**MATERIAŁY XIX KONFERENCJI SZKOLENIOWEJ
Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ
ZESPOLONEJ**

1998 **Łódź** **str. 19**

PRZYKŁAD ROBERTSA DO CZTERNASTEGO PROBLEMU HILBERTA

Andrzej Nowicki (Toruń)

1 Wstęp

Niech K będzie ciałem, i niech $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$ oraz $K(X) = K(x_1, \ldots, x_n)$ będą odpowiednio pierścieniem wielomianów i ciałem funkcji wymiernych nad K. Załóżmy, że L jest podciałem ciała $K(X)$ zawierającym K i rozważmy pierścień $R = L \cap K[X]$. Pierścień ten jest podpierścieniem pierścienia $K[X]$ zawierającym K. Czternastym problemem Hilberta jest następujące pytanie.

Pytanie 1.1. *Czy pierścień R jest skończenie generowany nad K ?*

W 1956 roku Nagata ([6], [7]) wykazał (konstruując odpowiedni przykład), że odpowiedź na to pytanie może być negatywna. Liczba zmiennych w przykładzie Nagaty jest równa $n = 2r^2$, gdzie $r \geqslant 4$. Najmniejszą taką liczbą jest $n = 32$.

Załóżmy teraz, że d jest K-derywacją pierścienia $K[X]$, tzn., $d : K[X] \to K[X]$ jest K-liniowym odwzorowaniem takim, że $d(ab) = ad(b) + bd(a)$, dla wszystkich $a, b \in K[X]$. Niech $K[X]^d$ oznacza *pierścień stałych* tej derywacji, tzn.:

$$K[X]^d = \{a \in K[X];\ d(a) = 0\}.$$

Łatwo sprawdzić, że $K[X]^d = L \cap K[X]$, gdzie L jest ciałem ułamków pierścienia $K[X]^d$. Występujące tu ciało L jest oczywiście podciałem ciała $K(X)$ i zawiera K. Mamy zatem szczególny przypadek czternastego problemu Hilberta:

Pytanie 1.2. *Czy pierścień $K[X]^d$ jest skończenie generowany nad K ?*

Jeśli charakterystyka ciała K jest dodatnia, to nie jest trudno wykazać, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna ([10]). Zakłóżmy dalej, że K jest ciałem charakterystyki zero.

W 1988 roku udowodniono (w [10]), że rozważany pierścień $K[X]^d$ jest skończenie generowany nad K w przypadku, gdy $n \leqslant 3$. Następnie Derksen [1] wykazał, że pierścień, występujący we wspomnianym wyżej przykładzie Nagaty, jest postaci $K[X]^d$. Wynika stąd, że (dla $n \geqslant 32$) istnieje K-derywacja pierścienia $K[X]$, której pierścień stałych nie jest skończenie generowany.

W 1990 roku Roberts [11] podał, dla $n = 7$, nowy kontrprzykład do czternastego problemu Hilberta. Później okazało sie (patrz [8] lub [9]), że pierścień występujący w kontrprzykładzie Robertsa jest pierścieniem stałych pewnej K-derywacji D, pierścienia wielomianów (nad K) siedmiu zmiennych. Deveney i Finston [2], w 1994 roku, opisali derywację D i podali inny dowód nieskończonej generowalności jej pierścienia stałych.

Z tych faktów wynika, że dla każdego $n \geqslant 7$, istnieje K-derywacja pierścienia $k[X]$, której pierścień stałych nie jest skończenie generowany nad K. Pozostał następujący otwarty problem.

Pytanie 1.3. *Niech d będzie K-derywacją pierścienia wielomianów $K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie $4 \leqslant n \leqslant 6$. Czy pierścień $K[X]^d$ jest skończenie generowany nad K ?*

W niniejszej pracy badamy dokładnie wspomnianą derywację D (podaną przez Deveneya i Finstona) i wykazujemy, że jej pierścień stałych nie jest skończenie generowany. Dowód, który przedstawiamy, został opracowany na podstawie pracy Robertsa [11].

2 Derywacja D i jej własności

Przez cały czas K jest ustalonym ciałem charakterystyki zero oraz $R = K[x, y, z]$ jest pierścieniem wielomianów nad K trzech zmiennych x, y, z. Ponadto,

$$\mathbb{A} = R[s, t, u, v] = K[x, y, z, s, t, u, v]$$

jest pierścieniem wielomianów nad K siedmiu zmiennych x, y, z, s, t, u, v. Ustalamy gradację na $\mathbb{A}$ taką, że zmienne x, y, z mają stopień 0, a pozostałe zmienne, s, t, u i v, mają stopień 1. Przez $\mathbb{A}_n$, dla $n \in \mathbb{N}_0$, oznaczamy grupę wszystkich wielomianów jednorodnych stopnia n. W szczególności $\mathbb{A}_0 = R$ oraz każde $\mathbb{A}_n$ jest grupą wszystkich zwykłych wielomianów jednorodnych nad R zmiennych s, t, u i v.

Zajmować się będziemy K-derywacją $D : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ zdefiniowaną równościami:

$$D(x) = 0, \qquad D(y) = 0, \qquad D(z) = 0,$$
$$D(s) = x^3, \qquad D(t) = y^3, \qquad D(u) = z^3, \qquad D(v) = x^2y^2z^2,$$

tzn., derywacja D ma postać:

$$D = x^3\frac{\partial}{\partial s} + y^3\frac{\partial}{\partial t} + z^3\frac{\partial}{\partial u} + x^2y^2z^2\frac{\partial}{\partial v}.$$

Pierścień stałych tej derywacji oznaczamy, tak jak zwykle, przez $\mathbb{A}^D$. Jest oczywiste, że D jest R-derywacją (tzn. $D(R) = 0$) oraz, że D jest derywacją lokalnie nilpotentną. Ponadto:

Stwierdzenie 2.1. *$D(\mathbb{A}_n) \subseteq \mathbb{A}_{n-1}$ dla $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Wystarczy sprawdzić to dla jednomianów. Niech $w = s^at^bu^cv^d$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$, $a + b + c + d = n$. Wtedy

$$D(w) = ax^3s^{a-1}t^bu^cv^d + by^3s^at^{b-1}u^cv^d + cz^3s^at^bu^{c-1}v^d + d(xyz)^2s^at^bu^cv^{d-1}.$$

Widzimy, że $D(w)$ jest sumą czterech jednomianów (nad R), z których każdy należy do $\mathbb{A}_{n-1}$. ⊠

Przez (x, y, z) oznaczamy ideał w R generowany przez zmienne x, y i z.

Stwierdzenie 2.2 ([11] Lemma 2). *$\mathbb{A}_n \cap \mathbb{A}^D \subseteq (x, y, z)\mathbb{A}_n$, dla $n \geqslant 1$.*

Dowód. Niech F będzie wielomianem należącym do $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{A}^D$, $n \geqslant 1$. Wielomian ten (ponieważ należy do $\mathbb{A}_n$) jest postaci

$$F = \sum_{a+b+c+d=n} F_{abcd} \cdot s^at^bu^cv^d,$$

gdzie elementy F_{abcd} należą do pierścienia R. Należy wykazać, że wszystkie elementy postaci F_{abcd} należą do ideału (x, y, z). Przypuśćmy, że tak nie jest.

Przypuśćmy, że pewien element $\alpha = F_{abcd}$ nie należy do (x, y, z). Wówczas

$$\alpha = F_{abcd} = \alpha' + r, \quad \text{gdzie } \alpha' \in (x, y, z) \quad \text{oraz } 0 \neq r \in K.$$

Ponieważ $a + b + c + d = n \geqslant 1$, więc co najmniej jedna z liczb a, b, c, d jest większa od zera.

Załóżmy, że $a > 0$. Jednomian $\alpha s^at^bu^cv^d$ występuje w sposób istotny w wielomianie F. Zatem w wielomianie $D(F)$ występuje jednomian postaci

$$ms^{a-1}t^bu^cv^d, \quad \text{gdzie } m \in R.$$

Zbadajmy wszystkie jednomiany tej postaci w $D(F)$. Takie jednomiany otrzymujemy z tych jednomianów występujących w F, które są postaci:

$$\alpha s^at^bu^cv^d, \quad \beta s^{a-1}t^{b+1}u^cv^d, \quad \gamma s^{a-1}t^bu^{c+1}v^d, \quad \delta s^{a-1}t^bu^cv^{d+1},$$

gdzie $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, przy czym $\alpha = \alpha' + r$. Założyliśmy, że $D(F) = 0$. Oznacza to, że współczynnik z R, występujący w $D(F)$ przy $s^{a-1}t^bu^cv^d$, musi być równy zero. Stąd otrzymujemy równość:

$$a(\alpha' + r)x^3 + (b + 1)\beta y^3 + (c + 1)\gamma z^3 + (d + 1)\delta x^2y^2z^2 = 0.$$

z której wynika sprzeczność: wielomian x^3 należy do ideału w R generowanego przez wielomiany

$$x^4,\ x^3y,\ x^3z,\ y^3,\ z^3,\ x^2y^2z^2.$$

Sprzeczność tę otrzymaliśmy przy założeniu, że $a > 0$. Do podobnych sprzeczności dochodzimy w przypadkach, gdy $b > 0$ lub $c > 0$ lub $d > 0$. ⊠

Stwierdzenie 2.3 ([11] Lemma 3). *Dla każdego $n \geqslant 0$ istnieje jednorodny wielomian F_n, należący do $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{A}^D$, w którym występuje jednomian xv^n ze współczynnikiem równym 1.*

Dowodem tego stwierdzenia zajmiemy się później. Teraz, przy pomocy tego stwierdzenia, udowodnimy główny wynik:

Twierdzenie 2.4 ([11]). *Pierścień $\mathbb{A}^D$ nie jest skończenie generowany nad K.*

Dowód. Przypuśćmy, że pierścień $\mathbb{A}^D$ jest skończenie generowany nad K. Derywacja D jest jednorodna (Stwierdzenie 2.1), istnieje więc skończony zbiór generatorów, z których każdy jest wielomianem jednorodnym. Niech m będzie maksymalnym stopniem spośród stopni wszystkich generatorów. Rozważmy liczbę naturalną n większą od m. Wiemy ze Stwierdzenia 2.3, że do $\mathbb{A}^D$ należy wielomian jednorodny $F = F_n$, stopnia n, w którym występuje jednomian xv^n ze współczynnikiem równym 1. Wielomian ten jest więc sumą iloczynów generatorów ze współczynnikami z ciała K. Ponieważ $n > m$, więc żaden z występujących iloczynów nie może składać się z tylko jednego czynnika. Każdy iloczyn ma więc co najmniej dwa czynniki, należy więc (na mocy Stwierdzenia 2.2) do $(x,y,z)^2\mathbb{A}_n$. Zatem $F \in (x,y,z)^2\mathbb{A}_n$ i w szczególności $xv^n \in (x,y,z)^2\mathbb{A}_n$. Stąd wynika sprzeczność: zmienna x należy do ideału $(x,y,z)^2$. ⊠

Musimy jeszcze udowodnić Stwierdzenie 2.3.

