MATERIAŁY NA XXIX KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2008 **Łódź** **str. 35**

O PEWNEJ WŁASNOŚCI IDEAŁU GRADIENTOWEGO

Grzegorz Oleksik (Łódź)

Streszczenie

W pracy dowodzimy, że jeśli f jest osobliwoscią izolowaną trzech zmiennych x, y, z i $x^p \in (\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$, to $\operatorname{ord} f = 2$.

Wstęp

Niech $f : (\mathbf{C}^n, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$ będzie osobliwością izolowaną tzn. f jest kiełkiem funkcji holomorficznej mającej izolowany punkt krytyczny w 0. W badaniach nad wykładnikiem Łojasiewicza [KOP] pojawia się problem charakteryzacji osobliwości izolowanych f spełniających warunek

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ldots \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} = 0\right\} \subset \{x_n = 0\}\,.$$

W pracy podajemy pełny opis takich osobliwości w przypadku trójwymiarowym. Przyjmijmy $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ oraz $\mathcal{O}^n$ - pierscień kiełków funkcji holomorficznych w 0.

Twierdzenie. *Niech* $f : (\mathbf{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$ *będzie osobliwością izolowaną i załóżmy, że istnieje* $p \in \mathbf{N}_+$ *takie, że*

$$x^p \in \left(\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{1}$$

Wówczas $\operatorname{ord} f = 2$.

Uwaga. Łatwo wykazać, że w przypadku $n = 2$ prawdziwe jest analogiczne twierdzenie tzn. jesli $x^p \in (\frac{\partial f}{\partial y})$, to $\operatorname{ord} f = 2$.

Dowód twierdzenia

Załóżmy, że $p = \min\{k \in \mathbf{N}_+ : \ x^k \in (\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})\}$. Funkcję f możemy przedstawić w postaci:

$$f(x, y, z) = g(y, z) + x\, h(x, y, z),$$

gdzie h jest pewną funkcją holomorficzną postaci:

$$h(x, y, z) = h_0(y, z) + x\, h_1(y, z) + x^2\, h_2(y, z) + \dots$$

oraz

$$h_0(y, z) = a_0 + a\, y + b\, z + \tilde{h}(y, z), \quad \operatorname{ord} \tilde{h} \geqslant 2.$$

Zauważmy, że $a_0 = 0$. W przeciwnym wypadku $\operatorname{grad} f(0, 0, 0) \neq 0$, wbrew założeniu. Ponieważ $\operatorname{grad} f$ ma izolowane zero w punkcie $0 \in \mathbf{C}^3$, więc $\dim V(f'_y, f'_z) = 1$. Z (1) mamy, że $V(f'_y, f'_z) \subset V(x)$ oraz $f'_y(0, y, z) = g'_y(y, z)$, $f'_z(0, y, z) = g'_y(y, z)$. Zatem

$$\dim V\left(\frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z}\right) = 1.$$

Ponieważ funkcja g nie posiada izolowanego zera, więc w rozkładzie na czynniki nierozkładalne posiada czynnik wielokrotny. Stąd wynika, że $h_0 \neq 0$. Istotnie, w przeciwnym wypadku funkcja f nie posiadałaby izolowanego zera w zerze. Ostatecznie f jest postaci:

$$f(x, y, z) = g(y, z) + x\,(a\, y + b\, z) + x\, \tilde{h}(y, z) + x^2\, h_1(y, z) + \dots,$$

gdzie $\operatorname{ord} \tilde{h} \geqslant 2$, $\operatorname{ord} g \geqslant 2$.

