzna z prostą to pozostałe mają po dwie gałęzie w nieskończoności. Gdy więcej niż jedna składowa jest izomorficzna z prostą to istnieje dokładnie jedna składowa Γ która nie jest izomorficzna z prostą. Wtedy: liczba gałęzi w nieskończoności Γ = liczba składowych włókna $f^{-1}(t_0)$.

Dowód twierdzenia podamy dalej. Teraz odnotujmy:

Wniosek 1. *(Assi 1996) Jeżeli $\Lambda(f) = \{t_0\}$ to włókno $f^{-1}(t_0)$ jest rozkładalne oraz przynajmniej jedna składowa $f^{-1}(t_0)$ jest izomorficzna z prostą.*

Przykłady.

1. Niech $f(X, Y) = YP(XY)$ gdzie $P(T)$ jest wielomianem jednej zmiennej T o pierwiastkach pojedyńczych i niezerowych. Łatwo sprawdzić, że f nie ma punktów krytycznych. Włókno $f^{-1}(0)$ składa się z prostej $\{Y = 0\}$ oraz prostych wymiernych $\{XY - t = 0\}$ $(P(t) = 0)$ o dwóch gałęziach w nieskończoności. Zatem $\Lambda(f) = \{0\}$ na podstawie twierdzenia.

2. Niech $f(X, Y) = Q(X)^2Y + Q(X)$ gdzie $Q(X)$ jest wielomianem o pierwiastkach pojedynczych stopnia $q > 0$. Podobnie jak poprzednio wielomian f nie ma punktów krytycznych. Włókno $f^{-1}(0)$ składa się z q prostych $\{X = x\}$, $Q(x) = 0$ oraz z krzywej wymiernej $\{Q(X)Y + 1 = 0\}$ o $q + 1$ gałęziach w nieskończoności. Możemy więc stwierdzić na podstawie twierdzenia, że $\Lambda(f) = \{0\}$.

3. Rozważmy wielomian $f(X, Y) = Y((XY - 1)^2 + X^2Y)$. Można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że f nie ma punktów krytycznych. Włókno $f^{-1}(0)$ rozpada się na prostą $\{Y = 0\}$ oraz krzywą stopnia czwartego $\{(XY - 1)^2 + X^2Y = 0\}$. Krzywa ta jest nierozkładalna i ma 3 gałęzie w nieskończoności. Zatem $\Lambda(f) \neq \{0\}$. Można sprawdzić, że $\Lambda(f) = \{0, 1\}$.

Wielomiany f ze skończoną liczbą Milnora $\mu(f)$, stopnia ≤ 4 mają co najwyżej jedną wartość krytyczną w nieskończoności. Zatem ostatni przykład jest optymalny (wielomian stopnia 5 o 2 wartościach krytycznych w nieskończoności).

Rozważmy teraz wielomian f stopnia $d > 0$ i niech f_d będzie formą wiodącą tego wielomianu. Liczba c parami różnych czynników liniowych formy f_d jest liczbą punktów w nieskończoności wielomianu f. Dobrze wiadomo, że jeśli f jest składową automorfizmu wielomianowego, to f ma dokładnie jeden punkt w nieskończoności. Stosując twierdzenie 1 udowodnimy

Twierdzenie 2. *Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych o jednej wartości krytycznej w nieskończoności. Jeżeli f jest stopnia d i ma c punktów* *w nieskończonosci, to*

$$c \leq \left[\frac{d+1}{2}\right].$$

Dowód. Ponieważ f ma wartość krytyczną w nieskończoności to $d \geq 3$. Możemy przyjąć bez zmniejszania ogólności, że $\Lambda(f) = \{0\}$. Niech $f^{-1}(0) = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_k$ będzie rozkładem włókna $f^{-1}(0)$ na komponenty nierozkładalne Γ_i. Mamy następującą

Własność. *Niech $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ będzie krzywą afiniczną stopnia d o c punktach w nieskończoności i niech r_∞ będzie liczbą gałęzi w nieskończoności tej krzywej. Wtedy*

$$c \leq r_\infty \leq d.$$

Jeżeli $c = d$ to domknięcie rzutowe krzywej Γ przecina transwersalnie prostą w nieskończoności (w każdym punkcie z krotnością 1) i wtedy Γ nie ma osobliwości w nieskończoności.