3 Uwagi i fakty przygotowawcze

Zmierzamy do wykazania, że dla każdego $n \geqslant 0$ istnieje wielomian F_n należący do $\mathbb{A}_n \cap \mathbb{A}^D$, w którym występuje jednomian xv^n ze współczynnikiem równym 1.

Niech $n \in \mathbb{N}_0$. Załóżmy, że wielomian F_n (którego szukamy) ma postać

$$F_n = F(n,0)v^n + F(n,1)v^{n-1} + F(n,2)v^{n-2} + \cdots + F(n,n-1)v^1 + F(n,n),$$

gdzie $F(n,0), F(n,1), \ldots, F(n,n)$ są wielomianami jednorodnymi należącymi do $R[s,t,u]$ (nie ma zmiennej v), których stopnie są odpowiednio równe $0, 1, \ldots, n$. Ponadto, $F(n,0) = x$.

Stwierdzenie 3.1. *Przy powyższych oznaczeniach następujące dwa warunki są równoważne.*

(1) $D(F_n) = 0$,

(2) $D(F(n,i)) = -(n-i+1)F(n,i-1)(xyz)^2$, *dla* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Dowód. Wynika to z następującego ciągu równości:

$$\begin{aligned}
0 &= D(F_n) \\
&= D\left(\sum_{i=0}^{n} F(n,i)v^{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} D\left(F(n,i)v^{n-i}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(D(F(n,i))v^{n-i}) + (n-i)F(n,i)(xyz)^2v^{n-i-1}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} D(F(n,i))v^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}(n-i)F(n,i)(xyz)^2v^{n-i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} D(F(n,i))v^{n-i} + \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)F(n,i)(xyz)^2v^{n-i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} D(F(n,i))v^{n-i} + \sum_{i=1}^{n}(n-i+1)F(n,i-1)(xyz)^2v^{n-i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(D(F(n,i)) + (n-i+1)F(n,i-1)(xyz)^2\right) v^{n-i}. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

Przykład 3.2. *Warunek* (2) *powyższego stwierdzenia spełniają wielomiany:*

$$\begin{aligned}
F(n,0) &= x, \\
F(n,1) &= -ny^2z^2s, \\
F(n,2) &= +\tbinom{n}{2}(x^2yz^4st + x^2y^4zsu - x^5yztu), \\
F(n,3) &= -\tbinom{n}{3}(x^4z^6st^2 + x^4y^3z^3stu + x^4y^6su^2 - x^7z^3t^2u - x^7y^3tu^2), \\
F(n,4) &= +\tbinom{n}{4}(x^3y^2z^8s^2t^2 - 2x^3y^5z^5s^2tu + x^3y^8z^2s^2u^2 + 2x^6y^2z^5st^2u \\
&= \quad +2x^6y^5z^2stu^2 - 3x^9y^2z^2t^2u^2), \\
F(n,5) &= -\tbinom{n}{5}(3x^2y^4z^{10}s^3t^2 - 6x^2y^7z^7s^3tu + 3x^2y^{10}z^4s^3u^2 - 2x^5yz^{10}s^2t^3 \\
&\quad +2x^5y^4z^7s^2t^2u + 2x^5y^7z^4s^2tu^2 - 2x^5y^{10}z^1s^2u^3 + 4x^8yz^7st^3u \\
&\quad -3x^8y^4z^4st^2u^2 + 4x^8y^7zstu^3 - 2x^{11}yz^4t^3u^2 - 2x^{11}y^4zt^2u^3).
\end{aligned}$$

$\boxtimes$

Z przykładu tego otrzymujemy poszukiwane wielomiany F_n dla $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,$ 4, 5. Zanotujmy te wielomiany dla $n = 0, 1, 2, 3$.

Przykład 3.3.

$$\begin{aligned}
F_0 &= x, \\
F_1 &= xv^1 - y^2z^2s, \\
F_2 &= xv^2 - 2y^2z^2sv + x^2yz^4st + x^2y^4zsu - x^5yztu, \\
F_3 &= xv^3 - 3y^2z^2sv^2 + 3(x^2yz^4st + x^2y^4zsu - x^5yztu)v \\
&\quad -(x^4z^6st^2 + x^4y^3z^3stu + x^4y^6su^2 - x^7z^3t^2u - x^7y^3tu^2). \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

4 Jednomiany dopuszczalne

Wszystkie jednomiany występujące w wielomianie F_n (obserwujemy to dla $n = 0, 1, \ldots, 5$) mają pewną wspólną własność. Jeśli G jest takim jednomianem, to wielomian $D^n(G)$ jest równy $D^n(xv^n)$ (z dokładnością do współczynnika z ciała K).

Przykład 4.1.

(1) $D^1(xv^1) = D^1(y^2z^2s) = x^3y^2z^2$,

(2) $D^2(xv^2) = D^2(y^2z^2sv) = D^2(x^2yz^4st) = D^2(x^2y^4zsu) = D^2(x^5yztu) = 2x^5y^4z^4$,

(3) $D^3(xv^3) = D^3(y^2z^2sv^2) = D^3(x^2yz^4stv) = D^3(x^2y^4zsuv) = \ldots = 6x^7y^6z^6$. $\boxtimes$

Zauważmy (patrz Stwierdzenie 2.1), że jeśli $G \in \mathbb{A}_n$, to $D^n(G) \in R$. Następne stwierdzenie podaje dokładniejsze informacje.

Stwierdzenie 4.2. *Jeśli $a+b+c+d=n$, to*

$$D^n\left(s^at^bu^cv^d\right) = n! \cdot x^{3a+2d}y^{3b+2d}z^{3c+2d}$$

.

Dowód. Z wzoru Leibniza wiemy, że

$$D^n(s^at^bu^cv^d) = \sum_{i+j+p+q=n} \langle i,j,p,q\rangle D^i(s^a)D^j(t^b)D^p(u^c)D^q(v^d),$$

gdzie $\langle i,j,p,q\rangle = \frac{(i+j+p+q)!}{i!\cdot j!\cdot p!\cdot q!}$. Stwierdzenie 2.1 implikuje, że $D^i(s^a) = 0$ dla $i > a$. Analogicznie $D^j(t^b) = 0$ dla $j > b$, $D^p(u^c) = 0$ dla $p > c$, $D^q(v^d) = 0$ dla $q > d$. Jest ponadto oczywiste, że $D^a(s^a) = a! \cdot x^{3a}$, $D^b(t^b) = b! \cdot y^{3b}$, $D^c(u^c) = c! \cdot z^{3c}$, $D^d(v^d) = d! \cdot (xyz)^{2d}$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} D^n(s^at^bu^cv^d) &= \langle a,b,c,d\rangle D^a(s^a)D^b(t^b)D^c(u^c)D^d(v^d) \\ &= \langle a,b,c,d\rangle \cdot a! \cdot b! \cdot c! \cdot d! \cdot x^{3a}y^{3b}z^{3c}(xyz)^{2d} \\ &= n! \cdot x^{3a+2d}y^{3b+2d}z^{3c+2d}. \quad \boxtimes \end{aligned}$$

Wniosek 4.3. *Niech $a,b,c,d,i,j,k \in \mathbb{N}_0$. Jeśli $a+b+c+d=n$, to*

$$D^n\left(x^iy^jz^ks^at^bu^cv^d\right) = n! \cdot x^{3a+2d+i}y^{3b+2d+j}z^{3c+2d+k}. \ \boxtimes$$

Wniosek 4.4. $D^n(xv^n) = n! \cdot x^{2n+1}y^{2n}z^{2n}$. $\boxtimes$

Niech i,j,k,a,b,c,d będą nieujemnymi liczbami całkowitymi. Załóżmy, że $a+b+c+d=n$
i rozważmy jednomian

$$G = (x^iy^jz^k)s^at^bu^cv^d.$$

Jest to jednomian należący do $\mathbb{A}_n$.

Definicja 4.5. Mówimy, że powyższy jednomian G jest *dopuszczalnym jednomianem stopnia* n, jeśli

$$D^n(G) = D^n(xv^n) = n! \cdot x^{2n+1}y^{2n}z^{2n}.$$

Stwierdzenie 4.6. *Jednomian* $G = (x^iy^jz^k)s^at^bu^cv^d$ *stopnia* n *(gdzie* $i, j, k, a, b, c, d \in \mathbb{N}_0$ *oraz* $a + b + c + d = n$*) jest dopuszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\text{(4.1)}\quad a \leqslant \left[\tfrac{2m+1}{3}\right], \quad b \leqslant \left[\tfrac{2m}{3}\right], \quad c \leqslant \left[\tfrac{2m}{3}\right], \quad (\textit{gdzie } m = n - d = a + b + c),$$

oraz

$$\text{(4.2)}\qquad i = 2m + 1 - 3a, \quad j = 2m - 3b, \quad k = 2m - 3c.$$

Przez $[x]$ *oznaczamy część całkowitą liczby* x.