Aby udowodnić tezę twierdzenia, wystarczy pokazać, że $|a| + |b| \neq 0$. Przypuśćmy nie wprost, że $a = 0$ i $b = 0$. Wówczas funkcja f jest postaci:

$$f(x, y, z) = g(y, z) + x\, \tilde{h}(y, z) + x^2\, h_1(y, z) + \dots, \quad \operatorname{ord} \tilde{h} \geqslant 2. \tag{2}$$

Z warunku (1) wynika, że istnieją $A, B \in \mathbf{C}\{x, y, z\}$ takie, że

$$x^p = A(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + B(x, y, z)\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \tag{$1'$}$$

w pewnym otoczeniu zera. Oznaczmy:

$$\begin{aligned} A(x,y,z) &= A_0(y,z) + x\,A_1(y,z) + x^2 A_2(y,z) + \dots \\ B(x,y,z) &= B_0(y,z) + x\,B_1(y,z) + x^2 B_2(y,z) + \dots \end{aligned}$$

Zauważmy, że $A_0 \neq 0$ lub $B_0 \neq 0$. W przeciwnym razie $x|A$ i $x|B$ w $\mathcal{O}^3$ i otrzymalibyśmy sprzeczność z wyborem liczby p. Mamy dalej z (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= g'_y + x\,\hat{h}'_y + x^2 h'_{1,y} + \dots \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= g'_z + x\,\hat{h}'_z + x^2 h'_{1,z} + \dots \end{aligned}$$

Zauważmy, że $p \geqslant 2$. Istotnie, gdyby $p = 1$, to porównując współczynniki przy x^1 w $(1')$ otrzymujemy:

$$A_1\,g'_y + B_1\,g'_z + A_0\,\tilde{h}'_y + B_0\,\tilde{h}'_z = 1. \tag{3}$$

Ponieważ $\operatorname{ord}\tilde{h}'_y \geqslant 1$, $\operatorname{ord}\tilde{h}'_z \geqslant 1$ i $\operatorname{ord} g'_y \geqslant 1$, $\operatorname{ord} g'_z \geqslant 1$, to równość (3) nie może zachodzić. Zatem $p \geqslant 2$. Stąd porównując współczynniki przy x^0 i x^1 w $(1')$ mamy

$$A_0\,g'_y + B_0\,g'_z = 0 \tag{4}$$

$$A_1\,g'_y + B_1\,g'_z + A_0\,\tilde{h}'_y + B_0\,\tilde{h}'_z = 0 \tag{5}$$

Skoro g nie posiada izolowanego zera w zerze, to ma w rozkładzie czynniki wielokrotne, czyli g jest postaci

$$g = g_0\,g_1^{k_1} g_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot g_n^{k_n}, \qquad k_1, \dots, k_n \geqslant 2, \quad n \geqslant 1,$$

g_i nierozkładalny oraz $g_i \not| \; g_0$ dla $i = 1, 2, \dots, n$, g_0 nie posiada w rozkładzie czynników wielokrotnych w $\mathcal{O}^2$.

Na mocy propozycji II.6.2 w [Ł] dla każdego $i = 1, 2, \dots, n$ istnieje lokalna parametryzacja zbioru zer $V(g_i)$ tzn. istnieją funkcje $\Phi_i = (\phi_{1,i}, \phi_{2,i})$, $\phi_{1,i} \neq 0$ lub $\phi_{2,i} \neq 0$, $\phi_{1,i}$, $\phi_{2,i}$ funkcje holomorficzne znikające w 0 oraz $g_i(\Phi_i) = 0$. Możliwe są następujące przypadki:

a) $\phi_{1,i} \neq 0$ i $\phi_{2,i} \neq 0$. Wówczas możemy założyć, że $\phi_{1,i}(t) = t^{r_i}$. Przyjmijmy $\phi_i := \phi_{2,i}$. Wtedy $g_i(t^{r_i}, \phi_i(t)) \equiv 0$

b) $\phi_{1,i} = 0$ i $\phi_{2,i} = \mathbf{id}$, czyli $g_i(0,t) \equiv 0$ Ponieważ g_i nierozkładalny, to możemy założyć, że $g_i(y,z) = y$.

c) $\phi_{1,i} = \mathbf{id}$ i $\phi_{2,i} = 0$, czyli $g_i(t,0) \equiv 0$ i analogicznie jak w b) $g_i(y,z) = z$.

