MATERIAŁY NA XXXII KONFERENCJĘ SZKOLENIOWĄ Z GEOMETRII ANALITYCZNEJ I ALGEBRAICZNEJ ZESPOLONEJ

2011 **Łódź** **str. 47**

PRZYKŁAD PINCZUKA

Piotr Migus (Łódź)

Streszczenie

Celem artykułu jest przedstawienie kontrprzykładu S. Pinczuka do rzeczywistej hipotezy jakobianowej.

Wstęp

Hipoteza jakobianowa została postawiona w 1939 roku przez O.-H. Kellera ([Ke]) i po upływie ponad siedemdziesięciu lat, mimo wielu prób jej rozwiązania, wciąż jest otwartym problemem.

Hipoteza 1. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i niech $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Jeśli $J_F(z) \neq 0$, dla dowolnego $z \in \mathbb{C}^n$, wówczas odwzorowanie F jest odwracalne.*

Warunek $J_F(z) \neq 0$ jest równoważny warunkowi $J_F(z) = c$, gdzie $c \in \mathbb{C}^\times$ dla każdego $z \in \mathbb{C}^n$. Wynika to z faktu, że jakobian odwzorowania F jest wielomianem oraz z zasadniczego twierdzenia algebry.

Wiadomo było, że hipoteza jest nieprawdziwa, jeśli przyjmiemy, że współrzędne odwzorowania F są funkcjami całkowitymi. Istotnie, niech $n = 2$ i połóżmy

$$f_1(x, y) = xe^{-y}, \quad f_2(x, y) = e^y, \quad (x, y) \in \mathbb{C}^2,$$

wówczas jakobian odwzorowania (f_1, f_2) jest stale równy 1, ale odwzorowanie (f_1, f_2) nie jest odwracalne, ponieważ

$$F(x, y + 2\pi i) = F(x, y).$$

Równolegle do hipotezy 1 powstała analogiczna, mocniejsza, hipoteza dla przypadku gdy $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Hipoteza 2. *Niech $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ i niech $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Jeśli $J_F(x) \neq 0$, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$, wówczas odwzorowanie F jest dyfeomorfizmem z $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^n$.*

Podobnie jak w przypadku zespolonym, hipoteza 2 nie jest prawdziwa, jeśli założymy, że współrzędne odwzorowania F są funkcjami analitycznymi. Istotnie, niech $f_1(x, y) = e^x \cos y$, $f_2(x, y) = e^x \sin y$ dla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wówczas $J_F(x, y) = e^{2x} > 0$, dla każdego $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lecz $F(x, y + 2\pi) = F(x, y)$. Stąd otrzymujemy, że odwzorowanie F nie jest różnowartościowe.

W roku 1994, S.Pinczuk ([Pi]) podał kontrprzykład do hipotezy 2 w przypadku, gdy $n = 2$. Konstrukcja ta nie była prosta, wielomian będący pierwszą współrzędną odwzorowania F, nie może być zbyt niskiego stopnia. J. Gwoździewicz pokazał w 2001 roku ([Gw])

Niech $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem wielomianowym. Jeśli $J_F > 0$ oraz $\deg f_1 \leqslant 3$, $\deg f_2 \leqslant 3$, to odwzorowanie F jest dyfeomorfizmem.

W roku 2010 F. Braun wraz z J.R. dos Santos Filho ([Br]) uzyskali ogólniejszy wynik niż Gwoździewicz, pokazując, że prawdziwość rzeczywistej hipotezy jakobianowej jest zależna od stopnia tylko jednej współrzędnej odwzorowania F.

Niech $F = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie odwzorowaniem wielomianowym takim, że $\deg f_1 = 3$. Jeśli $J_F > 0$, to odwzorowanie F jest dyfeomorfizmem.

Celem niniejszej pracy jest konstrukcja kontrprzykładu do hipotezy 2 w przypadku, gdy $n = 2$. Kontrprzykład ten, jak wcześniej zostało wspomniane, podał S. Pinczuk.

W paragrafie pierwszym znajdują się lemat o pewnym, szczególnym, typie równania o pochodnych cząstkowych oraz lemat o podstawowych działaniach na jakobianach. Lematy te mają charakter pomocniczy.

Paragraf drugi zawiera definicję oraz proste własności dyfeomorfizmów. Własności te dotyczą głównie pierwszej współrzędnej odwzorowania będącego dyfeomorfizmem. Ponadto, własności te odgrywają podobną rolę co lematy z paragrafu pierwszego.