Dowód. Z Wniosku 4.3 wynika, że jednomian G jest dopuszczalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x^{3a+2d+i}y^{3b+2d+j}z^{3c+2d+k} = x^{2n+1}y^{2n}z^{2n}.$$

Stąd otrzymujemy trzy równości:

$$3a + 2d + i = 2n + 1, \quad 3b + 2d + j = 2n, \quad 3c + 2d + k = 2n,$$

czyli:

$$i = 2(n - a - d) - a + 1, \quad j = 2(n - b - d) - b, \quad k = 2(n - c - d) - c.$$

Wiemy, że $a + b + c + d = n$. Zatem:

$$i = 2(b + c) - a + 1, \quad j = 2(a + c) - b, \quad k = 2(a + b) - c$$

i stąd, po uwzględnieniu równości $a + b + c = m = n - d$, otrzymujemy równości (4.2):

$$i = 2m + 1 - 3a, \quad j = 2m - 3b, \quad k = 2m - 3c.$$

Ponieważ i, j, k są nieujemnymi liczbami całkowitymi, więc: $2m+1 \geqslant 3a$, $2m \geqslant 3b$, $2m \geqslant 3c$, a zatem mamy nierówności (4.1):

$$a \leqslant \left[\tfrac{2m+1}{3}\right], \quad b \leqslant \left[\tfrac{2m}{3}\right], \quad c \leqslant \left[\tfrac{2m}{3}\right].$$

Wykazaliśmy więc, że jeśli G jest dopuszczalnym jednomianem stopnia n, to zachodzą warunki (4.1) i (4.2). Widzimy, na mocy powyższych rachunków, że zachodzi również implikacja w przeciwnym kierunku. ⊠

Ze stwierdzenia tego wynika, że dopuszczalny jednomian G (stopnia n) jest jednoznacznie wyznaczony przez liczby całkowite a, b, c. Zanotujmy to dokładniej:

Stwierdzenie 4.7. *Niech $n \in \mathbb{N}$. Niech (a,b,c) będzie trójką nieujemnych liczb całkowitych spełniających nierówności*

$$a \leqslant \left[\tfrac{2m+1}{3}\right], \quad b \leqslant \left[\tfrac{2m}{3}\right], \quad c \leqslant \left[\tfrac{2m}{3}\right],$$

gdzie $m = a+b+c \leqslant n$. Istnieje wtedy dokładnie jeden dopuszczalny jednomian G stopnia n, którego wykłandniki przy zmiennych s,t,u są odpowiednio równe a,b,c. Jednomian ten jest równy

$$(x^i y^j z^k) s^a t^b u^c v^{n-m},$$

gdzie $i = 2m+1-3a, \quad j = 2m-3b, \quad k = 2m-3c$. ⊠

Zauważmy jeszcze, że (na mocy powyższych stwierdzeń) liczby całkowite i,j,k, występujące w dopuszczalnym jednomianie nie zależą od d (czyli od wykładnika przy zmiennej v). Zależą one tylko od liczb a,b,c. Stąd wynikają, w szczególności, następujące dwa stwierdzenia.

Stwierdzenie 4.8. *Jeśli G jest dopuszczalnym jednomianem stopnia n, to $G \cdot v^p$ (gdzie $p \in \mathbb{N}$) jest dopuszczalnym jednomianem stopnia $n+p$.* ⊠

Stwierdzenie 4.9. *Jeśli $G = (x^i y^j z^k) s^a t^b u^c v^d$ jest dopuszczalnym jednomianem, to*

$$i+j+k = 3(a+b+c)+1. \quad ⊠$$

5 Jednomiany specjalne i jednomiany stowarzyszone

Jeśli $w \in \mathbb{A}$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to przez $w^{(n)}$ oznaczamy *n-tą podzieloną potęgę* wielomianu w, tzn.:

$$w^{(n)} = \tfrac{1}{n!} w^n.$$

Jednomianem specjalnym stopnia n nazywać będziemy każdy jednomian

$$(x^i y^j z^k) s^{(a)} t^{(b)} u^{(c)} v^{(d)} = \tfrac{1}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot d!} (x^i y^j z^k) s^a t^b u^c v^d,$$

taki, że $(x^i y^j z^k) s^a t^b u^c v^d$ jest dopuszczalnym jednomianem stopnia n. Jednomiany specjalne są to więc jednomiany dopuszczalne pomnożone przez pewne liczby wymierne. Przypomnijmy (patrz Stwierdzenie 4.7), że jednomiany dopuszczalne stopnia n (a zatem również jednomiany specjalne stopnia n) są jednoznacznie wyznaczone przez swoje liczby a,b,c.

Zbiór wszystkich jednomianów specjalnych stopnia n oznaczać będziemy przez S_n.

Niech $G = (x^i y^j z^k) s^{(a)} t^{(b)} u^{(c)} v^{(d)}$ będzie jednomianem specjalnym stopnia n. Rozpatrzmy następujące jednomiany stopnia $n-1$:

$$\begin{cases} (x^{i+3} y^j z^k) s^{(a-1)} t^{(b)} u^{(c)} v^{(d)}, & \text{o ile } a > 0, \\ (x^i y^{j+3} z^k) s^{(a)} t^{(b-1)} u^{(c)} v^{(d)}, & \text{o ile } b > 0, \\ (x^i y^j z^{k+3}) s^{(a)} t^{(b)} u^{(c-1)} v^{(d)}, & \text{o ile } c > 0, \\ (x^{i+2} y^{j+2} z^{k+2}) s^{(a)} t^{(b)} u^{(c)} v^{(d-1)}, & \text{o ile } d > 0. \end{cases}$$

Każdy z tych jednomianów nazywać będziemy *jednomianem stowarzyszonym z G*. Jeśli $n > 0$, to istnieje co najmniej jeden taki jednomian. Liczba wszystkich jednomianów stowarzyszonych z G nie jest większa od 4. Łatwo wykazać:

Stwierdzenie 5.1. *Jeśli $H_1, \dots H_p$, (gdzie $p \leqslant 4$) są wszystkimi jednomianami stowarzyszonymi z jednomianem specjalnym G, to $D(G) = H_1 + H_2 + \cdots + H_p$.* ⊠

Przez B_n oznaczać będziemy zbiór wszystkich jednomianów, stowarzyszonych z jednomianami specjalnymi stopnia n. Dany jednomian należy więc do zbioru B_n dokładnie wtedy, gdy jest jednomianem stowarzyszonym z pewnym jednomianem specjalnym stopnia n. Stopień każdego jednomianu należącego do B_n jest równy $n-1$.

Stwierdzenie 5.2. *Każdy jednomian należący do B_n jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wykładniki przy zmiennych s, t, u. Innymi słowy, załóżmy, że*

$$H_1 = \left(x^{i_1} y^{i_2} z^{i_3}\right) s^{(a_1)} t^{(a_2)} u^{(a_3)} v^{(a_4)}, \quad H_2 = \left(x^{j_1} y^{j_2} z^{j_3}\right) s^{(b_1)} t^{(b_2)} u^{(b_3)} v^{(b_4)}$$

są jednomianami należącymi do B_n. Jeśli $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$, to $H_1 = H_2$.

Dowód. Ponieważ jednomiany H_1 i H_2 mają ten sam stopień, równy $n-1$, więc:

$$a_4 = (n-1) - (a_1 + a_2 + a_3) = (n-1) - (b_1 + b_2 + b_3) = b_4,$$

czyli $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (b_1, b_2, b_3, b_4)$. Należy zatem wykazać, że $(i_1, i_2, i_3) = (j_1, j_2, j_3)$. W tym celu udowodnimy, że

$$(i_1, i_2, i_3) = (2a_2 + 2a_3 - a_1 + 3,\ 2a_1 + 2a_3 - a_2 + 2,\ 2a_1 + 2a_2 - a_3 + 2).$$

Z definicji jednomianu stowarzyszonego wynika, że jednomian H_1 jest stowarzyszony z jednomianem specjalnym (stopnia n), którego wykładniki przy s, t, u, v tworzą jedną z następujących czwórek:

$$(a_1 + 1, a_2, a_3, a_4), \quad (a_1, a_2 + 1, a_3, a_4), \quad (a_1, a_2, a_3 + 1, a_4), \quad (a_1, a_2, a_3, a_4 + 1).$$

Rozważmy każdy z tych przypadków i skorzystajmy ze Stwierdzenia 4.7.

Przypadek $(a_1 + 1, a_2, a_3, a_4)$:

$$\begin{aligned} (i_1, i_2, i_3) &= (2(n - a_4) + 1 - 3(a_1 + 1) + 3,\ 2(n - a_4) - 3a_2,\ 2(n - a_4) - 3a_3), \\ &= (2(a_1 + a_2 + a_3 + 1) + 1 - 3a_1,\ 2(a_1 + a_2 + a_3 + 1) - 3a_2, \\ &\quad\ 2(a_1 + a_2 + a_3 + 1) - 3a_3), \\ &= (2a_2 + 2a_3 - a_1 + 3,\ 2a_1 + 2a_3 - a_2 + 2,\ 2a_1 + 2a_2 - a_3 + 2). \end{aligned}$$

Przypadek (a_1, a_2+1, a_3, a_4):

$$\begin{aligned}(i_1,i_2,i_3) &= (2(n-a_4)+1-3a_1,\ 2(n-a_4)-3(a_2+1)+3,\ 2(n-a_4)-3a_3),\\ &= (2(a_1+a_2+a_3+1)+1-3a_1,\ 2(a_1+a_2+a_3+1)-3a_2,\\ &\quad 2(a_1+a_2+a_3+1)-3a_3),\\ &= (2a_2+2a_3-a_1+3,\ 2a_1+2a_3-a_2+2,\ 2a_1+2a_2-a_3+2).\end{aligned}$$

Przypadek (a_1, a_2, a_3+1, a_4):

$$\begin{aligned}(i_1,i_2,i_3) &= (2(n-a_4)+1-3a_1,\ 2(n-a_4)-3a_2,\ 2(n-a_4)-3(a_3+1)+3),\\ &= (2(a_1+a_2+a_3+1)+1-3a_1,\ 2(a_1+a_2+a_3+1)-3a_2,\\ &\quad 2(a_1+a_2+a_3+1)-3a_3),\\ &= (2a_2+2a_3-a_1+3,\ 2a_1+2a_3-a_2+2,\ 2a_1+2a_2-a_3+2).\end{aligned}$$

Przypadek (a_1, a_2, a_3, a_4+1):

$$\begin{aligned}(i_1,i_2,i_3) &= (2(n-(a_4+1))+1-3a_1+2,\ 2(n-(a_4+1))-3a_2+2,\\ &\quad 2(n-(a_4+1))-3a_3+2),\\ &= (2(a_1+a_2+a_3)+1-3a_1+2,\ 2(a_1+a_2+a_3)-3a_2+2,\\ &\quad 2(a_1+a_2+a_3)-3a_3+2),\\ &= (2a_2+2a_3-a_1+3,\ 2a_1+2a_3-a_2+2,\ 2a_1+2a_2-a_3+2).\end{aligned}$$

Widzimy zatem, że w każdym przypadku ciągi (i_1, i_2, i_3) są takie same. Ponieważ jednomian H_2 powstaje w ten sam sposób, więc stąd wynika, że $(i_1, i_2, i_3) = (j_1, j_2, j_3)$. Zatem $H_1 = H_2$. ⊠

W dowodzie powyższego stwierdzenia wykazaliśmy:

Stwierdzenie 5.3. *Jeśli* $\left(x^{i_1}y^{i_2}z^{i_3}\right)s^{(a_1)}t^{(a_2)}u^{(a_3)}v^{(a_4)}$ *jest jednomianem należącym do* B_n*, to*

$$(i_1, i_2, i_3) = (2a_2+2a_3-a_1+3, 2a_1+2a_3-a_2+2, 2a_1+2a_2-a_3+2). \boxtimes$$

6 Macierz odwzorowania $\mathbf{D}_n$

Niech $n \in \mathbb{N}$. Wyróżniliśmy dwa zbiory jednomianów w $\mathbb{A}$. Pierwszym z nich jest zbiór S_n, jednomianów specjalnych stopnia n. Drugim jest zbiór B_n, wszystkich jednomianów stowarzyszonych z jednomianami należącymi do S_n. Rozważmy teraz K-podprzestrzenie liniowe w $\mathbb{A}$ rozpięte na tych zbiorach. Oznaczmy te podprzestrzenie odpowiednio przez $\mathbb{S}_n$ i $\mathbb{B}_n$. Są to przestrzenie skończenie wymiarowe (zbiory S_n i B_n są bowiem skończone).