Przyjmijmy:

$$\begin{aligned} m_i &:= \sup\{k \in \mathbf{N} : \, g_i^k | A_0\} \\ n_i &:= \sup\{k \in \mathbf{N} : \, g_i^k | B_0\}. \end{aligned}$$

Jeśli $m_i = 0$ (odpowiednio $n_i = 0$), to $g_i \nmid A_0$ (odpowiednio $g_i \nmid B_0$). Ponieważ $A_0 \neq 0$ lub $B_0 \neq 0$ to m_i lub n_i jest skończone. Rozważymy przypadki:

1^0 Istnieje $i \in \{1, \ldots, n\}$ takie, że $\min(m_i, n_i) < k_i - 1$.

2^0 $\min(m_i, n_i) \geqslant k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

Przypadek 1^0. Przyjmijmy $\hat{g}_i := (g/g_i^{k_i})\, g_0$. Oczywiście wtedy $g = g_i^{k_i} \hat{g}_i$ i $g_i \nmid \hat{g}_i$. Rozważmy podprzypadki a), b), c) związane z postacią parametryzacji Φ_i:

a) W przypadku parametryzacji $(t^{r_i}, \phi_i(t))$ mamy $g_i(t^{r_i}, \phi_i(t)) \equiv 0$. Stąd

$$g'_{i,y}(t^{r_i}, \phi_i(t))\, r_i\, t^{r_i - 1} + g'_{i,z}(t^{r_i}, \phi_i(t)) \phi'_i(t) \equiv 0. \tag{6}$$

Ponieważ g_i nierozkładalny, to $g'_{i,y}(t^{r_i}, \phi_i(t)) \not\equiv 0$ i $g'_{i,z}(t^{r_i}, \phi_i(t)) \not\equiv 0$ oraz

$$\phi'_i(t) = -\frac{g'_{i,y}(t^{r_i}, \phi_i(t))}{g'_{i,z}(t^{r_i}, \phi_i(t))}\, r_i\, t^{r_i - 1}. \tag{7}$$

Ponieważ $g_i \nmid g'_{i,y}$ i $g_i \nmid g'_{i,z}$, więc wyrażenia w nawiasach okrągłych nie dzielą się przez g_i. Zatem jeśli $g_i^l \,|\, A_0$ i $g_i^{l'} \,|\, B_0$, to $l = l'$. Reasumując $n_i = m_i$ oraz $A_0 = g_i^{m_i} A'_0$, $B_0 = g_i^{m_i} B'_0$, $g_i \nmid A'_0$, $g_i \nmid B'_0$. Zatem na parametryzacji $(t^{r_i}, \phi_i(t))$ mamy

$$A'_0(t^{r_i}, \phi_i(t))\, g'_{i,y}(t^{r_i}, \phi_i(t)) + B'_0(t^{r_i}, \phi_i(t))\, g'_{i,z}(t^{r_i}, \phi_i(t)) \equiv 0. \tag{8}$$

Równość (5) możemy teraz zapisać w postaci:

$$g_i^{m_i}[A_1\, g_i^{k_i - 1 - m_i}(k_i\, g'_{i,y}\, \hat{g}_i + g_i\, \hat{g}'_{i,y}) + B_1\, g_i^{k_i - 1 - m_i}(k_i\, g'_{i,z}\, \hat{g}_i + g_i\, \hat{g}'_{i,z}) + A'_0\, \tilde{h}'_y + \\ + B'_0\, \tilde{h}'_z] = 0.$$

