Własności elementów bezkwadratowych w monoidach przemiennych ze skracaniem

Łukasz Matysiak

Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

7 – 11 stycznia 2019

XL Konferencja i Warsztaty
"Geometria Analityczna i Algebraiczna"
Łódź

Motywacje

Definicja

Zbiór H nazywamy monoidem przemiennym ze skracaniem, jeżeli jest półgrupą przemienną z elementem neutralnym oraz dla dowolnych $a, b, c \in H$ zachodzi warunek

$$ab = ac \quad \Rightarrow \quad b = c.$$

Przykład: $R \setminus \{0\}$ z mnożeniem, gdzie R jest dziedziną (pierścieniem przemiennym z jedynką bez dzielników zera).

Definicja

(a) Element $a \in H$ nazywamy nierozkładalnym, jeżeli nie można go przedstawić w postaci $a = bc$, gdzie $b, c \in H \setminus H^*$.

(b) Element $a \in H$ nazywamy bezkwadratowym, jeżeli nie można go przedstawić w postaci $a = b^2c$, gdzie $b \in H \setminus H^*, c \in H$.

Definicja

(a) Element $a \in H$ nazywamy nierozkładalnym, jeżeli nie można go przedstawić w postaci $a = bc$, gdzie $b, c \in H \setminus H^*$.

(b) Element $a \in H$ nazywamy bezkwadratowym, jeżeli nie można go przedstawić w postaci $a = b^2c$, gdzie $b \in H \setminus H^*, c \in H$.

Oznaczenia

Irr H – zbiór elementów nierozkładalnych w monoidzie H,
Sqf H – zbiór elementów bezkwadratowych w monoidzie H.

Twierdzenie

Niech B będzie dziedziną z jednoznacznością rozkładu. Niech R będzie poddziedziną B takim, że $R^* = B^*$ oraz $R_0 \cap B = R$, gdzie R_0 oznacza ciało ułamków dziedziny R. Następujące warunki są równoważne:

(a) Sqf $R \subset$ Sqf B,

(b) $\forall a \in B, b \in \text{Sqf } B$,

$$a^2 b \in R \setminus \{0\} \Rightarrow a, b \in R.$$

P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), 2111-2118, arXiv: 1601.01508.

Uogólniona Hipoteza jakobianowa

Niech k będzie ciałem charakterystyki 0. Dla każdych wielomianów $f_1, f_2, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, x_n]$, gdzie $n \geqslant 2$ oraz $r \in \{2, \ldots, n\}$, jeśli

$$(1) \qquad \mathrm{nwd}\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_r}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_{j_1}} & \ldots & \frac{\partial f_r}{\partial x_{j_r}} \end{vmatrix}, 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant n \right) \in k \setminus \{0\},$$

to $k[f_1, \ldots, f_r]$ jest algebraicznie domknięty w $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Twierdzenie

Załóżmy, że wielomiany $f_1, f_2, \ldots, f_r$ są algebraicznie niezależne nad k, wówczas następujące warunki są równoważne:

(a) (1),

(b) każdy element nierozkładalny w $k[f_1, \ldots, f_n]$ jest bezkwadratowy w $k[x_1, \ldots, x_n]$,

(c) każdy element bezkwadratowy w $k[f_1, \ldots, f_n]$ jest bezkwadratowy w $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Warunek wystarczający dla Irr $M \subset$ Sqf H

Stwierdzenie

Niech H będzie monoidem oraz M podmonoidem monoidu H. Rozważmy następujące warunki:

(a) $\forall a \in H, b \in \mathrm{Sqf}\, H$,
$$a^2 b \in M \Rightarrow a, ab \in M,$$

(b) $\mathrm{Irr}\, M \subset \mathrm{Sqf}\, H$.

Wówczas (a) $\Rightarrow$ (b).