Wiemy (patrz Stwierdzenie 5.1), że $D(\mathbb{S}_n) \subseteq \mathbb{B}_n$. Niech D_n oznacza odwzorowanie D obcięte do $\mathbb{S}_n$. Mamy zatem K-liniowe przekształcenie

$$D_n : \mathbb{S}_n \to \mathbb{B}_n$$

takie, że $D_n(w) = D(w)$ dla wszystkich $w \in \mathbb{S}_n$. Badać będziemy teraz macierz przekształcenia D_n. Spójrzmy najpierw na kilka przykładów.

Przykład 6.1. Niech $\mathbf{n = 2}$. Wiemy, że jednomiany specjalne stopnia 2 są jednoznacznie wyznaczone przez trójki (a, b, c) nieujemnych liczb całkowitych takich, że $a \leqslant [(2m+1)/3]$, $b \leqslant [2m/3]$, $c \leqslant [2m/3]$, gdzie $a + b + c = m \leqslant 2$.

Dla $m = 2$ mamy: $a + b + c = 2$ oraz $a, b, c \leqslant 1$. W tym przypadku mamy trzy trójki $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ oraz $(0, 1, 1)$, z których otrzymujemy (patrz Stwierdzenie 4.7) trzy jednomiany specjalne stopnia 2:

$$\begin{aligned} 110^0 &= (x^2yz^4)s^{(1)}t^{(1)}u^{(0)}v^{(0)}, \\ 101^0 &= (x^2y^4z)s^{(1)}t^{(0)}u^{(1)}v^{(0)}, \\ 011^0 &= (x^5yz)s^{(0)}t^{(1)}u^{(1)}v^{(0)}. \end{aligned}$$

Dla $m = 1$ mamy: $a + b + c = 1$ oraz $a \leqslant 1$, $b \leqslant 0$, $c \leqslant 0$. W tym przypadku mamy tylko jedną trójkę: $(1, 0, 0)$ i z niej powstaje jednomian specjalny

$$100^1 = (y^2z^2)s^{(1)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(1)}.$$

Dla $m = 0$ otrzymujemy tylko jeden jednomian specjalny:

$$000^2 = (x)s^{(0)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(2)} = xv^{(2)}.$$

Zbiór S_2 składa się zatem z pięciu jednomianów: 110^0, 101^0, 011^0, 100^1, 000^2.

Zbadajmy teraz zbiór B_2, jednomianów stowarzyszonych z powyższymi jednomianami. Wypiszmy jeszcze raz wszystkie jednomiany specjalne i obok nich wszystkie jednomiany z nimi stowarzyszone.

$$\begin{array}{lcll} 110^0 & : & 100_0 = (x^2y^4z^4)s^{(1)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(0)}, & 010_0 = (x^5yz^4)s^{(0)}t^{(1)}u^{(0)}v^{(0)}; \\ 101^0 & : & 100_0 = (x^2y^4z^4)s^{(1)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(0)}, & 001_0 = (x^5y^4z)s^{(0)}t^{(0)}u^{(1)}v^{(0)}; \\ 011^0 & : & 010_0 = (x^5yz^4)s^{(0)}t^{(1)}u^{(0)}v^{(0)}, & 001_0 = (x^5y^4z)s^{(0)}t^{(0)}u^{(1)}v^{(0)}; \\ 100^1 & : & 100_0 = (x^2y^4z^4)s^{(1)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(0)}, & 000_1 = (x^3y^2z^2)s^{(0)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(1)}; \\ 000^2 & : & 000_1 = (x^3y^2z^2)s^{(0)}t^{(0)}u^{(0)}v^{(1)}. & \end{array}$$

Zbiór B_2 składa się więc z czterech jednomianów: 100_0, 010_0, 001_0 i 000_1.

Rozpatrzmy teraz odwzorowanie $D_2 : \mathbb{S}_2 \to \mathbb{B}_2$. Dla elementów bazowych (czyli dla jednomianów specjalnych) mamy następujące równości, (porównaj Stwierdzenie 5.1):

$$\begin{array}{lclll} D_2(110^0) &=& 100_0 + 010_0, & D_2(101^0) &=& 100_0 + 001_0, \\ D_2(011^0) &=& 010_0 + 001_0, & D_2(100^1) &=& 100_0 + 000_1, \\ D_2(000^2) &=& 000_1. & & & \end{array}$$

Odwzorowanie D_2 ma zatem (w rozważanych bazach) macierz, którą symbolicznie zapisujemy w następujący sposób:

	110^0	101^0	011^0	100^1	000^2
100_0	1	1	0	1	0
010_0	1	0	1	0	0
001_0	0	1	1	0	0
000_1	0	0	0	1	1

Zakończyliśmy omawianie przykładu dla $n = 2$. ⊠

Przykład 6.2. Niech $\mathbf{n = 3}$. Jednomiany specjalne stopnia 3 są jednoznacznie wyznaczone przez trójki (a, b, c) nieujemnych liczb całkowitych takich, że $a \leqslant [(2m + 1)/3]$, $b \leqslant [2m/3]$, $c \leqslant [2m/3]$, gdzie $a + b + c = m \leqslant 3$.

Dla $m = 3$ mamy: $a+b+c = 3$ oraz $a, b, c \leqslant 2$. W tym przypadku mamy siedem trójek: $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(1, 2, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(0, 2, 1)$ i $(0, 1, 2)$, z których otrzymujemy (patrz Stwierdzenie 4.7) siedem jednomianów specjalnych stopnia 3. Jednomiany te oznaczać będziemy symbolicznie odpowiednio przez abc^0:

$$\begin{array}{lllllll} 210^0 & = & (xy^3z^6)s^{(2)}t^{(1)}, & \quad & 201^0 & = & (xy^6z^3)s^{(2)}u^{(1)}, \\ 120^0 & = & (x^4z^6)s^{(1)}t^{(2)}, & & 111^0 & = & (x^4y^3z^3)s^{(1)}t^{(1)}u^{(1)}, \\ 102^0 & = & (x^4y^6)s^{(1)}u^{(2)}, & & 021^0 & = & (x^7z^3)t^{(2)}u^{(1)}, \\ 012^0 & = & (x^7y^3)t^{(1)}u^{(2)}. & & & & \end{array}$$

Dla $m = 2$ mamy: $a+b+c = 2$ oraz $a, b, c \leqslant 1$. Sytuacja jest dokładnie taka sama, jak dla $m = 2$ w Przykładzie 6.1 (dla $n = 2$). W tym przypadku mamy trzy trójki $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ oraz $(0, 1, 1)$, z których otrzymujemy trzy jednomiany specjalne stopnia 3:

$$\begin{array}{lll} 110^1 & = & (x^2yz^4)s^{(1)}t^{(1)}v^{(1)}, \\ 101^1 & = & (x^2y^4z)s^{(1)}u^{(1)}v^{(1)}, \\ 011^1 & = & (x^5yz)t^{(1)}u^{(1)}v^{(1)}. \end{array}$$

Dla $m = 1$ mamy: $a+b+c = 1$ oraz $a \leqslant 1$, $b \leqslant 0$, $c \leqslant 0$. Sytuacja jest dokładnie taka sama, jak dla $m = 1$ w Przykładzie 6.1 (dla $n = 2$). W tym przypadku mamy tylko jedną trójkę: $(1, 0, 0)$ i z niej powstaje jednomian specjalny: $100^2 = (y^2z^2)s^{(1)}v^{(2)}$.
Dla $m = 0$ otrzymujemy tylko jeden jednomian specjalny: $000^3 = (x)v^{(3)}$.
Zbiór S_3 składa się zatem z dwunastu jednomianów:

$$210^0, 201^0, 120^0, 111^0, 102^0, 021^0, 012^0, 110^1, 101^1, 011^1, 100^2, 000^3.$$

Zbadajmy teraz zbiór B_3, jednomianów stowarzyszonych z powyższymi jednomianami. Wiemy (Stwierdzenia 5.2, 5.3), że jednomiany stowarzyszone są jednoznacznie wyznaczone przez wykładniki p, q, r stojące odpowiednio przy zmiennych s, t, u. Wykładnik przy v jest wtedy równy $d = (n-1) - p - q - r$. Taki jednomian stowarzyszony oznaczać będziemy symbolicznie przez pqr_d.

