Twierdzenie Kusznirenki dla osobliwości nieizolowanych

Christophe Eyral, Grzegorz Oleksik, Adam Różycki

9 stycznia 2019

Wprowadzenie

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.

Wprowadzenie

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- $\dim_0 \Sigma f = 0$, $f \mapsto \mu_f(0)$

Wprowadzenie

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- $\dim_0 \Sigma f = 0$, $f \mapsto \mu_f(0)$
- $\dim_0 \Sigma f = d \geqslant 0$, $f \mapsto (\lambda^0_{f,z}(0), \lambda^1_{f,z}(0), \ldots, \lambda^d_{f,z}(0))$

Wprowadzenie

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość (niekoniecznie izolowaną), U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1,\dots,z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- $\dim_0 \Sigma f = 0,\ f \mapsto \mu_f(0)$
- $\dim_0 \Sigma f = d \geqslant 0,\ f \mapsto (\lambda^0_{f,z}(0), \lambda^1_{f,z}(0), \dots, \lambda^d_{f,z}(0))$
- $\dim_0 \Sigma f = 0 \Rightarrow \lambda^0_{f,z}(0) = \mu_f(0)$

Twierdzenie Kusznirenki

$f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość izolowaną. Wówczas

- $\mu_f(0) \geqslant \nu(f)$.

Klasyczne twierdzenie Kusznirenki

Twierdzenie Kusznirenki

$f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna posiadająca w 0 osobliwość izolowaną. Wówczas

- $\mu_f(0) \geqslant \nu(f)$.
- f - niezdegenerowana $\Rightarrow \mu_f(0) = \nu(f)$.

Problem

Odczytać z diagramu Newtona nieizolowanej osobliwości niezdegenerowanej f jej liczby Lê:

$$(\lambda^0_{f,z}(0), \lambda^1_{f,z}(0), \ldots, \lambda^d_{f,z}(0)),$$

$\dim_0 \Sigma f = d > 0$,

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.
- Wybierzemy te składowe $V(\mathscr{I})$, które nie są zawarte w W. Niech $x \in V(\mathscr{I})$. Weźmy minimalny rozkład prymarny źdźbła $\mathscr{I}_x$ snopa $\mathscr{I}$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ i rozważmy ideał $\mathscr{I}_x \neg W$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ składający się z przecięcia tych ideałów prymarnych Q (dopuszczamy zanurzone), że $V(Q) \nsubseteq W$.

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.
- Wybierzemy te składowe $V(\mathscr{I})$, które nie są zawarte w W. Niech $x \in V(\mathscr{I})$. Weźmy minimalny rozkład prymarny źdźbła $\mathscr{I}_x$ snopa $\mathscr{I}$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ i rozważmy ideał $\mathscr{I}_x \neg W$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ składający się z przecięcia tych ideałów prymarnych Q (dopuszczamy zanurzone), że $V(Q) \not\subseteq W$.
- Ta definicja nie zależy od wyboru minimalnego rozkładu prymarnego $\mathscr{I}_x$.

Luka w snopie

- $(X, \mathscr{O}_X)$ - zespolona przestrzeń analityczna, $W \subseteq X$ - zbiór analityczny, $\mathscr{I}$ - koherentny snop ideałów $\mathscr{O}_X$, $V(\mathscr{I})$ - przestrzeń analityczna zdefiniowana przez zerowanie $\mathscr{I}$.
- Wybierzemy te składowe $V(\mathscr{I})$, które nie są zawarte w W. Niech $x \in V(\mathscr{I})$. Weźmy minimalny rozkład prymarny źdźbła $\mathscr{I}_x$ snopa $\mathscr{I}$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ i rozważmy ideał $\mathscr{I}_x \neg W$ w $\mathscr{O}_{X,x}$ składający się z przecięcia tych ideałów prymarnych Q (dopuszczamy zanurzone), że $V(Q) \nsubseteq W$.
- Ta definicja nie zależy od wyboru minimalnego rozkładu prymarnego $\mathscr{I}_x$.
- Wykonując powyższą operację w każdym punkcie x otrzymujemy nowy koherentny snop ideałów, który nazywamy *luką w snopie* i oznaczamy $\mathscr{I} \neg W$. Oznaczmy przez $V(\mathscr{I})\neg W$ zespoloną przestrzeń analityczną $V(\mathscr{I} \neg W)$.