Rozważmy dwa przypadki

Przypadek 1. Dokładnie jedna składowa $f^{-1}(0)$ jest izomorficzna z prostą. Niech to będzie składowa Γ_1, zatem pozostałe $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ mają po dwie gałęzie w nieskończoności. Oznaczmy Γ_∞ zbiór punktów w nieskończoności krzywej afinicznej Γ. Krzywe Γ_1, Γ_i $(i = 2, \ldots, k)$ są rozłączne więc $(\Gamma_1)_\infty \subset (\Gamma_i)_\infty$. Ponieważ Γ_1 jest izomoficzna z $\mathbb{C}$ więc $(\Gamma_1)_\infty = \{p_1\}$ i możemy napisać $(\Gamma_i)_\infty = \{p_1, p_i\}$ dla $i = 2, \ldots, k$ bo Γ_i ma jako krzywa o dwóch gałęziach w nieskończoności ma co najwyżej dwa punkty w nieskończoności. Może być $p_1 = p_i$ dla pewnych $i > 1$. Mamy teraz $(f^{-1}(0))_\infty = (\Gamma_1)_\infty \cup \cdots \cup (\Gamma_k)_\infty \subset \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ a więc $\#(f^{-1}(0))_\infty \leq k$.

Z drugiej strony $d = \deg f^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{k} \deg \Gamma_i \geq 1 + 2(k-1) = 2k - 1$ gdyż Γ_i $(i = 2, \ldots, k)$ jako krzywe o dwóch gałęziach w nieskończoności są stopnia co najmniej 2. Mamy więc $k \leq \frac{d+1}{2}$.

Przypadek 2. Więcej niż jedna składowa $(f^{-1}(0)$ jest izomorficzna z prostą. Na mocy twierdzenia 2 możemy przyjąć, że $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k-1}$ są izomorficzne z prostą zaś Γ_k jest krzywą o k gałęziach w nieskończoności. Jest $\deg \Gamma_k > k > 2$; nierówność $\deg \Gamma_k \geq k$ jest oczywista, gdyby $\deg \Gamma_k = k$ to na mocy podanej własności domknięcie rzutowe krzywej Γ_k byłoby nieosobliwą krzywą co jest niemożliwe bo krzywa wymierna stopnia > 2 ma zawsze punkty osobliwe.

Możemy napisać $(\Gamma_i)_\infty = \{p_1\}$ dla $i = 1, \ldots, k-1$ gdyż Γ_i są parami rozłączne oraz $(\Gamma_k)_\infty = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ bo Γ_k jako krzywa o k gałęziach w nieskończoności ma co najwyżej k punktów w nieskończonosci. Pozostaje oszacować liczbę k. Jest $d = \deg f^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{k} \deg \Gamma_i \geq k - 1 + \deg \Gamma_k \geq (k-1) + (k+1) = 2k$. Stąd $k \leq d/2$. To dowodzi twierdzenia.

Uwaga. Podany dowód pokazuje, że liczba punktów w nieskończoności c nie przekracza liczby k składowych nierozkładalnych włókna wyjątkowego. Ponadto $k \leq$

$\left[\frac{d+1}{2}\right]$ gdy włókno wyjątkowe ma dokładnie jedną składową izomorficzną z prostą oraz $k \leq \left[\frac{d}{2}\right]$ gdy takich składowych jest więcej.