Wypiszmy jeszcze raz wszystkie jednomiany specjalne stopnia 3 i obok nich wszystkie jednomiany z nimi stowarzyszone.

$$\begin{array}{lllllll} 210^0 & : & 200_0,\ 110_0; & \quad & 201^0 & : & 200_0,\ 101_0; \\ 120^0 & : & 110_0,\ 020_0; & & 111^0 & : & 110_0,\ 101_0,\ 011_0; \\ 102^0 & : & 101_0,\ 002_0; & & 021^0 & : & 020_0,\ 011_0; \\ 012^0 & : & 011_0,\ 002_0; & & 110^1 & : & 110_0,\ 100_1,\ 010_1; \\ 101^1 & : & 101_0,\ 100_1,\ 001_1; & & 011^1 & : & 011_0,\ 010_1,\ 001_1; \\ 100^2 & : & 100_1,\ 000_2; & & 000^3 & : & 000_2. \end{array}$$

Zbiór B_3 składa się więc z 10 jednomianów:

$$200_0, 110_0, 101_0, 020_0, 011_0, 002_0, 100_1, 010_1, 001_1, 000_2.$$

Odwzorowanie $D_3 : \mathbb{S}_3 \to \mathbb{B}_3$ ma zatem (w rozważanych bazach) macierz, którą symbolicznie zapisujemy w następujący sposób:

	210^0	201^0	120^0	111^0	102^0	021^0	012^0	110^1	101^1	011^1	100^2	000^3
200_0	1	1										
110_0	1		1	1				1				
101_0		1		1	1				1			
020_0			1			1						
011_0				1		1	1			1		
002_0					1		1					
100_1								1	1		1	
010_1								1		1		
001_1									1	1		
000_2											1	1

Zaznaczono tylko jedynki. W miejscach pustych stoją zera. ⊠

Przykład 6.3. Niech $\mathbf{n = 4}$. Zbiór S_4 składa się z 20 jednomianów:

$$
\begin{aligned}
&310^0, 301^0, 220^0, 211^0, 202^0, 121^0, 112^0, 022^0,\\
&210^1, 201^1, 120^1, 111^1, 102^1, 021^1, 012^1,\\
&110^2, 101^2, 011^2,\\
&100^3,\\
&000^4.
\end{aligned}
$$

Natomiast zbiór B_4 ma 18 jednomianów:

$$
\begin{aligned}
&300_0, 210_0, 201_0, 120_0, 111_0, 102_0, 021_0, 012_0,\\
&200_1, 110_1, 101_1, 020_1, 011_1, 002_1,\\
&100_2, 010_2, 001_2,\\
&000_3.
\end{aligned}
$$

Odwzorowanie $D_4 : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{B}_4$ ma (w rozważanych bazach) macierz:

1	1																		
1		1	1					1											
	1		1	1					1										
		1			1					1									
			1		1	1					1								
				1		1						1							
					1		1						1						
						1	1							1					
								1	1										
								1		1	1				1				
									1		1	1				1			
										1			1						
											1		1	1			1		
												1		1					
															1	1		1	
															1		1		
																1	1		
																		1	1

Zaznaczono tylko jedynki. W miejscach pustych stoją zera. ⊠

Niech teraz n będzie dowolną liczbą naturalną. Porządkujemy elementy zbioru S_n w taki sposób by potęgi zmiennej v nie malały. Podobny porządek wprowadzamy dla elementów zbioru B_n. Grupujemy ponadto razem wszystkie jednomiany z tą samą potęgą zmiennej v. Wówczas macierz odwzorowania $D_n : \mathbb{S}_n \to \mathbb{B}_n$ ma następującą blokową postać:

$$M = \begin{bmatrix} M_0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & N_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & N_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & M_{n-2} & N_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

Każda z występujących tu macierzy M_d (dla $d = 0, 1, \dots, n-1$) ma wymiar $p_d \times q_d$, gdzie p_d jest liczbą wszystkich jednomianów w zbiorze B_n posiadających przy zmiennej v wykładnik d, natomiast q_d jest liczbą wszystkich jednomianów w zbiorze S_n posiadających przy zmiennej v wykładnik d. Każda macierz postaci N_{d+1} (dla $d = 0, 1, \dots, n-1$) ma wymiar $p_d \times q_{d+1}$.
W szczególności, ostatnia macierz N_n jest wymiaru 1×1 i jest równa [1].

Stwierdzenie 6.4. *Rząd każdej macierzy* M_d *(dla* $d = 0, 1, \dots, n-1$*), jest równy liczbie* p_d*, czyli liczbie wszystkich wierszy macierzy* M_d*.*

Dowodem tego stwierdzenia zajmiemy się w następnych rozdziałach.

Zmierzamy do dowodu Stwierdzenia 2.3, z którego skorzystaliśmy w dowodzie głównego wyniku (Twierdzenia 2.4). Wykażemy teraz, że stwierdzenie to wynika ze Stwierdzenia 6.4.

Dowód Stwierdzenia 2.3. Rozpatrzmy macierz M', powstałą z macierzy M przez odrzucenie ostatniej kolumny. Rząd macierzy M' jest równy (na mocy Stwierdzenia 6.4) liczbie wszystkich wierszy tej macierzy. Macierz M ma zatem taki sam rząd co macierz M'. Oznacza to w szczególności, że ostatnia kolumna macierzy M jest kombinacją liniową (nad ciałem K) pozostałych kolumn tej macierzy. Mamy zatem równość postaci

$$L = \alpha_1 E_1 + \dots + \alpha_r E_r,$$

w której L jest ostatnią kolumną macierzy M (czyli kolumną składającą się z samych zer i jednej jedynki), a $E_1, \dots, E_r$ są wszystkimi pozostałymi kolumnami. Elementy $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ należą do ciała K.

Wiemy, że kolumny macierzy M odpowiadają jednomianom specjalnym stopnia n, czyli elementom zbioru S_n. Innymi słowy, każda kolumna jest wektorem przedstawiającym w bazie B_n element postaci $D_n(w)$, gdzie $w \in S_n$. W szczególności ostatnia kolumna (czyli kolumna, którą oznaczyliśmy przez L) dotyczy jednomianu specjalnego $xv^{(n)}$. Pozostałe jednomiany specjalne oznaczmy odpowiednio przez $w_1, \ldots, w_r$ i rozważmy wielomian $F_n = (n!) \cdot F$, gdzie

$$F = xv^{(n)} - \alpha_1 w_1 - \alpha_2 w_2 - \cdots - \alpha_r w_r.$$

Wielomian F_n jest jednorodny i jego stopień jest równy n, należy więc do $\mathbb{A}_n$. W wielomianie tym występuje jednomian xv^n ze współczynnikiem równym 1. Ponadto:

$$D(F_n) = D_n(n! \cdot F) = n! \cdot (L - \alpha_1 E_1 - \ldots - \alpha_r E_r) = n! \cdot 0 = 0.$$

Zatem $F_n \in \mathbb{A}^D$ i to kończy dowód Stwierdzenia 2.3. ⊠

Pozostało do udowodnienia Stwierdzenie 6.4.

7 Trójkąty i sześciokąty

Niech d będzie ustaloną liczbą ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n)$ i niech $m = n - d$. Rozważmy macierz M_d. Musimy wykazać (patrz Stwierdzenie 6.4), że wszystkie wiersze tej macierzy są liniowo niezależne nad K. Wiemy, że macierz ta ma tyle wierszy ile jest wszystkich jednomianów w zbiorze B_n posiadających przy zmiennej v wykładnik d. Wiemy również (na mocy Stwierdzeń 5.2 i 5.3), że jednomiany takie są jednoznacznie wyznaczone przez swoje wykładniki a_1, a_2, a_3 przy zmiennych s, t, u. Suma tych wykładników (czyli $a_1 + a_2 + a_3$) jest w tym przypadku stała i wynosi $(n-1) - d = m - 1$. Wykładniki te spełniają jeszcze pewne warunki, wynikające z definicji jednomianów stowarzyszonych z jednomianami specjalnymi.

Wiersze macierzy M_d można więc indeksować pewnymi jednomianami stopnia $m - 1$, postaci $s^{a_1} t^{a_2} u^{a_3}$.

Uporządkujmy wszystkie jednomiany (zmiennych s, t, u) ustalonego stopnia w naturalną trójkątną postać. Dla przykładu jednomiany stopnia 2 można uporządkować następująco:

$$\begin{array}{c} s^2 \\ st \quad su \\ t^2 \quad tu \quad u^2 \end{array}$$

Oto takie uporządkowania dla stopni $3, 4$ i 5

$$\begin{array}{c} s^3 \\ s^2t \quad s^2u \\ st^2 \quad stu \quad su^2 \\ t^3 \quad t^2u \quad tu^2 \quad u^3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} s^4 \\ s^3t \quad s^3u \\ s^2t^2 \quad s^2tu \quad s^2u^2 \\ st^3 \quad st^2u \quad stu^2 \quad su^3 \\ t^4 \quad t^3u \quad t^2u^2 \quad tu^3 \quad u^4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} s^5 \\ s^4t \quad s^4u \\ s^3t^2 \quad s^3tu \quad s^3u^2 \\ s^2t^3 \quad s^2t^2u \quad s^2tu^2 \quad s^2u^3 \\ st^4 \quad st^3u \quad st^2u^2 \quad stu^3 \quad su^4 \\ t^5 \quad t^4u \quad t^3u^2 \quad t^2u^3 \quad tu^4 \quad t^5 \end{array}$$

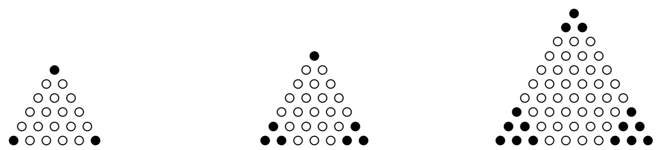
W podobny sposób porządkujemy wszystkie jednomiany ustalonego stopnia. Takie uporządkowanie rozważa Roberts w [11]. Wystarczy zaznaczać tylko odpowiednie wykładniki. Na przykład dla jednomianów mamy wtedy trójkąt:

$$\begin{array}{c} 500 \\ 410 \quad 401 \\ 320 \quad 311 \quad 302 \\ 230 \quad 221 \quad 212 \quad 203 \\ 140 \quad 131 \quad 122 \quad 113 \quad 104 \\ 050 \quad 041 \quad 032 \quad 023 \quad 014 \quad 005 \end{array}$$

Wyjaśniliśmy już, że wiersze macierzy M_d można indeksować rozważanymi jednomianami stopnia $m-1$. Pewne z nich należy jednak odrzucić. Zależy to tylko od liczby m. Wynika to z własności jednomianów specjalnych i definicji jednomianów stowarzyszonych z jednomianami specjalnymi.

Następujące rysunki przedstawiają schematycznie odpowiednie trójkąty wraz z odrzuconymi jednomianami. Jednomiany odrzucone zaznaczono tłustą kropką.

$m-1=1$ $\quad$ $m-1=2$ $\quad$ $m-1=3$ $\quad$ $m-1=4$



$m-1=5$ $\quad$ $m-1=6$ $\quad$ $m-1=9$

Powstają sześciokąty (trójkąty z obciętymi rogami). Rozpatrzmy, przy ustalonym m, wielokąt powyższej postaci dla $m-1$.