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.

Cykle Lê i liczby Lê

- $f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- Dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, określamy k-tą *rozmaitość polarną* funkcji f względem z jako

$$\Gamma^k_{f,z} := V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \neg \Sigma f.$$

Cykle Lê i liczby Lê

- $f : (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- Dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n-1$, określamy k-tą *rozmaitość polarną* funkcji f względem z jako

$$\Gamma^k_{f,z} := V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \neg \Sigma f.$$

- Cykl analityczny

$$[\Lambda^k_{f,z}] := \left[\Gamma^{k+1}_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}\right)\right] - \left[\Gamma^k_{f,z}\right]$$

nazywamy k-tym *cyklem Lê* funkcji f względem z.

Cykle Lê i liczby Lê

- $f\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - funkcja analityczna, U - otoczenie otwarte 0 w $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ - ustalony układ współrzędnych, Σf - zbiór punktów krytycznych f.
- Dla każdego $0 \leqslant k \leqslant n-1$, określamy k-tą *rozmaitość polarną* funkcji f względem z jako

$$\Gamma^k_{f,z} := V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right) \neg \Sigma f.$$

- Cykl analityczny

$$[\Lambda^k_{f,z}] := \left[\Gamma^{k+1}_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_{k+1}}\right)\right] - \left[\Gamma^k_{f,z}\right]$$

  nazywamy k-tym *cyklem Lê* funkcji f względem z.
- Określamy k-tą *liczbę Lê* funkcji f w $0 \in \mathbb{C}^n$ względem z

$$\lambda^k_{f,z}(0) := \left([\Lambda^k_{f,z}] \cdot [V(z_1, \ldots, z_k)]\right)_0$$

  przy założeniu, że przecięcie to jest 0-wymiarowe lub puste.

Jeśli f ma osobliwość izolowaną w 0, to:

- $\Gamma^1_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$

Cykle Lê i liczby Lê

Jeśli f ma osobliwość izolowaną w 0, to:

- $\Gamma^1_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)$
- $\lambda^0_{f,z}(0) = \left[\Gamma^1_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right]_0 = \left[V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right)\right]_0 = \mu_f(0).$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $$\Gamma^2_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3),$$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $$\Gamma^2_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3),$$
- $$\begin{aligned}\Gamma^1_{f,z} &= V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) \\ &= V(z_2(2z_1^2 + 4z_2^2), z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3).\end{aligned}$$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $$\Gamma^2_{f,z} = V\left(\frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(z_3^3),$$
- $$\begin{aligned}\Gamma^1_{f,z} &= V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, \frac{\partial f}{\partial z_3}\right) \neg V(z_2, z_3) \\ &= V(z_2(2z_1^2 + 4z_2^2), z_3^3) \neg V(z_2, z_3) = V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3).\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}[\Lambda^1_{f,z}] &= \left[\Gamma^2_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_2}\right)\right] - \left[\Gamma^1_{f,z}\right] \\ &= [V(z_3^3) \cap V(z_2(2z_1^2 + 4z_2^2))] - [V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3)] \\ &= [V(z_2, z_3^3)]\end{aligned}$$

Przykład

- $$\begin{aligned}[\Lambda^0_{f,z}] &= \left[\Gamma^1_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right] \\ &= [V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3) \cap V(z_1 z_2^2)] \\ &= [V(z_1, z_2^2, z_3^3)] + [V(z_1^2, z_2^2, z_3^3)].\end{aligned}$$

Przykład

- $$\begin{aligned}[\Lambda^0_{f,z}] &= \left[\Gamma^1_{f,z} \cap V\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}\right)\right] \\ &= [V(2z_1^2 + 4z_2^2, z_3^3) \cap V(z_1 z_2^2)] \\ &= [V(z_1, z_2^2, z_3^3)] + [V(z_1^2, z_2^2, z_3^3)].\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\lambda^1_{f,z} &= ([\Lambda^1_{f,z}] \cdot [V(z_1)])_0 = [V(z_1, z_2, z_3^3)]_0 = 3; \\ \lambda^0_{f,z} &= ([\Lambda^0_{f,z}] \cdot \mathbb{C}^3)_0 = 6 + 12 = 18.\end{aligned}$$

Diagram Newtona

- $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.