Udowodnione twierdzenie jest optymalne:

Przykład. Rozważmy wielomian $f(X,Y) = Y\prod_{i=1}^{k}(XY - 1 - iY^2)$ stopnia $d = 2k+1$. Można sprawdzić (por. [GP2]), że f nie ma punktów krytycznych. Stosując twierdzenie 1 dowodzi się łatwo, że $\Lambda(f) = \{0\}$. Bezpośrednio z definicji f widzimy, że formą wiodącą tego wielomianu jest $Y\prod_{i=1}^{k}(XY - iY^2) = Y^{k+1}\prod_{i=1}^{k}(X - iY)$ a więc $c = k+1 = (d+1)/2$.

Stosując twierdzenie 2 otrzymujemy

Twierdzenie 3. *Jeżeli wielomian f stopnia $d > 3$ nie ma punktów krytycznych to $c \leq d-2$.*

Dowód. Gdy f nie ma wartości krytycznych w nieskończoności, to $c = 1$ bo f jest składową automorfizmu. Gdy f ma tylko jedną wartość krytyczną w nieskończoności, to $c \leq \left[\frac{d+1}{2}\right] \leq d-2$ na mocy twierdzenia 2. W przypadku gdy f ma więcej niż jedną wartość krytyczną w nieskończoności, to $c \leq d-2$ na podstawie twierdzenia Le Van Thana i Oki.

Dowód twierdzenia o charateryzacji wielomianów o jednej wartości krytycznej w nieskończoności

W dowodzie wykorzystamy własności charakterystyki Eulera $\chi(\Gamma)$ krzywej afinicznej $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ opisane w [GP1].

Lemat 1. *Niech $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ będzie krzywą afiniczną nieosobliwą i nierozkładalną. Niech γ będzie rodzajem domknięcia rzutowego tej krzywej a r_∞ jej liczbą gałęzi w nieskończoności. Wtedy $\chi(\Gamma) = 2 - 2\gamma - r_\infty$. W szczególności $\chi(\Gamma) \leq 1$ oraz $\chi(\Gamma) = 1$ wtedy i tylko wtedy gdy Γ jest izomorficzna z prostą $\mathbb{C}$.*

Lemat 2. *Niech $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem bez punktów krytycznych. Ustalmy $t_0 \in \mathbb{C}$ i niech $f^{-1}(t_0) = \bigcup_{i=1}^{k}\Gamma_i$ będzie rozkładem włókna na komponenty nierozkładalne. Wtedy następujące warunki są równoważne.*

(i) $\Lambda(f) \subset \{t_0\}$,

(ii) $\sum_{i=1}^{k}\chi(\Gamma_i) = 1$.

Dowód. Charakterystyka Eulera $\chi(f^{-1}(t_0))$ włókna $f^{-1}(t_0)$ jest dana wzorem

$$\chi(f^{-1}(t_0)) = 1 - \lambda(f) + \lambda^{t_0}(f).$$

Warunek $\Lambda(f) \subset \{t_0\}$ jest równoważny równości $\lambda^{t_0}(f) = \lambda(f)$ która ma miejsce dokładnie wtedy, gdy $\chi(f^{-1}(t_0)) = 1$. Z drugiej strony $\chi(f^{-1}(t_0)) = \sum_{i=1}^{k}\chi(\Gamma_i)$ co dowodzi lematu.

Lemat 3. *Niech $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ będzie krzywą afiniczną nierozkładalną stopnia > 1. Załóżmy, że istnieje pęk L złożony z l równoległych prostych nie przecinających Γ. Wówczas Γ ma co najmniej $l+1$ gałęzi w nieskończoności.*

Dowód. Niech p będzie wspólnym punktem w nieskończoności prostych pęku L. Zatem p jest punktem w nieskończonosci krzywej Γ i każda prosta pęku L jest styczna do Γ w p. Jeżeli p jest jedynym punktem w nieskończoności krzywej Γ, to prosta w nieskończoności jest także styczna do Γ w p. Wówczas przez punkt p przechodzi $l+1$ stycznych do Γ a więc co najmniej $l+1$ gałęzi. Jeżeli Γ ma punkt w nieskończoności $q \neq p$ to przez punkt p przechodzi co najmniej l gałęzi a co najmniej jedna gałąź w nieskończoności przechodzi przez punkt q. To dowodzi lematu.