Definiujemy dwie liczby naturalne p i q. Liczba p jest liczbą wszystkich nietłustych kropek (czyli kropek postaci $\circ$) występujących w pierwszym górnym nietłustym wierszu. Liczba q jest liczbą wszystkich nietłustych kropek występujących w ostatnim wierszu. Tabelka przedstawia liczby p i q dla wielokątów z powyższych przykładów.

$m-1$	p	q
1	1	2
2	1	3
3	1	2
4	2	3
5	2	4
6	2	3
9	3	4

Stwierdzenie 7.1. $p = m - [(2m+1)/3]$, $q = 2[2m/3] - m + 2$.

Dowód. Przy powyższych założeniach zmienna s występuje z maksymalnym wykładnikiem równym $[(2m+1)/3]$. Liczba tłustych wierszy występujących w górnym rogu trójkąta jest więc równa $(m-1) - [(2m+1)/3]$. Zatem $p = (m-1) - [(2m+1)/3] + 1 = m - [(2m+1)/3]$.

Rachunki dla liczby q są podobne. Ostatni wiersz ma m kropek (tłustych i nietłustych). Z lewej strony jest $(m-1)-[2m/3]$ kropek tłustych i tyle samo kropek tłustych jest z prawej strony. Zatem: $q = m-2((m-1)-[2m/3]) = 2[2m/3]-m+2$. $\boxtimes$

Stwierdzenie 7.2. *Liczba q jest zawsze większa od liczby p.*

Dowód. Należy wykazać, że $2[2m/3]-m+2 > m-[(2m+1)/3]$, (skorzystaliśmy ze Stwierdzenia 7.1) czyli, że: $2[2m/3] + [(2m+1)/3] + 2 > 2m$. Rozpatrujemy trzy przypadki:

$$\begin{array}{lcl} m = 3k & : & 2[2m/3] + [(2m+1)/3] + 2 = 6k + 2 = 2m + 2 > 2m; \\ m = 3k+1 & : & 2[2m/3] + [(2m+1)/3] + 2 = 6k + 3 = 2m + 1 > 2m; \\ m = 3k+2 & : & 2[2m/3] + [(2m+1)/3] + 2 = 6k + 5 = 2m + 1 > 2m. \quad \boxtimes \end{array}$$

8 Liniowa niezależność wierszy macierzy $\mathbf{M}_d$

Niech, tak jak w poprzednim rozdziale, d będzie ustaloną liczbą ze zbioru $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ i niech $m = n - d$. Rozważmy macierz M_d.

Zmierzamy do wykazania, że wszystkie wiersze tej macierzy są liniowo niezależne nad K. Zaznaczmy, że wyrazami macierzy M_d są tylko zera i jedynki. Każda kolumna tej macierzy ma co najwyżej trzy jedynki. To samo dotyczy każdego wiersza.

Wyjaśnialiśmy już niejednokrotnie, że macierz M_d nie zależy od d, a tylko zależy od liczby $m = n-d$. Możemy więc w dalszym ciągu założyć, że $d = 0$, czyli $m = n$. Wystarczy zatem udowodnić, że wiersze macierzy M_0 są liniowo niezależne nad k.

Wiemy, z poprzedniego rozdziału, że każda taka macierz (w szczególności macierz M_0) ma tyle wierszy ile jest nietłustych kropek w wielokącie odpowiadającym liczbie $m-1$.

Oznaczmy nietłuste kropki występujące w pierwszy górnym nietłustym wierszu (pamiętamy, że jest ich p) odpowiednio przez $(1,1)$, $(1,2)$, $\ldots, (1,p)$. Kropki w następnym wierszu ozanaczać będziemy odpowiednio przez $(2,1)$, $(2,2)$, $(2,3), \ldots$. Kropki w trzecim wierszu oznaczamy jako $(3,1), (3,2), \ldots$, itd. Takie, oznaczenia stosujemy aż do ostatniego wiersza, przy czym nie zważamy na to, czy kropki są tłuste czy nietłuste. Tłuste kropki w dolnych odrzuconych rogach mają też swoje oznaczenia.

Rozważany wielokąt, czyli zbiór wszystkich nietłustych kropek, oznaczmy przez B. Zdanie "$(i,j) \in B$" oznacza więc, że kropka (i,j) występuje w wielokącie i jest nietłusta.

Nietłustych kropek jest tyle ile jest wierszy w macierzy M_0. Wiersz macierzy M_0 odpowiadający kropce $(i,j) \in B$ oznaczać będziemy przez $W_{(i,j)}$.

Rozważmy teraz następującą równość:

$$\sum_{(i,j)\in B} \gamma(i,j) \cdot W_{(i,j)} = 0, \tag{8.1}$$

w której wszystkie elementy postaci $\gamma(i,j)$ należą do ciała K.

Stwierdzenie 8.1. *Każdy element postaci $\gamma(i,j)$, występujący w równości* (8.1), *jest równy zero.*

Ze stwierdzenia tego wynika, że wszystkie wiersze macierzy M_0 (a stąd, że wszystkie wiersze każdej macierzy postaci M_d) są liniowo niezależne nad K. Stąd wynika zatem Stwierdzenie 6.4, jedyne stwierdzenie, które pozostało do udowodnienia.

Teraz wystarczy udowodnić tylko Stwierdzenie 8.1. W tym celu zbadajmy dokładniej elementy postaci $\gamma(i, j)$. Wstawmy w każde (nietłuste) miejsce (i, j) wielokąta B element $\gamma(i, j)$. Otrzymujemy w ten sposób wielokątną tablicę z elementami ciała K, którą oznaczać będziemy przez γ. Tablica ta posiada pewne własności, które przypominają własności trójkąta Pascala. Mówi o tym następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 8.2.

(1) *Suma każdych trzech elementów tablicy γ, stojących w sąsiednich punktach tworzących trójkąt postaci ∇, jest równa zero.*

(2) *Suma każdych dwóch sąsiednich elementów tablicy γ, leżących w nietłustych punktach na brzegu głównego trójkąta, jest równa zero* (*dotyczy to również podstawy trójkąta*).

Dowód. Każdy wiersz macierzy M_0 ma tyle współrzędnych ile jest w tej macierzy kolumn, czyli tyle ile jest jednomianów specjalnych stopnia m z zerowym wykładnikiem przy zmiennej v. Każda kolumna ma co najwyżej trzy jedynki, a pozostałe miejsca są zerowe.

Kolumna, która ma dokładnie trzy jedynki pochodzi od takiego specjalnego jednomianu G, w którym każda ze zmiennych s, t, u występuje z niezerowym wykładnikiem (gdyż wtedy i tylko wtedy wielomian $D(G)$ jest sumą dokładnie trzech jednomianów stowarzyszonych). Rozpisując równość (8.1) względem takiej kolumny (czyli względem współrzędnej odpowiadającej tej kolumnie) otrzymujemy równość postaci

$$\gamma(i, j) + \gamma(i, j + 1) + \gamma(i + 1, j + 1) = 0.$$

Elementy $\gamma(i, j)$, $\gamma(i, j+1)$ oraz $\gamma(i+1, j+1)$ stoją w punktach tworzących trójkąt postaci ∇. Jest oczywiste, że każda taka równość powstaje w ten sposób. Udowodniliśmy zatem (1).

Kolumna, która ma dokładnie dwie jedynki pochodzi od takiego specjalnego jednomianu (z zerowym wykładnikiem przy zmiennej v), w którym nie występuje dokładnie jedna ze zmiennych s, t, u. Rozpisując równość (8.1) względem takiej kolumny otrzymujemy równości, o których mowa w (2). $\boxtimes$

Poniższy przykład jest ilustracją Stwierdzenia 8.2 i jego dowodu dla $m - 1 = 3$.

Przykład 8.3. Niech $n = m = 4$. Jednomianami specjalnymi stopnia 4 bez zmiennej v są: 310^0, 301^0, 220^0, 211^0, 202^0, 121^0, 112^0, 022^0 (patrz Przykład 6.3). Oznaczać je będziemy teraz bez wykładnika zerowego: 310, 301, 220, 211, 202, 121, 112, 022. Jednomiany stowarzyszone z tymi jednomianami, to: 300_0, 210_0, 201_0, 120_0, 111_0, 102_0,

021_0, 012_0. Opuszczać będziemy dolne zero. Macierz M_0 ma w tym przypadku postać:

	310	301	220	211	202	121	112	022,
300	1	1						
210	1		1	1				
201		1		1	1			
120			1			1		
111				1		1	1	
102					1		1	
021						1		1
012							1	1

Wielokąt dotyczący tej sytuacji wygląda tak:

$$\begin{array}{ccccc} & & 300 & & \\ & 210 & & 201 & \\ 120 & & 111 & & 102 \\ & 021 & & 012 & \end{array}$$

Oznaczmy wiersze powyższej macierzy tak samo jak odpowiednie jednomiany stowarzyszone i załóżmy, że zachodzi równość (8.1). W tym przypadku równość ta ma postać:

$$\gamma(300)\cdot 300+\gamma(210)\cdot 201+\gamma(120)\cdot 120+\gamma(111)\cdot 111+\gamma(102)\cdot 102+\gamma(021)\cdot 021+\gamma(012)\cdot 012=0,$$

gdzie wszystkie elementy postaci $\gamma(ijk)$ należą do ciała K.

Z równości tej otrzymujemy osiem następujących równości (tyle równości ile macierz M_0 ma kolumn):

$$\begin{array}{lllll} \gamma(300)+\gamma(210) & =0, & \qquad & \gamma(300)+\gamma(201) & =0, \\ \gamma(210)+\gamma(120) & =0, & & \gamma(210)+\gamma(201)+\gamma(111) & =0, \\ \gamma(201)+\gamma(102) & =0, & & \gamma(120)+\gamma(111)+\gamma(021) & =0, \\ \gamma(111)+\gamma(102)+\gamma(012) & =0, & & \gamma(021)+\gamma(012) & =0. \end{array}$$

Zauważmy, że wszystkie równości, w których występują trzy składniki wyznaczają w wielokącie trójkąt postaci ∇. Pozostałe równości (z dwoma składnikami) spełniają warunek (2) Stwierdzenia 8.2. ⊠

Ze Stwierdzenia 8.2 wynika, że wszystkie elementy postaci $\gamma(i,j)$ można wyznaczyć jednoznacznie przy pomocy elementów: $\gamma(1,1), \gamma(1,2), \ldots, \gamma(1,p)$, czyli elementów z pierwszego nietłustego górnego wiersza.