Twierdzenie

Niech H będzie monoidem faktorialnym. Niech $M \subset H$ będzie podmonoidem takim, że $M^* = H^*$. Następujące warunki są równoważne:

(a) $\forall a \in H, \forall b \in \operatorname{Sqf} H$,
$$a^2 b \in M \Rightarrow a, ab \in M,$$

(b) $\forall s_0, s_1, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H$,
$$s_0 s_1^2 s_2^{2^2} \ldots s_n^{2^n} \in M \Rightarrow s_i s_{i+1} s_{i+2}^2 s_{i+3}^{2^2} \ldots s_n^{2^{n-i-1}} \in M, i = 0, \ldots, n-1; s_n \in M,$$

(c) $\forall s_1, s_2, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H, s_i \operatorname{rpr} s_j, i \neq j$,
$$s_1 s_2^2 s_3^3 \ldots s_n^n \in M \Rightarrow s_n, s_{n-1}s_n, s_{n-2}s_{n-1}s_n, \ldots, s_1 s_2 \ldots s_n \in M,$$

(d) $\forall s_1, s_2, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H, s_i \mid s_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1$,
$$s_1 s_2 \ldots s_n \in M \Rightarrow s_1, s_2, \ldots, s_n \in M,$$

(e) $\forall a \in H, b \in \operatorname{Sqf} H, a \mid b^n, ab \in M \Rightarrow a, b \in M$.

Warunki konieczne i wystarczające dla Sqf $M \subset$ Sqf H

Twierdzenie

Niech H będzie monoidem faktorialnym. Niech $M \subset H$ będzie podmonoidem takim, że $M^* = H^*$. Następujące warunki są równoważne:

(a) Sqf $M \subset$ Sqf H,

(b) Irr $M \subset$ Sqf H oraz $\forall a, b \in M$,

$$a \operatorname{rpr}_M b \Rightarrow a \operatorname{rpr}_H b,$$

(c) Irr $M \subset$ Sqf H oraz $\forall a, b \in$ Irr M,

$$a \not\sim_M b \Rightarrow a \operatorname{rpr}_H b,$$

(d) $M = H^* \times \mathcal{F}(B)$, gdzie B jest dowolnym zbiorem parami względnie pierwszych (w H) nieodwracalnych elementów bezkwadratowych w H,

Twierdzenie c.d.

(e) $\forall s_1, s_2, \ldots, s_n \in \mathrm{Sqf}\, H, s_i \operatorname{rpr}_H s_j, i \neq j,$

$$s_1 s_2^2 s_3^3 \ldots s_n^n \in M \Rightarrow s_1, s_2, \ldots, s_n \in M,$$

(f) $\forall k_1, \ldots, k_n \geqslant 0, \forall q_1, \ldots, q_n \in \mathrm{Irr}\, H, q_i \not\sim_H q_j, i \neq j,$

$$q_1^{k_1} \ldots q_n^{k_n} \in M \Rightarrow q_1^{c_i^{(1)}} \ldots q_n^{c_i^{(n)}} \in M \text{ dla każdego } i,$$

gdzie
$k_j = c_r^{(j)} 2^r + \ldots + c_0^{(j)} 2^0, j = 1, \ldots, n, c_i^{(j)} \in \{0, 1\}, i = 0, \ldots, r.$

(g) $\forall s_0, \ldots, s_n \in \mathrm{Sqf}\, H,$

$$s_n^{2^n} \ldots s_1^2 s_0 \in M \Rightarrow s_0, \ldots, s_n \in M,$$

(h) $\forall a \in H, b \in \mathrm{Sqf}\, H,$

$$a^2 b \in M \Rightarrow a, b \in M.$$

Równoważność pomiędzy (f), (g), (h) została udowodniona w P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *On some factorial properties of subrings*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica 54 (2017), 43-52, arXiv: 1606.06592.

Faktoryzacje bezkwadratowe w monoidach

Definicje

(a) Monoid H nazywamy GCD-monoidem, jeżeli dla dowolnego $a, b \in H$ istnieje $\mathrm{nwd}(a, b)$.

(b) Monoid H nazywamy monoidem pre-Schreiera, jeżeli dla dowolnych $a, b, c \in H$ spełnia warunek

$$a \mid bc \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in H, a = a_1 a_2, a_1 \mid b, a_2 \mid c.$$

(c) Monoid H nazywamy ACCP-monoidem, jeżeli dowolny wstępujący ciąg ideałów głównych w H się stabilizuje.