Paragraf trzeci jest główną częścią pracy. W paragrafie tym znajduje się konstrukcja kontrprzykładu podanego przez S. Pinczuka. Konstrukcja ta w dużym stopniu bazuje na lematach i własnościach podanych w poprzednich paragrafach. Ponadto, w paragrafie tym podane są dokładne wyprowadzenia i obliczenia.

W paragrafie czwartym znajduje się alternatywne podejście do wykazania, że odwzorowanie Pinczuka nie jest dyfeomorfizmem, koncepcja ta wywodzi się od T. Figla.

W ostatnim paragrafie wspomniana jest pomyłka Pinczuka oraz zostaje podany dokładny stopień odwzorowania Pinczuka.

Pragnę w tym miejscu serdecznie podziękować Panu Profesorowi Jackowi Chądzyńskiemu, za wszechstronną pomoc podczas pisania tej pracy. Dziękuję również uczestnikom seminarium Katedry Funkcji Analitycznych i Równań Różniczkowych, na którym referowałem niniejszą pracę, w szczególności Panu Prof. S. Spodziei oraz Panu Prof. T. Krasińskiemu, za cenne uwagi, które wpłynęły na ulepszenie tekstu. Na zakończenie dziękuję Panu Prof. K. Ruskowi za udostępnienie artykułu ([Br]).

§1. Pomocnicze lematy

Niech $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem.

Lemat 1. *Rozwiązaniem równania*

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} = v,$$

jest wielomian

$$u(\xi, \eta) = V \circ l^{-1}(\xi, \eta),$$

gdzie l jest odwzorowaniem liniowym określonym wzorem

$$l(\xi, \eta) = (\xi - \eta, \eta),$$

natomiast

$$-v \circ l(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{n} a_k(\xi)\eta^k,$$

$$V(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\xi)}{k+1}\eta^{k+1},$$

gdzie a_k są wielomianami jednej zmiennej.

Dowód. Łatwo sprawdzamy, że odwzorowanie l^{-1} jest określone wzorem

$$l^{-1}(\xi, \eta) = (\xi + \eta, \eta).$$

Stąd otrzymujemy

$$V \circ l^{-1}(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k(\xi + \eta)}{k+1}\eta^{k+1}.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k'(\xi+\eta)}{k+1}\eta^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k'(\xi+\eta)}{k+1}\eta^{k+1} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} a_k(\xi+\eta)\eta^k \\ &= -\sum_{k=0}^{n} a_k(\xi+\eta)\eta^k.\end{aligned}$$

Z drugiej strony

$$v(\xi,\eta) = v \circ l \circ l^{-1}(\xi,\eta) = -\sum_{k=0}^{n} a_k(\xi+\eta)\eta^k,$$

to kończy dowód lematu 1. □

Lemat 2. *Jeśli funkcje $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są klasy C^1 oraz funkcja g nigdzie nie znika, wówczas mamy następujące tożsamości:*

$$\begin{aligned}J_{(f+g,h)} &= J_{(f,h)} + J_{(g,h)}, \\ J_{(fg,h)} &= fJ_{(g,h)} + gJ_{(f,h)}, \\ J_{(\frac{f}{g},h)} &= \frac{1}{g}J_{(f,h)} - \frac{f}{g^2}J_{(g,h)}.\end{aligned}$$

Dowód. Korzystając z podstawowych zasad różniczkowania otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned}J_{(f+g,h)} &= \frac{\partial(f+g)}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial(f+g)}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= J_{(f,h)} + J_{(g,h)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{(fg,h)} &= \frac{\partial(fg)}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial(fg)}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}g + f\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}g + f\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\right) \\ &= fJ_{(g,h)} + gJ_{(f,h)},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{(\frac{f}{g},h)} &= \frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial(\frac{f}{g})}{\partial y} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{g}{g^2} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{g}{g^2} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{g} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{g} - \frac{f}{g^2}\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{g}J_{(f,h)} - \frac{f}{g^2}J_{(g,h)}.
\end{aligned}
$$

□

§2. Własności dyfeomorfizmów

Definicja 1. *Niech $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ będą zbiorami otwartymi. Odwzorowanie $F : G_1 \to G_2$ nazwiemy dyfeomorfizmem, jeśli jest bijekcją G_1 na G_2 oraz odwzorowanie F wraz z odwzorowaniem odwrotnym F^{-1} są klasy C^1.*

Podamy teraz trzy własności dyfeomorfizmów potrzebne w dalszej części pracy.