Korzystając z faktu, że $m_i < k_i - 1$ na parametryzacji $(t^{r_i}, \phi_i(t))$ otrzymujemy

$$A'_0(t^{r_i}, \phi_i(t))\, \tilde{h}'_y(t^{r_i}, \phi_i(t)) + B'_0(t^{r_i}, \phi_i(t))\, \tilde{h}'_z(t^{r_i}, \phi_i(t)) \equiv 0. \tag{9}$$

Z (7), (8) i (9) dostajemy

$$\tilde{h}'_y(t^{r_i}, \phi_i(t))\, r_i\, t^{r_i - 1} + \tilde{h}'_z(t^{r_i}, \phi_i(t)) \phi'_i(t) \equiv 0,$$

czyli $[\tilde{h}(t^{r_i}, \phi_i(t)]' \equiv 0$. Ponieważ $\tilde{h}(0,0) = 0$, stąd $\tilde{h}(t^{r_i}, \phi_i(t) \equiv 0$, a zatem $\tilde{h}$ znika na parametryzacji $(t^{r_i}, \phi_i(t))$. Wtedy na parametryzacji $(0, t^{r_i}, \phi_i(t))$ znikają wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

b) W przypadku parametryzacji $(0, t)$ mamy $g_i(y, z) = y$ oraz z równości (4) dostajemy

$$y^{k_i - 1}[A_0(k_i\, \hat{g}_i + y\, \hat{g}'_{i,y}) + B_0\, y\, \hat{g}'_{i,z}] \equiv 0. \tag{10}$$

Ponieważ $y \not| \hat{g}_i$, to wyrażenie w nawiasie okrągłym nie dzieli się przez y. Zatem jeśli $y^l | A_0$ i $y^{l'} | B_0$, to $l \geqslant l' + 1$. Reasumując $\min(n_i, m_i) = n_i$ i $n_i < m_i$ oraz $A_0 = y^{m_i} A_0'$ i $B_0 = y^{n_i} B_0'$, $y \not| A_0'$, $y \not| B_0'$. Równość (5) możemy teraz zapisać w postaci:

$$g_i^{n_i}[A_1\, y^{k_i-1-n_i}(k_i\, \hat{g}_i + y\, \hat{g}_{i,y}') + B_1\, y^{k_i-1-n_i}\, y\, \hat{g}_{i,z}' + y^{m_i-n_i} A_0'\, \tilde{h}_y' + B_0'\, \tilde{h}_z'] = 0$$

Korzystając z faktu, że $n_i < k_i - 1$ i $n_i < m_i$ na parametryzacji $(0, t)$ dostajemy

$$B_0'(0,t)\, \tilde{h}_z'(0,t) \equiv 0,$$

a ponieważ $y \not| B_0'$, to $B_0'(0,t) \not\equiv 0$, czyli $\tilde{h}_z'(0,t) \equiv 0$. Zatem $[\tilde{h}(0,t)]' \equiv 0$, a skoro $\tilde{h}(0,0) = 0$, to $\tilde{h}(0,t) \equiv 0$. Wtedy na parametryzacji $(0,0,t)$ znikają wszystkie pochodne cząstkowe funkcji f, co prowadzi do sprzeczności z założeniem.

c) analogicznie jak w b).

Przypadek 2^0 W tej sytuacji mamy

$$A_0 = g_1^{u_1} g_2^{u_2} \cdot \ldots \cdot g_n^{u_n} A_0' \tag{11}$$

$$B_0 = g_1^{v_1} g_2^{v_2} \cdot \ldots \cdot g_n^{v_n} B_0', \tag{12}$$

$u_i \geqslant k_i - 1,\ v_i \geqslant k_i - 1,\ g_i \not| A_0',\ g_i \not| B_0',\ i = 1, 2, \ldots n.$
Oznaczmy: $d_{ab} = \mathrm{NWD}(A_0, B_0),\ d_g = \mathrm{NWD}(g_y', g_z')$. Zauważmy, że wówczas równość (4) możemy zapisać w postaci:

$$d_{ab}\, d_g \left(\frac{A_0}{d_{ab}} \frac{g_y'}{d_g} + \frac{B_0}{d_{ab}} \frac{g_z'}{d_g} \right) = 0.$$