(d) Monoid H nazywamy atomicznym, jeżeli dowolny element z H możemy przedstawić jako skończony iloczyn elementów nierozkładalnych.

Stwierdzenie

Niech H będzie monoidem. Rozważmy następujące warunki:

(a) $\forall a \in H, \exists s_1, s_2, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H,$ $\quad a = s_1 s_2 \ldots s_n,$

(b) $\forall a \in H, \exists s_1, s_2, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H, s_i \mid s_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1,$ $\quad a = s_1 s_2 \ldots s_n,$

(c) $\forall a \in H, \exists s_1, s_2, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H, s_i \operatorname{rpr} s_j, i \neq j,$ $\quad a = s_1 s_2^2 s_3^3 \ldots s_n^n,$

(d) $\forall a \in H, \exists s_0, s_1, \ldots, s_n \in \operatorname{Sqf} H,$ $\quad a = s_0 s_1^2 s_2^{2^2} \ldots s_n^{2^n},$

(e) $\forall a \in H, \exists b \in H, c \in \operatorname{Sqf} H,$ $\quad a = bc, a \mid c^n,$

(f) $\forall a \in H, \exists b \in H, c \in \operatorname{Sqf} H,$ $\quad a = b^2 c.$

(I) Zachodzą następujące implikacje:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{(a)} & \Leftarrow & \text{atm} & \Leftarrow & \text{ACCP} \\
 & & \Uparrow & \Nwarrow & & \Swarrow & \\
\text{(b)} & \Rightarrow & \text{(c)} & & \text{(d)} & & \\
\Downarrow & & & & \Downarrow & & \\
\text{(e)} & & & & \text{(f)} & &
\end{array}$$

(II) Jeśli H jest monoidem pre-Schreiera, to

$$\text{(b)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(c)} \quad \Rightarrow \quad \text{(d)}.$$

(III) Jeśli H jest GCD-monoidem, to

$$\text{(b)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(c)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{(d)}.$$

Równoważność pomiędzy (b), (c), (d) oraz implikacja z (d) do (f) została udowodniona w
P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *A note on square-free factorizations*, Analytic and Algebraic Geometry 2 (2017), Łódź University Press, 79-84, arXiv: 1609.09464., Proposition 1.

Klasyfikacja monoidów względem faktoryzacji bezkwadratowych

Liczba	ACCP/atm	GCD/pSch	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	Liczba
6	$2/1^*/0$	$2/1^*/0$	+	+	+	+	+	+	1
2	$1/0$	0	+	+	+	−	+	+/−	2
3	$2/1/0$	0	+	−	+	+	+/−	+	2
2	$1/0$	0	+	−	+	−	+/−	+/−	4
4	$2/1^*/0$	$1^*/0$	+	−	−	+	+/−	+	2
4	$1^*/0$	$2/1^*/0$	+	−	−	−	+/−	+/−	4
3	0	$2/1/0$	−	−	−	−	+/−	+/−	4

2 – *ACCP* i *atm*, *GCD* i *pSch*, odpowiednio;
1 – nie *ACCP* i *atm*, nie *GCD* i *pSch*, odpowiednio;
0 – nie *ACCP* i nie *atm*, nie *GCD* i nie *pSch*, odpowiednio;
1^* – 1 jako wartość w *ACCP*/*atm* jest możliwa tylko wtedy, gdy wartość *GCD*/*pSch* jest 0;
1^* – jako wartość *GCD*/*pSch* jest możliwa tylko wtedy, gdy wartość w *ACCP*/*atm* jest 0;

Elementy radykalne

Definicja

Element $a \in H$ nazywamy generatorem radykalnym, jeżeli ideał aH jest radykalny, tzn. spełnia warunek dla dowolnych $b \in H, n \in \mathbb{N}$,

$$a \mid b^n \Rightarrow a \mid b.$$

Przez Gpr H oznaczamy zbiór wszystkich generatorów radykalnych monoidu H.

Stwierdzenie

Niech H będzie monoidem. Wówczas $\operatorname{Gpr} H \subset \operatorname{Sqf} H$.

Stwierdzenie

Niech H będzie monoidem pre-Schreiera.