Własność 1. *Jeśli odwzorowanie $F : G_1 \to G_2$ jest dyfeomorfizmem, to dla każdego $x \in G_1$, $J_F(x) \neq 0$.*

Dowód. Z twierdzenia o jakobianie superpozycji odwzorowań [*], dla dowolnego $x_0 \in G_1$, mamy $J_{F^{-1}\circ F}(x_0) = J_{F^{-1}}(F(x_0))J_F(x_0)$. Z drugiej strony $F^{-1}\circ F = id_{G_1}$. Ponieważ $J(id_{G_1}) = 1$, więc otrzymujemy $J_{F^{-1}\circ F}(x_0) = 1$. Zatem $J_{F^{-1}}(F(x_0))J_F(x_0) = 1$, czyli ostatecznie $J_F(x_0) \in \mathbb{R}^{\times}$. □

Własność 2. *Niech $G_1 = G_2 = \mathbb{R}^n$ oraz niech $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem, wówczas zbiór $P = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = 0\}$ jest zbiorem spójnym.*

Dowód. Ponieważ odwzorowanie F jest bijekcją, więc $F(P) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Ponadto odwzorowanie F jest dyfeomorfizmem, więc istnieje ciągłe odwzorowanie F^{-1}. Stąd otrzymujemy, że $P = F^{-1}(F(P)) = F^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1})$. Ponieważ zbiór $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$ jest zbiorem spójnym, więc zbiór P jest również spójny. □

Własność 3. *Niech $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie dyfeomorfizmem oraz niech $f_1 = p_1 p_2$. Połóżmy $P_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = 0\}, P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : p_2(x) = 0\}$. Wówczas $P_1 = \emptyset$ albo $P_2 = \emptyset$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $P_1 \neq \emptyset$ i $P_2 \neq \emptyset$. Wówczas zachodzą dwa przypadki:
1° zbiory P_1, P_2 są rozłączne,
2° istnieje punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ taki, że $x_0 \in P_1 \cap P_2$.

[*] [Bi], str. 49.

W przypadku 1° otrzymujemy sprzeczność z własnością 2 (zbiór P byłby niespójny).
W przypadku 2°

$$J_F = J_{(p_1p_2, f_2, \dots, f_n)} = p_1 J_{(p_2, f_2, \dots, f_n)} + p_2 J_{(p_1, f_2, \dots, f_n)}.$$

Istotnie, analogicznie jak w lemacie 2, w przypadku n-wymiarowym mamy

$$\begin{aligned} J_F &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(p_1p_2)}{\partial x_i} A_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \left(p_1 \frac{\partial p_2}{\partial x_i} A_{1i} + p_2 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} A_{1i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} p_1 \frac{\partial p_2}{\partial x_i} A_{1i} + \sum_{i=1}^{n} p_2 \frac{\partial p_1}{\partial x_i} A_{1i} \\ &= p_1 J_{(p_2, f_2, \dots, f_n)} + p_2 J_{(p_1, f_2, \dots, f_n)}, \end{aligned}$$

gdzie A_{1i} oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $\frac{\partial(p_1p_2)}{\partial x_i}$ macierzy jakobiego. Z powyższego i z założenia przypadku 2° otrzymujemy $J_F(x_0) = 0$, co przeczy własności 1. □

§3. Przykład Pinczuka

Konstrukcje odwzorowania $F = (p, q) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o dodatnim jakobianie i jednocześnie nie będącego dyfeomorfizmem, podzielimy na kolejne kroki.