Dowód twierdzenia. Mamy $\sum_{i=1}^{k} \chi(\Gamma_i) = 1$ na podstawie lematu 2. Ponieważ z lematu 1 wynika że wszystkie składniki sumy są ≤ 1 więc dla pewnego i_0 jest $\chi(\Gamma_{i_0}) = 1$. Z lematu 1 wynika, że krzywa Γ_{i_0} jest izomorficzna z prostą $\mathbb{C}$. Jeśli jest tylko jedna taka krzywa to dla $i \neq i_0$ jest $\chi(\Gamma_i) = 0$. Zatem ze wzoru $0 = \chi(\Gamma) = 2 - 2\gamma - r_\infty$ wynika że krzywe Γ_i $(i \neq i_0)$ są wymierne o dwóch gałęziach w nieskończoności. Jeśli dokładnie l $(l \geq 2)$ krzywych $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ jest izomorficznych z prostą $\mathbb{C}$, to można te krzywe "wyprostować" stosując automorfizm wielomianowy $\mathbb{C}^2$. Zachowuje on liczbę gałęzi w nieskończoności każdej krzywej afinicznej. Stosując lemat 3 do krzywej Γ_j $(l < j \leq k)$ i do pęku złożonego z $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$ stwierdzamy, że Γ_j ma co najmniej $l+1$ gałęzi w nieskończoności. Zatem $\chi(\Gamma_j) \leq 1-l$ dla $l < j \leq k$. Dostajemy $1 = \sum_{i=1}^{k} \chi(\Gamma_i) = l + \chi(\Gamma_{l+1}) + \cdots + \chi(\Gamma_k) \leq l + (1-l)(k-l)$. Stąd $k = l+1$, $\chi(\Gamma_k) = 1-l$ a więc na podstawie wzoru z lematu 1 krzywa Γ_k jest wymierna o k gałęziach w nieskończoności.

Bibliografia

[A1] A. Assi, *Familles des courbes planes ayant une seule valeur irreguliere*, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser 1 Math 322 (1996) no 12, 1203-1207.

[A2] A. Assi, *Meromorphic plane curves*, Math. Z. **230** (1999), 165–183.

[CK1] J. Chądzyński, T. Krasiński, *Properness and the Jacobian conjecture in* $\mathbb{C}^2$, Bull. Soc. Sci. Lett., Łódź, (1992), Vol. XIV, 132, 13–19.

[GP1] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *Charakterystyka Eulera i osobliwości w nieskończoności krzywych algebraicznych*, Materiały XIX Konferencji szkoleniowej z Geometrii Analitycznej i Algebraicznej Zespolonej, Łódź (1992), vol. No.97, pp. 7–17.

[GP2] J. Gwoździewicz, A. Płoski, *On the singularities at infinity of plane algebraic curves (praca wysłana do druku).*

[Kr] T. Krasiński, *The level sets of polynomials in two variables and the Jacobian conjecture*, Acta Univ. Lodz. UŁ, Łódż (1991); (in Polish).

[LW] Le Dung Trang and C. Weber, *A geometrical approach to the Jacobian Conjecture for* $n = 2$, Kodai Math. J. **17** (1994), 374–381.

[LO] Le Van Thanh, M. Oka, *Note on estimation of the numbers of the critical values at infinity*, Kodai Math. J. **17** (1994), 409–419.

On polynomials with one critical value at infinity

Summary. We characterize polynomials in two complex variables with no critical points and one critical value at infinity. We also estimate number of points at infinity for such polynomials.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2000 r.