Diagram Newtona

- $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.
- $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ - otoczka wypukła $\bigcup_{c_\alpha \neq 0}(\alpha + \mathbb{R}_+^n)$.

Diagram Newtona

- $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.
- $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ - otoczka wypukła $\bigcup_{c_\alpha \neq 0}(\alpha + \mathbb{R}_+^n)$.
- $\Gamma(f)$ - suma zwartych ścian $\Gamma_+(f)$ - *diagram Newtona*.

Diagram Newtona

- $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.
- $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ - otoczka wypukła $\bigcup_{c_\alpha \neq 0} (\alpha + \mathbb{R}_+^n)$.
- $\Gamma(f)$ - suma zwartych ścian $\Gamma_+(f)$ - *diagram Newtona*.
- $f_\Delta(z) := \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha z^\alpha, \quad \Delta \subseteq \Gamma(f)$

Diagram Newtona

- $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.
- $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ - otoczka wypukła $\bigcup_{c_\alpha \neq 0}(\alpha + \mathbb{R}_+^n)$.
- $\Gamma(f)$ - suma zwartych ścian $\Gamma_+(f)$ - *diagram Newtona*.
- $f_\Delta(z) := \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha z^\alpha, \quad \Delta \subseteq \Gamma(f)$
- f - *niezdegenerowana w sensie Newtona* na Δ, gdy

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1}(z) = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n}(z) = 0$$

nie ma rozwiązań w $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.

Diagram Newtona

- $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$.
- $\Gamma_+(f) \subset \mathbb{R}_+^n$ - otoczka wypukła $\bigcup_{c_\alpha \neq 0}(\alpha + \mathbb{R}_+^n)$.
- $\Gamma(f)$ - suma zwartych ścian $\Gamma_+(f)$ - *diagram Newtona*.
- $f_\Delta(z) := \sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha z^\alpha, \quad \Delta \subseteq \Gamma(f)$
- f - *niezdegenerowana w sensie Newtona* na Δ, gdy

$$\frac{\partial f_\Delta}{\partial z_1}(z) = \cdots = \frac{\partial f_\Delta}{\partial z_n}(z) = 0$$

  nie ma rozwiązań w $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$.
- f - *niezdegenerowana w sensie Newtona*, gdy f niezdegenerowana na każdej ścianie $\Delta \subset \Gamma(f)$.

Liczba Newtona

- $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$.

$$X^I := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X\, ;\, x_i = 0 \text{ if } i \notin I\}.$$

Liczba Newtona

- $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$.

$$X^I := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \,;\, x_i = 0 \text{ if } i \notin I\}.$$

- $\Gamma_-(f)$ - stożek rozpięty przez $\Gamma(f)$ o wierzchołku w 0.

Liczba Newtona

- $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$.

$$X^I := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \,;\, x_i = 0 \text{ if } i \notin I\}.$$

- $\Gamma_-(f)$ - stożek rozpięty przez $\Gamma(f)$ o wierzchołku w 0.
- f - dogodny ($\Gamma(f)$ przecina każdą oś). *Liczba Newtona* f

$$\nu(f) := \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{n-|I|} |I|! \,\mathrm{Vol}_{|I|}(\Gamma_-(f)^I).$$

Liczba Newtona

- $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n_+$.

$$X^I := \{(x_1, \ldots, x_n) \in X \,;\, x_i = 0 \text{ if } i \notin I\}.$$

- $\Gamma_-(f)$ - stożek rozpięty przez $\Gamma(f)$ o wierzchołku w 0.
- f - dogodny ($\Gamma(f)$ przecina każdą oś). *Liczba Newtona* f

$$\nu(f) := \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} (-1)^{n-|I|} |I|! \, \mathrm{Vol}_{|I|}(\Gamma_-(f)^I).$$