9 Własności elementów postaci $\gamma(\mathbf{i}\,,\mathbf{j})$

Wszystkie oznaczenia są takie, jak w poprzednich rozdziałach. Rozpoczynamy od następującego ogólnego lematu, w którym występują symbole Newtona. Zakładamy, że jeśli $a<b$ lub $b<0$, to $\binom{a}{b}=0$.

Lemat 9.1. *Niech $a_1,\ldots,a_p \in K$. Niech*

$$a_{ij}=(-1)^{i-1}\textstyle\sum_{h=1}^{p}\binom{i-1}{j-h}a_h$$

dla $i\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{Z}$. Wówczas:

(1) $a_{11}=a_1$, $a_{12}=a_2,\ldots$, $a_{1p}=a_p$;

(2) $a_{ij}=0$ *dla* $j<0$;

(3) $a_{ij}+a_{i,j+1}+a_{i+1,j+1}=0$.

Dowód. Własności (1) i (2) są oczywiste. Wykażemy własność (3).

$$\begin{aligned}
a_{ij}+a_{i,j+1}+a_{i+1,j+1} &= (-1)^{i-1}\textstyle\sum_{h=1}^{p}\binom{i-1}{j-h}a_h+(-1)^{i-1}\sum_{h=1}^{p}\binom{i-1}{j+1-h}a_h \\
&+ (-1)^{i}\textstyle\sum_{h=1}^{p}\binom{i}{j+1-h}a_h \\
&= (-1)^{i-1}\textstyle\sum_{h=1}^{p}\left(\binom{i-1}{j-h}+\binom{i-1}{j+1-h}-\binom{i}{j+1-h}\right) \\
&= (-1)^{i-1}\textstyle\sum_{h=1}^{p}0 \\
&= 0. \quad \boxtimes
\end{aligned}$$

W dalszym ciągu elementy $\gamma(1,1),\gamma(1,2),\ldots,\gamma(1,p)$ oznaczać będziemy odpowiednio przez

$$\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_p.$$

Z powyższego lematu oraz ze Stwierdzenia 8.2 wynika:

Stwierdzenie 9.2. *Dla wszystkich $(i,j)\in B$ zachodzi równość:*

$$\gamma(i,j)=(-1)^{i-1}\textstyle\sum_{h=1}^{p}\binom{i-1}{j-h}\gamma_h. \quad \boxtimes$$

Chcąc zatem udowodnić Stwierdzenie 8.1 wystarczy udowodnić:

Stwierdzenie 9.3. *Wszystkie elementy $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_p$ są równe zero.*

Dowód. Rozważany wielokąt ma w ostatnim wierszu q nietłustych kropek. Wiemy, że $q>p$ (patrz Stwierdzenie 7.2) Oznaczmy je odpowiednio przez (r,l), $(r,l+1),\ldots(r,l+q-1)$ (r i l są pewnymi liczbami naturalnymi). Ze Stwierdzenia 8.2 wynika, że

$$\begin{array}{ccccc}
\gamma(r,l) & + & \gamma(r,l+1) & = & 0, \\
\gamma(r,l+1) & + & \gamma(r,l+2) & = & 0, \\
 & \vdots & & & \\
\gamma(r,l+q-2) & + & \gamma(r,l+q-1) & = & 0.
\end{array}$$

Spójrzmy na pierwszą z tych równości i zastosujmy do niej Stwierdzenie 9.2. Otrzymujemy wówczas równość:

$$(-1)^{r-1}\textstyle\sum_{h=1}^{p}\binom{r-1}{l-h}\gamma_h+(-1)^{r-1}\sum_{h=1}^{p}\binom{r-1}{l+1-h}\gamma_h=0,$$

z której wynika równość:

$$\textstyle\sum_{h=1}^{p}\binom{r}{l+1-h}\gamma_h=0.$$

W ten sposób otrzymujemy następujący jednorodny układ równań:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\sum_{h=1}^{p}\binom{r}{l+1-h}\gamma_h & = & 0 \\
\sum_{h=1}^{p}\binom{r}{l+2-h}\gamma_h & = & 0 \\
\vdots & & \\
\sum_{h=1}^{p}\binom{r}{l+q-1-h}\gamma_h & = & 0.
\end{array}\right.$$

Równań jest $q-1$ i mamy p niewiadomych: $\gamma_1, \dots, q_p$. Wiemy, że $q-1 \geqslant p$ (patrz Stwierdzenie 7.2). Rozpatrzmy $p \times p$ macierz wyznaczoną przez p początkowych równań. Macierz ta ma postać $[c_{ij}]$, przy czym

$$c_{ij} = \binom{r}{l+1+i-j}.$$

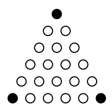
Wystarczy teraz udowodnić, że macierz ta ma niezerowy wyznacznik. Permutacja kolumn, określona wzorem $j \mapsto p+1-j$, sprawia, że badany wyznacznik jest równy (z dokładnością do znaku) wyznacznikowi macierzy $[c'_{ij}]$, gdzie

$$c'_{ij} = \binom{r}{l-p+i+j}.$$

Z oczywistej nierówności $[2m/3] \leqslant [(2m+1)/3]+1$ wynika, że $l-p \geqslant 0$. Bez trudu stwierdzamy również, że wszystkie występujące tu symbole Newtona są różne od zera. Teza wynika zatem z Twierdzenia 10.1, które będzie udowodnione w następnym rozdziale. $\boxtimes$

Spójrzmy na dwa następujące przykłady ilustrujące dowód powyższego stwierdzenia oraz dowód Stwierdzenia 8.1.

Przykład 9.4. Rozważmy przypadek $m-1=5$. Wielokąt dotyczący tego przypadku ma postać:



Liczby p i q są odpowiednio równe 2 i 4. Oznaczmy: $a=\gamma_1=\gamma(1,1)$, $b=\gamma_2=\gamma(1,2)$. Tablica γ ma zatem, na mocy Stwierdzenia 8.2, następującą postać:

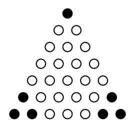
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & a & & b & & & \\
 & & -a & & -a-b & & -b & & \\
 & a & & 2a+b & & a+2b & & b & \\
-a & & -3a-b & & -3a-3b & & -a-3b & & -b \\
 & 4a+b & & 6a+4b & & 4a+6b & & a+4b &
\end{array}$$

Suma każdych dwóch sąsiednich elementów ostatniego wiersza jest (na mocy Stwierdzenia 8.2), równa zero. Mamy zatem, w szczególności, dwie równości:

$$\begin{cases} (4a+b) & + & (6a+4b) & = & 0, \\ (6a+4b) & + & (4a+6b) & = & 0. \end{cases}$$

Z równości tych wynika, że $a=b=0$. $\boxtimes$

Przykład 9.5. Niech $m-1=6$. Wielokąt dotyczący tego przypadku ma postać:



Liczby p i q są odpowiednio równe 2 i 3. Oznaczmy: $a = \gamma_1 = \gamma(1,1)$, $\quad b = \gamma_2 = \gamma(1,2)$. Tablica γ ma zatem, na mocy Stwierdzenia 8.2, następującą postać:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & a & & b & & & \\
 & & -a & & -a-b & & -b & & \\
 & a & & 2a+b & & a+2b & & b & \\
-a & & -3a-b & & -3a-3b & & -a-3b & & -b \\
 & 4a+b & & 6a+4b & & 4a+6b & & a+4b & \\
 & & -10a-5b & & -10a-10b & & -5a-10b & &
\end{array}$$

Suma każdych dwóch sąsiednich elementów ostatniego wiersza jest (na mocy Stwierdzenia 8.2), równa zero. Mamy zatem, w szczególności, dwie równości:

$$\begin{cases} (-10a-5b) & + & (-10a-10b) & = & 0, \\ (-10a-10b) & + & (-5a-10b) & = & 0. \end{cases}$$

Z równości tych wynika, że $a = b = 0$. $\boxtimes$

10 Wyznacznik z symbolami Newtona

Oznaczenia stosowane w tym rozdziale nie mają żadnego związku z oznaczeniami stosowanymi w poprzednich rozdziałach.

Niech n będzie liczbą naturalną i niech p, q będą liczbami całkowitymi takimi, że

$$0 \leqslant q+2 \leqslant q+2n \leqslant p.$$

Rozważmy $n \times n$ macierz $A = A(p,q) = [a_{ij}]$, w której

$$a_{ij} = \tbinom{p}{q+i+j}, \quad \text{dla } \ i,j = 1,\dots,n.$$

Wyznacznik tej macierzy oznaczać będziemy przez $w_n(p,q)$. Mamy zatem:

$$w_n(p,q) = \begin{vmatrix} \binom{p}{q+1+1} & \binom{p}{q+1+2} & \cdots & \binom{p}{q+1+n} \\ \binom{p}{q+2+1} & \binom{p}{q+2+2} & \cdots & \binom{p}{q+2+n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p}{q+n+1} & \binom{p}{q+n+2} & \cdots & \binom{p}{q+n+n} \end{vmatrix}.$$

Celem tego rozdziału jest podanie dowodu następującego twierdzenia.

Twierdzenie 10.1. *Liczba $w_n(p,q)$ jest różna od zera.*

Przed dowodem zanotujmy najpierw dwa proste lematy.

Lemat 10.2. $\binom{n}{k} = \frac{n+1-k}{k}\binom{n}{k-1}$, *dla* $1 \leqslant k \leqslant n$. ⊠

Lemat 10.3. $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$, *dla* $0 \leqslant k \leqslant n$. ⊠

Istotną rolę odgrywa następny lemat.

Lemat 10.4. $w_n(p,q) = (-1)^{n-1}\binom{p}{q+2}\frac{1}{(q+3)(q+4)\cdots(q+n+1)}w_{n-1}(p+1,q+2)$.