Pinczuk wprowadza następujące pomocnicze wielomiany

(1)
$$\begin{aligned} t(x, y) &= xy - 1, \\ h(x, y) &= t(xt + 1), \\ f(x, y) &= \frac{(xt + 1)^2(h + 1)}{x}, \\ p(x, y) &= h + f. \end{aligned}$$

Zauważmy, że

(2)
$$\frac{h+1}{x} = \frac{t(xt+1)+1}{x} = \frac{xt^2+t+1}{x} = t^2 + \frac{t+1}{x} = t^2 + y.$$

dlatego f także jest wielomianem. Ponadto, bezpośrednio z (1) wynika, że

(3)
$$(h - t)f = h^2(h + 1).$$

Istotnie

$$(h - t)f = xt^2 f = t^2(xt + 1)^2(h + 1) = h^2(h + 1).$$

Krok 1. Pinczuk wyraża jakobiany odpowiednich odwzorowań wielomianowych w terminach wielomianów t, h, f. Istotnie

Własność 4. *Następujące relacje zachodzą dla wielomianów t, h, f:*

$$\begin{aligned}
J_{(h,t)} &= h - t,\\
J_{(f,h)} &= -f,\\
J_{(f,t)} &= -f + 3h^2 + 2h,\\
J_{(p,th)} &= -4tf - th + 2fh,\\
J_{(p,th^2)} &= -5thf - th^2 + 2fh^2,\\
J_{(p,t^2)} &= -2t^2 - 2tf + 6th(h+1),\\
J_{(p,-t^2-6th(h+1))} &= 2t^2 + 26tf + 30tfh - 12fh - 12fh^2.
\end{aligned}\tag{4}$$

Dowód. Zauważmy najpierw, że:

$$J_{(x,t)} = x, \quad J_{(x,h)} = 2x^2t + x, \quad J_{(y,t)} = -y. \tag{5}$$

Z powyższego i z lematu 2

$$J_{(h,t)} = J_{(xt^2+t,t)} = J_{(xt^2,t)} + J_{(t,t)} = t^2 J_{(x,t)} + xJ_{(t^2,t)} = xt^2 = h - t.$$

Stosując udowodnioną już część własności, (1-2), (5) oraz ponownie lemat 2 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
J_{(f,h)} =& J_{(\frac{(xt+1)^2}{x}(h+1),h)} = (h+1)J_{(\frac{(xt+1)^2}{x},h)} + \frac{(xt+1)^2}{x}J_{(h+1,h)}\\
=&(h+1)\left[\frac{1}{x}J_{((xt+1)(xt+1),h)} - \frac{(xt+1)^2}{x^2}J_{(x,h)}\right]\\
=&(h+1)\left[\frac{2(xt+1)}{x}J_{(xt+1,h)} - \frac{(xt+1)^2}{x^2}J_{(x,h)}\right]\\
=&(h+1)\left[\frac{2(xt+1)}{x}(xJ_{(t,h)} + tJ_{(x,h)}) + \frac{2(xt+1)}{x}J_{(1,h)}\right.\\
&\left. - \frac{(xt+1)^2}{x^2}(2x^2t + x)\right]\\
=&(h+1)\left[\frac{2(xt+1)}{x}(-x^2t^2 + 2x^2t^2 + tx) - \frac{(xt+1)^2}{x}(2xt+1)\right]\\
=&(h+1)\frac{(xt+1)^2}{x}\left[\frac{2}{xt+1}(xt(xt+1)) - 2xt - 1\right] = -f,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{(f,t)} =& J_{((xt+1)^2(t^2+y),t)} = (t^2+y)J_{((xt+1)^2,t)} + (xt+1)^2 J_{(t^2+y,t)}\\
=&2(xt+1)(t^2+y)J_{(xt+1,t)} + (xt+1)^2 J_{(t^2,t)} + (xt+1)^2 J_{(y,t)}\\
=&2(xt+1)(t^2+y)J_{(xt,t)} + 2(xt+1)(t^2+y)J_{(1,t)} + (xt+1)^2 J_{(y,t)}\\
=&2(xt+1)(t^2+y)tJ_{(x,t)} + 2(xt+1)(t^2+y)xJ_{(t,t)} + (xt+1)^2 J_{(y,t)}\\
=&2xt(xt+1)(t^2+y) - y(xt+1)^2\\
=&(xt+1)(2xt^3+2xty) - y(xt+1)^2\\
=&(xt+1)(3xt^3 - xt^3 + 3xty - xty + y - y + t^2 - t^2) - y(xt+1)^2\\
=&(xt+1)(3xty + y + 3xt^3 + t^2 - xty - y - xt^3 - t^2) - y(xt+1)^2\\
=&(xt+1)(y(3xt+1) + t^2(3xt+1) - y(xt+1) - t^2(xt+1))\\
&- y(xt+1)^2\\
=&(xt+1)((3xt+1)(y+t^2) - (xt+1)(y+t^2)) - y(xt+1)^2\\
=&(xt+1)(3xt+1)(y+t^2) - f - y(xt+1)^2\\
=&-f + (xt+1)(3xty + 3xt^3 + y + t^2 - xty - y)\\
=&-f + (xt+1)(3xt^3 + t(2xy+t))\\
=&-f + (xt+1)(3xt^3 + t(2xy - 2 + t + 2))\\
=&-f + (xt+1)(3xt^3 + 3t^2 + 2t) = -f + 3h^2 + 2h.
\end{aligned}$$