- f - niedogodny. *Liczba Newtona* f

$$\nu(f) := \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \nu\left(f + \sum_{i \in I_f} z_i^m\right).$$

Zmodyfikowana liczba Newtona

f - niezdegenerowana, jej liczby Lê istnieją, $\dim_0 \Sigma f = d > 0$.
Wówczas można pokazać, że w rozwinięciu f nie ma jednomianów postaci $z_1^{\alpha_1}, \ldots, z_d^{\alpha_d}$.
Rozważmy funkcję

$$f_d = f + z_1^{\alpha_1} + \cdots + z_d^{\alpha_d},\ 1 << \alpha_1 << \cdots << \alpha_d$$

Stowarzyszymy teraz z diagramem Newtona f_d pewne "zmodyfikowane" liczby Newtona

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\Gamma(f_d)^I \neq \emptyset$.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\Gamma(f_d)^I \neq \emptyset$.
- Weźmy podział symplicjalny $\Gamma(f_d)^I$ taki, że wierzchołki jego sympleksów są 0-wymiarowymi ścianami $\Gamma(f_d)^I$.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\Gamma(f_d)^I \neq \emptyset$.
- Weźmy podział symplicjalny $\Gamma(f_d)^I$ taki, że wierzchołki jego sympleksów są 0-wymiarowymi ścianami $\Gamma(f_d)^I$.
- Stożki rozpięte na sympleksach tego podziału o wierzchołku w $0 \in \mathbb{R}^n$ wyznaczają podział symplicjalny $\Gamma_-(f_d)^I$.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\emptyset \neq I \subset \{1, \ldots, n\}$, $\Gamma(f_d)^I \neq \emptyset$.
- Weźmy podział symplicjalny $\Gamma(f_d)^I$ taki, że wierzchołki jego sympleksów są 0-wymiarowymi ścianami $\Gamma(f_d)^I$.
- Stożki rozpięte na sympleksach tego podziału o wierzchołku w $0 \in \mathbb{R}^n$ wyznaczają podział symplicjalny $\Gamma_-(f_d)^I$.
- Ξ_I - rodzina powyższych stożków.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$
- Ξ_{I,i_0} - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że każdy jej sympleks S ma krawędź leżącą na osi OX_{i_0}, oraz żadna jego krawędź nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $i \neq i_0$

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$
- Ξ_{I,i_0} - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że każdy jej sympleks S ma krawędź leżącą na osi OX_{i_0}, oraz żadna jego krawędź nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $i \neq i_0$
- $S \in \Xi_{I,i_0} \Rightarrow S$ ma wierzchołek $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$
- Ξ_{I,i_0} - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że każdy jej sympleks S ma krawędź leżącą na osi OX_{i_0}, oraz żadna jego krawędź nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $i \neq i_0$
- $S \in \Xi_{I,i_0} \Rightarrow S$ ma wierzchołek $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
- $\widetilde{S}$ - sympleks o tych samych wierzchołkach co S za wyjątkiem wierzchołka $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0)$, który zastępujemy przez $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ nazywamy "zredukowanym".

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$
- Ξ_{I,i_0} - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że każdy jej sympleks S ma krawędź leżącą na osi OX_{i_0}, oraz żadna jego krawędź nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $i \neq i_0$
- $S \in \Xi_{I,i_0} \Rightarrow S$ ma wierzchołek $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
- $\widetilde{S}$ - sympleks o tych samych wierzchołkach co S za wyjątkiem wierzchołka $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0)$, który zastępujemy przez $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ nazywamy "zredukowanym".
- $\widetilde{\Xi}_{I,i_0}$ - zbiór zredukowanych sympleksów.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$
- Ξ_{I,i_0} - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że każdy jej sympleks S ma krawędź leżącą na osi OX_{i_0}, oraz żadna jego krawędź nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$, $i \neq i_0$
- $S \in \Xi_{I,i_0} \Rightarrow S$ ma wierzchołek $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
- $\widetilde{S}$ - sympleks o tych samych wierzchołkach co S za wyjątkiem wierzchołka $(0, \ldots, 0, \alpha_{i_0}, 0, \ldots, 0)$, który zastępujemy przez $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ nazywamy "zredukowanym".
- $\widetilde{\Xi}_{I,i_0}$ - zbiór zredukowanych sympleksów.
- $\Xi := \{\Xi_I\}_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\, I \neq \emptyset}$. *Zmodyfikowana liczba Newtona* funkcji f:

$$\widetilde{\nu}_{\Xi,i_0}(f) := \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\, I \ni i_0} \; \sum_{\widetilde{S} \in \widetilde{\Xi}_{I,i_0}} (-1)^{n-|I|} |I|! \operatorname{Vol}_{|I|}(\widetilde{S}).$$

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\Xi_{I,0}$ - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że żadna krawędź S nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\Xi_{I,0}$ - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że żadna krawędź S nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$.
- Sympleksy z $\Xi_{I,0}$ pochodzą tylko z $\Gamma(f)$.

Zmodyfikowana liczba Newtona

- $\Xi_{I,0}$ - podrodzina sympleksów $S \in \Xi_I$ najwyższego wymiaru taka, że żadna krawędź S nie leży na żadnej z osi OX_i, $i \in \{1, \ldots, d\}$.
- Sympleksy z $\Xi_{I,0}$ pochodzą tylko z $\Gamma(f)$.
- $\Xi := \{\Xi_I\}_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\, I \neq \emptyset}$. *Wyróżniona* zmodyfikowana liczba Newtona funkcji f:

$$\nu_{\Xi,0}(f) := \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\},\, I \neq \emptyset} \ \sum_{S \in \Xi_{I,0}} (-1)^{n-|I|} |I|! \operatorname{Vol}_{|I|}(S).$$

Główny wynik

Twierdzenie Kusznirenki dla osobliwości nieizolowanych

f - niezdegenerowana, $d := \dim_0 \Sigma f \geqslant 1$, liczby $\lambda^k_{f,z}(0)$ istnieją. Wówczas:

1. Zmodyfikowane liczby Newtona $\nu_{\Xi,0}(f_d)$ i $\widetilde{\nu}_{\Xi,k}(f_d)$ nie zależą od wyboru $\Xi := \{\Xi_I\}_{I\subseteq\{1,\ldots,n\},\, I\neq\emptyset}$.

$$\nu_0(f_d) := \nu_{\Xi,0}(f_d) \quad \text{i} \quad \widetilde{\nu}_k(f_d) := \widetilde{\nu}_{\Xi,k}(f_d).$$

2.
   - $\lambda^0_{f,z}(0) = (-1)^n + \nu_0(f_d) + \widetilde{\nu}_1(f_d)$;
   - $\lambda^k_{f,z}(0) = (-1)^{k-1}(\widetilde{\nu}_k(f_d) - \widetilde{\nu}_{k+1}(f_d))$ dla $1 \leqslant k \leqslant d-1$
   - $\lambda^d_{f,z}(0) = (-1)^{d-1}\widetilde{\nu}_d(f_d)$.

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$ - niezdegenerowana.

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$ - niezdegenerowana.
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$ - niezdegenerowana.
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $f_d = f_1 = f + z_1^5$

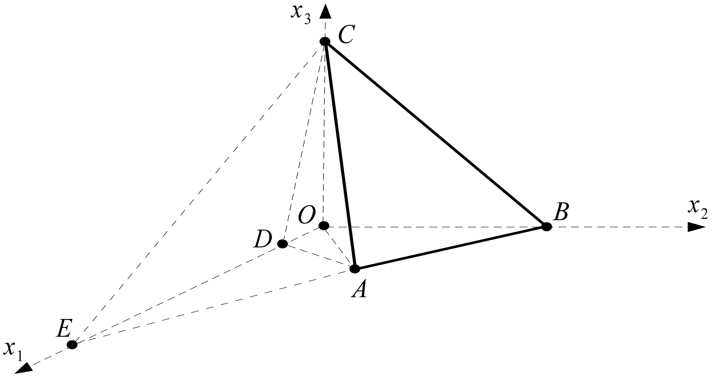
Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$ - niezdegenerowana.
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $f_d = f_1 = f + z_1^5$
- $\nu_0(f_1) = 16$
  $\tilde{\nu}_1(f_1) = 3$