Dowód. Niech $A_1,\dots A_n$ oznaczają kolumny macierzy $A = A(p,q)$ i niech

$$c_j = \tfrac{p-q-j-1}{q+j+2}, \quad \text{dla} \;\; j = 1,2,\dots,n-1.$$

Łatwo sprawdzić, że

$$c_j = \tfrac{p-q-j-1}{q+j+2} = \binom{p}{q+1+j}^{-1}\binom{p}{q+1+j+1},$$

dla $j = 1,2,\dots,n-1$. Każdą kolumnę A_j (dla $j = 1,\dots n-1$) mnożymy przez c_j i odejmujemy od kolumny A_{j+1}. W ten sposób otrzymujemy nową $n\times n$ macierz B, której wyznacznik pokrywa się z wyznacznikiem macierzy A, tzn. $\det B = d_n(p,q)$. Wystarczy zatem badać $\det B$.

Pierwszy wiersz macierzy B jest równy

$$[\binom{p}{q+1+1}, 0, 0, \dots, 0].$$

Kolumny $B_1,\dots,B_n$ macierzy B mają postać: $B_1 = A_1$ oraz

$$B_j = A_j - c_{j-1}A_{j-1}, \quad \text{dla} \;\; j = 2,\dots,n.$$

Zbadajmy liczbę b_{ij}, (tzn. i-tą współrzędną kolumny B_j) dla $j > 1$.

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \binom{p}{q+i+j} - \tfrac{p-q-j}{q+j+1}\binom{p}{q+i+j-1} \\
&= \tfrac{(p+1)-(q+i+j)}{q+i+j}\binom{p}{q+i+j-1} - \tfrac{p-q-j}{q+j+1}\binom{p}{q+i+j-1} \quad \text{(Lemat 10.2)} \\
&= \binom{p}{q+i+j-1}\left(\tfrac{p+1-q-j-i}{q+i+j+1} - \tfrac{p-q-j}{q+j+1}\right) \\
&= \binom{p}{q+i+j-1}\tfrac{(p+1)(1-i)}{(q+i+j)(q+j+1)} \\
&= \tfrac{1-i}{q+j+1}\cdot\tfrac{p+1}{q+i+j}\binom{p}{q+i+j-1} \\
&= \tfrac{1-i}{q+j+1}\binom{p+1}{q+i+j} \quad \text{(Lemat 10.3).}
\end{aligned}$$

Macierz B ma zatem następującą postać:

$$B = \begin{bmatrix} \binom{p}{q+1+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{p}{q+2+1} & \frac{-1}{q+1+2}\binom{p+1}{q+2+2} & \frac{-1}{q+1+3}\binom{p+1}{q+2+3} & \cdots & \frac{-1}{q+1+n}\binom{p+1}{q+2+n} \\ \binom{p}{q+3+1} & \frac{-2}{q+1+2}\binom{p+1}{q+3+2} & \frac{-2}{q+1+3}\binom{p+1}{q+3+3} & \cdots & \frac{-2}{q+1+n}\binom{p+1}{q+3+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p}{q+i+1} & \frac{-(i-1)}{q+1+2}\binom{p+1}{q+i+2} & \frac{-(i-1)}{q+1+3}\binom{p+1}{q+i+3} & \cdots & \frac{-(i-1)}{q+1+n}\binom{p+1}{q+i+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p}{q+n+1} & \frac{-(n-1)}{q+1+2}\binom{p+1}{q+n+2} & \frac{-(n-1)}{q+1+3}\binom{p+1}{q+n+3} & \cdots & \frac{-(n-1)}{q+1+n}\binom{p+1}{q+n+n} \end{bmatrix}.$$

Widzimy więc, że

$$w_n(p,q) = \det B = (-1)^{n-1}\binom{p}{q+2}\frac{(n-1)!}{(q+3)(q+4)\cdots(q+n+1)} \cdot \det C,$$

gdzie C jest $(n-1)\times(n-1)$ macierzą równą

$$\begin{bmatrix} \binom{p+1}{q+2+1+1} & \binom{p+1}{q+2+1+2} & \cdots & \binom{p+1}{q+2+1+(n-1)} \\ \binom{p+1}{q+2+2+1} & \binom{p+1}{q+2+2+2} & \cdots & \binom{p+1}{q+2+2+(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{p+1}{q+2+(n-1)+1} & \binom{p+1}{q+2+(n-1)+2} & \cdots & \binom{p+1}{q+2+(n-1)+(n-1)} \end{bmatrix}.$$

Wyznacznik z tej macierzy jest oczywiście równy $w_{n-1}(p+1, q+2)$. To kończy dowód lematu. ⊠

Dowód Twierdzenia 10.1. Ponieważ $w_1(p,q) = \binom{p}{q+2} \neq 0$, więc twierdzenie zachodzi dla $n = 1$. Teza wynika zatem z Lematu 10.4 i indukcji. ⊠

Twierdzenie 10.1 wykorzystaliśmy w dowodzie Stwierdzenia 9.3, które było ostatnim etapem dowodu Twierdzenia 2.4, głównego twierdzenia tej pracy. Udowodniliśmy zatem, że pierścień stałych badanej derywacji D nie jest skończenie generowany.

11 Uwagi końcowe

$\boxed{\textbf{11.1}}$ Rozważmy K-automorfizm σ pierścienia $\mathbb{A}$, zdefiniowany równościami:

$$\sigma(x) = x, \qquad \sigma(y) = y, \qquad \sigma(z) = z,$$
$$\sigma(s) = s + x^3, \qquad \sigma(t) = t + y^3, \qquad \sigma(u) = u + z^3, \qquad \sigma(v) = v + x^2y^2z^2.$$

Automorfizm ten pokrywa sę z automorfizmem

$$e^D = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} D^p$$

(pamiętamy, że derywacja D jest lokalnie nilpotentna). Pierścień niezmienników tego automorfizmu, czyli pierścień

$$\mathbb{A}^\sigma = \{w \in \mathbb{A};\ \sigma(w) = w\}$$

jest równy pierścieniowi $\mathbb{A}^D$. Z Twierdzenia 2.4 wynika zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 11.1. *Pierścień $\mathbb{A}^\sigma$ nie jest skończenie generowany nad K.*

$\boxed{\textbf{11.2}}$ Niech m będzie liczbą naturalną i niech $D_m : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ będzie K-derywacją taką, że:

$$\begin{array}{llll} D_m(x) = 0, & D_m(y) = 0, & D_m(z) = 0, & \\ D_m(s) = x^{m+1}, & D_m(t) = y^{m+1}, & D_m(u) = z^{m+1}, & D_m(v) = x^m y^m z^m. \end{array}$$

Derywacja D, badana w tej pracy, jest derywacją D_2. Powtarzając cały dowód Twierdzenia 2.4 można udowodnić:

Twierdzenie 11.2 ([11]). *Jeśli $m \geqslant 2$, to pierścień $\mathbb{A}^{D_m}$ nie jest skończenie generowany nad K.*

$\boxed{\textbf{11.3}}$ Rozpatrzmy pierścień wielomianów $K[X,Y] = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, gdzie $n, m \in \mathbb{N}$. Mówić będziemy, że dana K-derywacja d pierścienia $K[X,Y]$ jest *elementarna*, jeśli jest postaci:

$$\begin{array}{llll} d(x_1) = 0, & d(x_2) = 0, & \ldots, & d(x_n) = 0, \\ d(y_1) = f_1, & d(y_2) = f_2, & \ldots, & d(y_m) = f_m, \end{array}$$

gdzie $f_1, \ldots, f_m \in K[X] = K[x_1, \ldots, x_n]$. Każda derywacja elementarna jest lokalnie nilpotentna. Derywacja D, badana w tej pracy, jest elementarna (tutaj $n = 3$, $m = 4$). Można udowodnić następujące twierdzenia.

Twierdzenie 11.3 ([4]). *Niech d będzie elementarną K-derywacją taką, jak powyżej i niech R będzie jej pierścieniem stałych.*

(1) *Jeśli ideał w $K[X]$, generowany przez wielomiany $f_1, \ldots, f_m$, jest równy $K[X]$, to pierścień R jest skończenie generowany nad K.*

(2) *Jeśli $n \leqslant 2$ lub $m \leqslant 2$, to pierścień R jest skończenie generowany nad K.*

Twierdzenie 11.4 ([4]). *Jeśli $m \geqslant 4$, to dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje elementarna K-derywacja z nieskończenie generowanym pierścieniem stałych.*

References

[1] H. G. J. Derksen, *The kernel of a derivation*, J. Pure Appl. Algebra **84**(1993), 13 – 16.

[2] J.K. Deveney, D.R. Finston, *G_a actions on $\mathbb{C}^3$ and $\mathbb{C}^7$*, Communications in Algebra **22**(1994), 6295 - 6302.

[3] Ch. Eggermont, A. van den Essen, *A class of triangular derivations having a slice*, Catholic University, Nijmegen, Report **9429**(1994).

[4] A. van den Essen, T. Janssen, *Kernels of elementary derivations*, Catholic University, Nijmegen, Report **9548**(1995), 1 – 12.

[5] T. Janssen, *Kernels of elementary derivations*, Preprint, 1995.

[6] M. Nagata, *Lectures on the Fourteenth Problem of Hilbert,* Lect. Notes **31**, Tata Institute, Bombay, 1965.

[7] M. Nagata, *On the fourteenth problem of Hilbert*, Proc. Intern. Congress Math., 1958, 459 – 462, Cambridge Univ. Press, New York, 1966.

[8] A. Nowicki, *Rings and fields of constants for derivations in characteristic zero*, J. Pure Appl. Algebra, **96**(1994), 47 - 55.

[9] A. Nowicki, *Polynomial derivations and their rings of constants*, UMK, Toruń, 1994.

[10] A. Nowicki, M. Nagata, *Rings of constants for k–derivations in $k[x_1, \ldots, x_n]$*, J. Math. Kyoto Univ., **28**(1988), 111 – 118.

[11] P. Roberts, *An infinitely generated symbolic blow-up in a power series ring and a new counterexample to Hilbert's fourteenth problem,* J. Algebra **132**(1990), 461 – 473.

Roberts' counterexample to the fourteenth problem of Hilbert

Summary. Let $A = K[x, y, z, s, t, u, v]$ be the polynomial ring in seven variables over a field K of characteristic zero and let $D : A \to A$ be the derivation of A defined by the equalities:

$$D(x) = D(y) = D(z) = 0,\ D(s) = x^3,\ D(t) = y^3,\ D(u) = z^3,\ D(v) = x^2y^2z^2.$$

It is known (P. Roberts 1990) that the ring of constants with respect to D is not finitely genereted over K. In the paper a proof of this fact is given.

Bronisławów, 12 – 16 stycznia, 1998 r.