Ze wzorów (2-5) oraz z udowodnionej części własności dostajemy

$$\begin{aligned}
J_{(p,th)} &= J_{(f+h,th)} = J_{(f,th)} + J_{(h,th)}\\
&= tJ_{(f,h)} + hJ_{(f,t)} + tJ_{(h,h)} + hJ_{(h,t)}\\
&= -tf - fh + 3h^3 + 2h^2 + h^2 - th\\
&= -tf - th - fh + 3h^3 + 3h^2\\
&= -tf - th - fh + 3h^2(h+1)\\
&= -tf - th - fh + 3(h-t)f\\
&= -tf - th - fh + 3fh - 3tf\\
&= -4tf - th + 2fh,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{(p,th^2)} &= hJ_{(p,th)} + thJ_{(p,h)}\\
&= -4thf - th^2 + 2fh^2 + thJ_{(f,h)} + thJ_{(h,h)}\\
&= -4thf - th^2 + 2fh^2 - thf\\
&= -5thf - th^2 + 2fh^2,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J_{(p,t^2)} &= 2tJ_{(p,t)} = 2tJ_{(f,t)} + 2tJ_{(h,t)} \\
&= -2ft + 6th^2 + 4th + 2th - 2t^2 \\
&= -2t^2 - 2tf + 6th(h+1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{(p,-t^2-6th(h+1))} &= -\ J_{(p,t^2)} - J_{(p,6th^2)} - J_{(p,6th)} \\
&=2t^2 + 2tf - 6th(h+1) + 30thf + 6th^2 \\
&\quad - 12fh^2 + 24tf + 6th - 12fh \\
&=2t^2 + 26tf + 30tfh - 12fh - 12fh^2.
\end{aligned}
$$

To kończy dowód. □

Z powyższej własności Pinczuk otrzymuje

Własność 5.

$$J_{(p,-t^2-6th(h+1))} = t^2 + (t + f(13+15h))^2 + f^2 - fv(f,h) \tag{6}$$

i

$$t^2 + f^2 + (t + f(13+15h))^2 > 0, \tag{7}$$

gdzie

$$v = v(\xi,\eta) = \xi + \xi(13+15\eta)^2 + 12\eta + 12\eta^2. \tag{8}$$

Dowód. Z własności 4 mamy

$$
\begin{aligned}
J_{(p,-t^2-6th(h+1))} &=2t^2 + 26tf + 30tfh - 12fh - 12fh^2 \\
&=t^2 + t^2 + 2tf(13+15h) - 12fh - 12fh^2 \\
&=t^2 + t^2 + 2tf(13+15h) - 12fh - 12fh^2 + f^2 - f^2 \\
&\quad + f^2(13+15h)^2 - f^2(13+15h)^2 \\
&=t^2 + t^2 + 2tf(13+15h) + f^2(13+15h)^2 + f^2 \\
&\quad - f^2 - f^2(13+15h)^2 - 12fh - 12fh^2 \\
&=t^2 + (t + f(13+15h))^2 + f^2 \\
&\quad - f(f + f(13+15h)^2 + 12h + 12h^2) \\
&=t^2 + (t + f(13+15h))^2 + f^2 - fv(f,h).
\end{aligned}
$$

Ponadto, prawa strona (7) jest nieujemna i znika tylko wtedy, gdy $f = 0$ i $t = 0$. Jest to jednak niemożliwe, ponieważ jeśli $t = 0$, to z (1) $f = \frac{1}{x} \neq 0$. □