(a) Niech $a_1, \ldots, a_n \in H$. Jeśli $a_1, \ldots, a_n \in \operatorname{Gpr} H$ oraz $a_i \operatorname{rpr} a_j$ dla $i \neq j$, to $a_1 \ldots a_n \in \operatorname{Gpr} H$.

(b) $\operatorname{Gpr} H = \operatorname{Sqf} H$.

Stwierdzenie

Niech H będzie monoidem.

(a) Niech $r_1, \ldots, r_n, t_1, \ldots, t_n \in \operatorname{Gpr} H$, $r_i \mid r_{i+1}$ oraz $t_i \mid t_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. Jeśli

$$r_1 r_2 \ldots r_n \sim t_1 t_2 \ldots t_n,$$

to $r_i \sim t_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

(b) Dla każdego $a, c \in H$, $b, d \in \operatorname{Gpr} H$, jeśli $ab \sim cd$, $a \mid b^n$, $n \geqslant 1$, $c \mid d^m$, $m \geqslant 1$, to $a \sim c, b \sim d$.

Stwierdzenie

Niech H będzie monoidem pre-Schreiera. Niech $r_1, \dots, r_n, t_1, \dots, t_n \in \mathsf{Sqf}\, H$, $r_i \text{ rpr } r_j$ dla $i \neq j$ oraz $t_i \text{ rpr } t_j$ dla $i \neq j$. Jeśli

$$r_1 r_2^2 r_3^3 \dots r_n^n \sim t_1 t_2^2 t_3^3 \dots t_n^n,$$

to $r_i \sim t_i$ dla $i = 1, \dots, n$.

Przykłady

(1) Niech

$$B_{p,q} = \langle x_1, x_2, x_3, \dots, y_1, y_2, y_3, \dots \mid y_i = x_{i+1}^p y_{i+1}^q, i = 1, 2, 3, \dots \rangle,$$

gdzie p, q są liczbami naturalnymi. Wtedy $B_{p,q}$ jest niefaktorialnym GCD-monoidem dla dowolnych p, q,

a) $B_{1,1}$ spełnia warunki (a) – (f).

b) Jeśli q jest parzyste, to $B_{p,q}$ spełnia (f), ale żadnego z (a) – (e).

c) Jeśli q jest nieparzyste, $(p, q) \neq (1, 1)$, to $B_{p,q}$ nie spełnia warunków (a) – (f).

(2) $H = (\mathbb{Q}_{\geqslant 0}, +)$ jest *GCD*-monoidem, ponieważ $\forall a, b \in H : \mathrm{nwd}(a, b) = \min\{a, b\}$. Spełnia (f). Nie spełnia (a) – (e). H jest niefaktorialny.

(3) Niech A i K będą ciałami takimi, że $A \subset K$. Rozważmy $R = A + XK[X]$ oraz $f \in K[X]$. Wówczas

$$f \in \mathrm{Sqf}\, R \Leftrightarrow f \in \mathrm{Sqf}\, K[X] \wedge f(0) \in A.$$

R spełnia warunki (a) – (f).

Bibliografia

1. D.D. Anderson, D.F. Anderson, M. Zafrullah, *Rings between* $D[X]$ *and* $K[X]$, Houston J. Math. 17 (1991), 109–129.
2. A. Geroldinger, F. Halter-Koch, *Non-unique factorizations, algebraic, combinatorial and analytic theory*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2006.
3. P. Jędrzejewicz, M. Marciniak, Ł. Matysiak, J. Zieliński *On properties of square-free elements in commutative cancellative monoids*, praca wysłana, arXiv 1812.11882.
4. P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *On some factorial properties of subrings*, Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica 54 (2017), 43-52, arXiv: 1606.06592.

Bibliografia

5. P. Jędrzejewicz, Ł. Matysiak, J. Zieliński, *A note on square-free factorizations*, Analytic and Algebraic Geometry 2 (2017), Łódź University Press, 79-84, arXiv: 1609.09464.
6. P. Jędrzejewicz, J. Zieliński, *Analogs of Jacobian conditions for subrings*, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), 2111-2118, arXiv: 1601.01508.
7. A. Reinhart, *Radical factorial monoids and domains*, Ann. Sci. Math. Québec 36 (2012), 193–229.