Przykład

- $f(z_1, z_2, z_3) := z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + z_3^4$ - niezdegenerowana.
- $\Sigma f = \{z_2 = z_3 = 0\}$ - oś z_1, $d = \dim_0 \Sigma f = 1$
- $f_d = f_1 = f + z_1^5$
- $\nu_0(f_1) = 16$
  $\tilde{\nu}_1(f_1) = 3$
- $\lambda^0_{f,z}(0) = (-1)^3 + 16 + 3 = 18$
  $\lambda^1_{f,z}(0) = (-1)^0 \cdot 3 = 3$

Rysunek



Rysunek : Diagram Newtona f i f_1

Wnioski

Wniosek 1

$f, g\colon (U,0) \to (\mathbb{C},0)$ - niezdegenerowane osobliwości nieizolowane. Jeśli $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ i liczby Lê funkcji f i g istnieją, to:

- $\dim_0 \Sigma f = \dim_0 \Sigma g = d$

Wnioski

Wniosek 1

$f, g\colon (U, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ - niezdegenerowane osobliwości nieizolowane. Jeśli $\Gamma(f) = \Gamma(g)$ i liczby Lê funkcji f i g istnieją, to:

- $\dim_0 \Sigma f = \dim_0 \Sigma g = d$
- $\lambda^k_{f,z}(0) = \lambda^k_{g,z}(0), \ 0 \leqslant k \leqslant d.$

Wniosek 2

$\{f_t\}$ - rodzina niezdegenerowanych osobliwości. Jeśli $\Gamma(f_t) = \Gamma(f_0)$ i liczby Lê funkcji f_t istnieją, to:

- $\dim_0 \Sigma f_t = \dim_0 \Sigma f_0 = d$

Wnioski

Wniosek 2

$\{f_t\}$ - rodzina niezdegenerowanych osobliwości. Jeśli $\Gamma(f_t) = \Gamma(f_0)$ i liczby Lê funkcji f_t istnieją, to:

- $\dim_0 \Sigma f_t = \dim_0 \Sigma f_0 = d$
- $\lambda^k_{f_t,z}(0) = \lambda^k_{f_0,z}(0), \ 0 \leqslant k \leqslant d.$

Wniosek 3

$\{f_t\}$ - rodzina niezdegenerowanych osobliwości. Jeśli $\Gamma(f_t) = \Gamma(f_0)$ i liczby Lê funkcji f_t istnieją, to:

- Jeśli $z = (z_1, \ldots, z_n)$ jest prepolarnym układem współrzędnych dla f_t i $\dim_0 \Sigma f_t \leqslant n - 4$, to typ dyfeomorficzny włókna Milnora f_t w 0 jest niezależny od t

Wnioski

Wniosek 3

$\{f_t\}$ - rodzina niezdegenerowanych osobliwości. Jeśli $\Gamma(f_t) = \Gamma(f_0)$ i liczby Lê funkcji f_t istnieją, to:

- Jeśli $z = (z_1, \ldots, z_n)$ jest prepolarnym układem współrzędnych dla f_t i $\dim_0 \Sigma f_t \leqslant n - 4$, to typ dyfeomorficzny włókna Milnora f_t w 0 jest niezależny od t
- Jeśli $n \geqslant 5$ i $\dim_0 \Sigma f_t = 1$, to rodzina f_t jest topologicznie trywialna

Wnioski

Wniosek 4

f - niezdegenerowana osobliwość nieizolowana, $\dim_0 \Sigma f = d \geqslant 1$, liczby Lê funkcji f istnieją wzgledem pewnego prepolarnego układu współrzędnych. Wówczas zredukowana charakterystyka Eulera $\tilde{\chi}(F_{f,0})$ włókna Milnora $F_{f,0}$ funkcji f w 0 wyraża się wzorem

$$\tilde{\chi}(F_{f,0}) = (-1)^{n-1}(\nu_0(f_d) + (-1)^n)$$