Krok 2. Dla wielomianu v określonego wzorem (8), istnieje wielomian u taki, że

$$J_{(p,u(f,h))} = fv(f,h). \tag{9}$$

Istotnie, niech u będzie rozwiązaniem równania z lematu 1. Wówczas korzystając z reguły łańcucha i z (4) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
J_{(p,u(f,h))} =& \Big(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}(f,h)\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial \eta}(f,h)\frac{\partial h}{\partial y}\Big)\\
&-\Big(\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial y}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}(f,h)\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}(f,h)\frac{\partial h}{\partial x}\Big)\\
=&\frac{\partial u}{\partial \xi}(f,h)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\\
&+\frac{\partial u}{\partial \eta}(f,h)\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial h}{\partial x}\Big)\\
=&\Big(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}(f,h)-\frac{\partial u}{\partial \eta}(f,h)\Big)\\
=&f\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}(f,h)-\frac{\partial u}{\partial \eta}(f,h)\Big).
\end{aligned}$$

Stąd i z lematu 1 otrzymujemy

$$f\Big(\frac{\partial u}{\partial \xi}(f,h)-\frac{\partial u}{\partial \eta}(f,h)\Big)=fv(f,h).$$

Krok 3. Kładąc teraz

$$q=-t^2-6th(h+1)+u(f,h), \tag{10}$$

dostajemy z (6-7) oraz (9-10)

$$J_{(p,q)}=t^2+f^2+(t+f(13+15h))^2>0.$$

Krok 4. Pinczuk pokazuje, że wielomian p nie jest współrzędną dyfeomorfizmu.

Istotnie, łatwo zauważyć, że

$$p(x,y)=[x(xy-1)+1][xy-1+(x^2y-x+1)(y+(xy-1)^2)].$$

Niech

$$p_1(x,y)=x(xy-1)+1,\quad p_2(x,y)=xy-1+(x^2y-x+1)(y+(xy-1)^2).$$

Oznaczmy przez $P_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p_1(x,y)=0\}$, $P_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : p_2(x,y)=0\}$. Oczywiście $(1,0)\in P_1$ i $(0,0)\in P_2$. To jest sprzeczne z własnością 3.

Reasumując otrzymaliśmy odwzorowanie $F=(p,q)$ z dodatnim jakobianem, które nie jest dyfeomorfizmem.

§4. Uwagi Figla

T. Figiel w [Fi], pokazał bezpośrednio, nie używając własności dyfeomorfizmów (patrz §2), że odwzorowanie Pinczuka F nie jest dyfeomorfizmem.

Oznaczmy $k(s) = (s, \frac{s-1}{s^2})$ dla $s \neq 0$. Figiel zauważył, że

$$h(k(s)) = f(k(s)) = 0, \quad t(k(s)) = -\frac{1}{s}. \tag{11}$$

Istotnie, na podstawie (1) mamy

$$\begin{aligned} t(k(s)) &= s\frac{s-1}{s^2} - 1 = -\frac{1}{s}, \\ h(k(s)) &= t(k(s))(st(k(s)) + 1) = -\frac{1}{s}\big(s\big(-\frac{1}{s}\big) + 1\big) = 0, \\ f(k(s)) &= \frac{(st(k(s)) + 1)^2(h(k(s)) + 1)}{s} = \frac{\big(s\big(-\frac{1}{s}\big) + 1\big)^2}{s} = 0. \end{aligned}$$

Na podstawie lematu 1 wielomian u nie posiada wyrazu wolnego, więc $u(0,0) = 0$. Zatem z (11) otrzymujemy, że $u(f(k(s)), h(k(s))) = u(0,0) = 0$. Stąd oraz z (1) i (10-11) dostajemy

$$p(k(s)) = f(k(s)) + h(k(s)) = 0,$$

$$\begin{aligned} q(k(s)) &= -t^2(k(s)) - 6t(k(s))h(k(s))(h(k(s)) + 1) + u(f,h)(k(s)) \\ &= -t^2(k(s)) = -\frac{1}{s^2}. \end{aligned}$$

Zatem

$$F(k(s)) = (p(k(s)), q(k(s))) = (0, -\frac{1}{s^2}).$$

Oczywiście

$$k(s) = (s, \frac{s-1}{s^2}) \neq (-s, \frac{-s-1}{s^2}) = k(-s),$$

ale

$$F(k(s)) = F(k(-s)).$$

Zatem odwzorowanie F nie jest różnowartościowe, a co za tym idzie nie jest dyfeomorfizmem.

Figiel zauważył dodatkowo, że $J_{(p.q)}(k(s)) = \frac{2}{s^2}$. Istotnie

$$J_{(p,q)}(k(s)) = t^2(k(s)) + f^2(k(s)) + (t(k(s)) + f(k(s))(13 + 15h(k(s))))^2 = \frac{2}{s^2}.$$

Z powyższego wynika, że jakobian odwzorowania Pinczuka nie jest ograniczony z dołu przez żadną dodatnią stałą.