Wynika stąd, że w pierścieniu kiełków $\mathcal{O}^2$ mamy, że następujące elementy są stowarzyszone

$$\frac{A_0}{d_{ab}} \sim \frac{g_z'}{d_g} \tag{13}$$

$$\frac{B_0}{d_{ab}} \sim \frac{g_y'}{d_g}. \tag{14}$$

Ponieważ $d_g = g_1^{k_1-1} \cdot \ldots \cdot g_n^{k_n-1}$, to z (11) i (12) mamy, że $d_g |\, d_{ab}$. Wówczas z (13) i (14) otrzymujemy, że

$$A_0 = \hat{A}_0\, g_z', \quad B_0 = \hat{B}_0\, g_y', \quad \hat{A}_0, \hat{B}_0 \in \mathbf{C}\{x, y, z\}. \tag{15}$$

Zauważmy dalej, że z (15) mamy

$$\begin{aligned} A &= A_0 + (x\, A_1 + x^2 A_2 + \ldots) = \hat{A}_0\, g_z' + (x A_1 + x^2 A_2 + \ldots) = \\ &= \hat{A}_0\, f_z' + (x A_1 + x^2 A_2 + \ldots) - \hat{A}_0 (x\, \tilde{h}_z + x^2 h_{1,z}' + \ldots) = \\ &= \hat{A}_0\, f_z' + x\, C, \qquad C \in \mathbf{C}\{x, y, z\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Wówczas korzystając z (16) równość (1′) możemy przedstawić w postaci:

$$x^p = x\,C\,\frac{\partial f}{\partial y} + \left(B + \hat{A}_0\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{17}$$

Zatem $x \mid ((B + \hat{A}_0\, f'_y) f'_z)$. Jeśli $x \mid (B + \hat{A}_0\, f'_y)$, to mamy sprzeczność z wyborem liczby p. Stąd $x \mid f'_z$, czyli $g'_z = 0$. W takim razie funkcja g zależy tylko od zmiennej y. Postępując analogicznie jak w (16) przedstawiamy B w postaci:

$$B = \hat{B}_0\, f'_y + x\,D, \quad D \in \mathbf{C}\{x, y, z\}$$

i dochodzimy do wniosku, że $g'_z = 0$, czyli funkcja g zależy tylko od zmiennej z. Reasumując funkcja g musi być stała i mamy sprzeczność z faktem, że g posiada czyniki wielokrotne, co kończy dowód. $\square$

Wniosek. *Przy założeniach jak w twierdzeniu z jego dowodu wynika, że rozwinięcie funkcji f względem zmiennej x jest postaci:*

$$f(x, y, z) = g^2(y, z)\, g_0(y, z) + x\,(a\,y + b\,z) + x\,\tilde{h}(y, z) + x^2 h(x, y, z),$$

gdzie g, g_0, $\tilde{h}$, h są funkcjami holomorficznymi, $g_0 \neq 0$, $\operatorname{ord} g \geqslant 1$, $\operatorname{ord} \tilde{h} \geqslant 2$ *oraz* $|a| + |b| > 0$.

Problem. Uogólnić główne twierdzenie na przypadek dowolnego n.

Literatura

[KOP] T. Krasiński, G. Oleksik, A. Płoski, *The Łojasiewicz exponent of quasi-homogeneous non-degenerate singularities in three variables* (w przygotowaniu).

[Ł] S. Łojasiewicz, *Wstęp do geometrii analitycznej*, PWN, Warszawa 1980.

On a property of the gradient ideal

Summary. In the article we prove that if f is an isolated singularity in three variables x, y, z and $x^p \in (\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y})$ then $\operatorname{ord} f = 2$.

Łódź, 7 – 11 stycznia 2008 r.