§5. Stopień odwzorowania

W oryginalnym artykule Pinczuk zapisał pomyłkowo wielomian v w postaci

$$v = v(\xi,\eta) = \xi + \xi(13+15\eta)^2 + 12\eta + 12\xi\eta,$$

znajdując dla tego wielomianu wielomian u, będący wielomianem z kroku 3 dostajemy, że $J_{(p,q)} > 0$. Jednak wówczas wielomian q ma wyższy stopień. Pomyłkę tę dostrzegł L. Drużkowski([Dr]) oraz podał prawidłowy stopień odwzorowania F.

Wyznaczymy teraz stopień tego odwzorowania. W tym celu obliczmy najpierw stopień wielomianu u. Postępując zgodnie z lematem 1 rozważmy superpozycję

$$-v \circ l(\xi,\eta) = \xi - \eta + (\xi-\eta)(13+15\eta)^2 + 12\eta + 12\eta^2.$$

Następnie uporządkujmy wyrazy względem η

$$-v \circ l(\xi,\eta) = 170\xi + (390\xi - 158)\eta + (225\xi - 378)\eta^2 - 225\eta^3.$$

Kolejnym krokiem jest znalezienie wielomianu $V(\xi,\eta)$

$$\begin{aligned}-V(\xi,\eta) &= 170\xi\eta + \frac{(390\xi-158)}{2}\eta^2 + \frac{(225\xi-378)}{3}\eta^3 - \frac{225}{4}\eta^4\\ &= 170\xi\eta + 195\xi\eta^2 - 79\eta^2 + 75\xi\eta^3 - 126\eta^3 - \frac{225}{4}\eta^4.\end{aligned}$$

Mając wielomian V możemy obliczyć wielomian u

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta) =& V \circ l^{-1}(\xi,\eta) = -170(\xi+\eta)\eta - 195(\xi+\eta)\eta^2 + 79\eta^2\\ &- 75(\xi+\eta)\eta^3 + 126\eta^3 + \frac{225}{4}\eta^4\\ =& -170\xi\eta - 91\eta^2 - 195\xi\eta^2 - 69\eta^3 - 75\xi\eta^3 - \frac{75}{4}\eta^4.\end{aligned}$$

Składając teraz wielomian v z odwzorowaniem (f,h) otrzymujemy

$$u(f,h) = -170fh - 91h^2 - 195fh^2 - 69h^3 - 75fh^3 - \frac{75}{4}h^4.$$

Zauważmy, że

$$\deg t = 2, \quad \deg h = 5, \quad \deg f = 10.$$

Ponieważ najwyższa potęga wielomianu $u(f,h)$ występuje w wyrażeniu $-75fh^3$, więc $\deg u(f,h) = 25$. Ponadto $\deg(-t^2 - 6th(h+1)) = 12$, więc na podstawie (10) mamy $\deg q = 25$. Zatem ostatecznie otrzymujemy

$$\deg F = 25.$$

Literatura

[Bi] A.Birkholc, *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych*, PWN, Warszawa 2002.

[Br] F. Braun, J.R. dos Santos Filho, *The Real Jacobian Conjecture on* $\mathbb{R}^2$ *is true when one of the components has degree 3*, Discrete and Continuous Dynamical System, 26(2010), 75-87.

[Dr] L.M. Drużkowski, *A counterexample to the strong Real Jacobian Conjecture*, MR 1292168 (95g:14018).

[Fi] T.Figiel, *Streszczenie rozwiązania rzeczywistej wersji hipotezy jakobianowej podanego przez S. Pinczuka* (maszynopis).

[Gw] J. Gwoździewicz, *The Real Jacobian Conjecture for polynomials of degree 3*, Annales Polonici Mathematici, 76(2001), 121-125.

[Ke] O.-H. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatshefte Math. Phys. 47(1939), 299-306.

[Pi] S. Pinchuk, *A counterexample to the strong Real Jacobian Conjecture*, Mathematische Zeitschrift 217(1994), 1-4.

THE PINCHUK EXAMPLE

Summary. This article aims to present the S. Pinchuk counterexample to the real jacobian conjecture.

Łódź, 10 – 14 stycznia 2011 r.